J. OPERATOR THEORY
2(1979), 95–126

УСТОЙЧИВЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ РАССЕЯНИЯ

Д. З. АРОВ

ВВЕДЕНИЕ

В теории пассивных линейных стационарных электрических цепей хорошо известен метод Дарлингтона реализации конечного идеального двухполюсника с потерями путем замыкания на выходе единичным сопротивлением некоторого четырехполюсника без потерь [9]. Коэффициент отражения Θ реализуемого двухполюсника является элементом матрицы рассеяния $\tilde{\Theta}$ соответствующего четырехполюсника без потерь; отсутствие потерь отражается в том, что $\tilde{\Theta}$ принимает унитарные значения на границе физической области (правой или верхней полуплоскости, или единичного круга). Рассмотрение матриц рассеяния позволило Белевичу обобщить результат Дарлингтона на конечные идеальные 2n-полюсники с потерями [16]. Сам Дарлингтон рассматривал не Θ и $\tilde{\Theta}$, а другие частотные характеристики: импеданс Z двухполюсника и проходную матрицу $\tilde{A}$ четырехполюсника (Z и $\tilde{A}$ просто выражаются соответственно через Θ и $\tilde{\Theta}$). На этом пути результат Дарлингтона был обобщен на конечные идеальные 2n-полюсники с потерями В. П. Потаповым [14] и его ученицей Е. Я. Меламуд [12].

Следует отметить, что Дарлингтон, предлагая свой метод для синтеза цепей [18], считал его универсальным, применимым для исследования по частотным характеристикам системы рассеяния с потерями любой физической природы. В дальнейшем, очевидно, независимо от Дарлингтона представление матрицы рассеяния Θ системы с потерями в виде блока матрицы рассеяния $\tilde{\Theta}$ системы без потерь использовалось в физике ядерных реакций [11].

Однако простые соображения аналитического характера показывают, что, например, в случае, когда Θ унитарна лишь на некотором промежутке границы физической области, метод Дарлингтона не применим. В работе [1] автор выделил естественный класс $B\Pi$ матриц рассеяния Θ, допускающих представление по Дарлингтону: $\Theta \in B\Pi$, если Θ-голоморфная сжимающая функция в физической области, имеющая в определенном смысле (по граничным значениям почти всюду вдоль границы области) продолжение во внешность этой области, которое представимо там в виде отношения голоморфных ограниченных функций. Независимо от автора, обобщая результат Белевича, к классу *ВП* пришел Де Вилд [19] (см. также Дуглас и Хелтон [20]). Значениями функции Θ могут быть линейные операторы, действующие из одного гильбертова пространства в другое. С самого начала [1] автор рассматривал две формы представлений по Дарлингтону: первая — с помощью матрицы рассеяния системы без потерь (независимо от работ Белевича) и вторая — с помощью матрицы прохождения. В настоящей статье рассматриваются представления в первой форме. Они получены и описаны для операторнозначных функций $\Theta(z)$ ($|z| < 1$) более широкого класса, чем *ВП*. В матричнозначном случае эти классы совпадают.

Описание представлений Θ по Дарлингтону дается в виде

$$\tilde{\Theta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Theta \\ h_0 & \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где $\varphi_1^*(\bar{z})$ и $\varphi_2(z)$ — внешние функции, являющиеся решениями факторизационных задач

$$\varphi_1(\zeta)\varphi_1^*(\zeta) = I - \Theta(\zeta)\Theta^*(\zeta), \quad \varphi_2^*(\zeta)\varphi_2(\zeta) = I - \Theta^*(\zeta)\Theta(\zeta) \quad (|\zeta| = 1),$$

$h_0(\zeta)$ — функция, определяемая соотношением

$$h_0(\zeta)\varphi_1^*(\zeta) = \varphi_2(\zeta)\Theta^*(\zeta), \qquad (|\zeta| = 1),$$

$b_1^*(\bar{z})$ и $b_2(z)$ — внутренние функции, такие, что $b_2(\zeta)h_0(\zeta)b_1(\zeta)$ — граничное значение голоморфной ограниченной при $|z| < 1$ функции. Среди ,,знаменателей'' $\{b_2, b_1\}$ функции h_0 естественным образом выделяются минимальные; им отвечают в определенном смысле минимальные $\tilde{\Theta}$. Описание представлений по Дарлингтону во второй форме, приведенное в статье [2], получается из этого переходом от первой формы ко второй.

Известно [13], [8], что произвольная голоморфная сжимающая при $|z| < 1$ функция $\tilde{\Theta}(z)$ с унитарными граничными значениями $\tilde{\Theta}(\zeta)$ ($|\zeta|=1$, n.b.) реализуется как передаточная функция (матрица рассеяния)

$$\tilde{\Theta}(z) = \tilde{S} + z\tilde{G}(I - z\tilde{T})^{-1}\tilde{F}$$

некоторой минимальной (управляемой и наблюдаемой) устойчивой консервативной линейной стационарной динамической системы рассеяния $\tilde{\alpha}$ с дискретным временем

$$\tilde{h}(n+1) = \tilde{T}\tilde{h}(n) + \tilde{F}\tilde{\varphi}^-(n), \quad \tilde{\varphi}^+(n) = \tilde{G}\tilde{h}(n) + \tilde{S}\tilde{\varphi}^-(n)$$

в гильбертовых пространствах $\tilde{\mathfrak{N}}^-$ (входа), $\tilde{\mathfrak{N}}^+$ (выхода) и $\tilde{\mathfrak{H}}$ (внутреннего). Условие консервативности системы рассеяния $\tilde{\alpha}$ равносильно требованию, чтобы $\tilde{F}$, $\tilde{T}$, $\tilde{G}$ и $\tilde{S}$ были блоками оператора, унитарно отображающего $\tilde{\mathfrak{N}}^- \oplus \tilde{\mathfrak{H}}$ на $\tilde{\mathfrak{H}} \oplus \tilde{\mathfrak{N}}^+$; условие устойчивости означает, что

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} T^n = 0, \qquad s\text{-}\lim_{n\to\infty} (\tilde{T}^*)^n = 0, \qquad (\tilde{T} \in C_{00}),$$

а условия управляемости и наблюдаемости —

$$\tilde{\mathfrak{H}} = \bigvee_0^\infty \tilde{T}^n \tilde{F} \tilde{\mathfrak{N}}^-, \quad \tilde{\mathfrak{H}} = \bigvee_0^\infty (\tilde{T}^*)^n \tilde{G}^* \tilde{\mathfrak{N}}^+$$

($\bigvee \mathfrak{D}_n$ — наименьшее подпространство, содержащее все $\mathfrak{D}_n$). Предоставление Θ по Дарлингтону в первой форме, в виде блока $\tilde{\Theta}$ в настоящей статье связывается с реализацией Θ как матрицы рассеяния устойчивой диссипативной линейной стационарной динамической системы рассеяния α, получаемой из $\tilde{\alpha}$ путем потерь части каналов рассеяния: у α пространствами входа $\mathfrak{N}^-$ и выхода $\mathfrak{N}^+$ являются подпространства в $\tilde{\mathfrak{N}}^-$ и $\tilde{\mathfrak{N}}^+$, внутренне пространство $\mathfrak{H}$ совпадает с $\tilde{\mathfrak{H}}$, а коэффициенты

$$F = \tilde{F}|\mathfrak{N}^+, \ T = \tilde{T}, \ G = P_{\mathfrak{N}^+}\tilde{G}, \ S = P_{\mathfrak{N}^+}\tilde{S}|\mathfrak{N}^-.$$

Доказывается (теорема 3), что реализуемая таким образом диссипативная система α является минимальной тогда и только тогда, когда $\tilde{\Theta}$ минимально.

Функции Θ класса *ВП* реализуются как матрицы рассеяния систем α с основными операторами T класса C_0, выделенного и исследованного Б. Секефальви-Надем и Ч. Фояшем — [13, 25—27]. Доказывается (теоремы 5, 6): 1) если $T \in C_0$, то $\Theta \in ВП$; 2) если $\Theta \in ВП$, то у минимальной системы α с матрицей рассеяния Θ имеем $T \in C_0$, причем минимальная функция $m_T(z)$ сжатия T не зависит от выбора минимальной системы α, являясь наименьшим скалярным знаменателем $b_\Theta(z)$ функции $\Theta\left(\frac{1}{z}\right)$ ($b_\Theta(z)$ содержится в семействе скалярных внутренних функций $b(z)$ таких, что $b(z)\Theta\left(\frac{1}{z}\right)$ — голоморфная сжимающая при $|z| < 1$ функция, и $b_\Theta(z)$ — — делитель всех $b(z)$); 3) для минимальных $\tilde{\Theta}$ имеем $b_{\tilde{\Theta}}(z) = b_\Theta(z)$. Предложения 1 (и 2) анонсированы в [3], [4].

С помощью представления Θ по Дарлингтону получается, в частности, синтез устойчивой управляемой оптимальной системы $\mathring{\alpha}$ — такой, что для любой другой пассивной системы α с той же матрицей рассеяния Θ имеем при любых $\varphi_k^-(\in\mathfrak{N}^-)$, $n \geqslant 0$

$$\|\sum_{k=0}^{n} \overset{\circ}{T}{}^k \overset{\circ}{F}\varphi_k^-\| \leqslant \|\sum_{k=0}^{n} T^k F\varphi_k^-\|.$$

Существование управляемой оптимальной системы в работе доказывается для любой матрицы рассеяния Θ.

Для систем рассеяния с непрерывным временем соответствующие результаты могут быть получены путем перехода к системам рассеяния с дискретным временем с помощью преобразования Кэли (см. [7]).

Для систем сопротивления и прохождения с дискретным и непрерывным временем диссипативные реализации передаточных функций (матриц сопротивления и прохождения) могут быть получены путем перехода к соответствующим системам рассеяния (см. [7]).

В другом месте будут изложены результаты автора о матрицах сопротивления, аналогичные теоремам 7, 8 и 5, получаемые такими же методами.

Заметим, что рассмотрение устойчивой диссипативной системы рассеяния лишь игнорированием лаксовских каналов рассеяния отличается от рассмотрения схемы рассеяния, удовлетворяющей постулатам Лакса-Филлипса [24] с ортогональными подпространствами $\mathfrak{D}^-$ и $\mathfrak{D}^+$,,приходящих и уходящих волн'' (см. [3], [23]). Вот почему в работах Ч. Фояша [21] и Бонди [17] фигурируют представления Θ по Дарлингтону в первой форме.

Диссипативная система рассеяния имеет консервативную дилатацию и получается из нее исключением из рассмотрения внутренних лаксовых каналов рассеяния (см. [7]). Таким образом, методом Дарлингтона можно получить два типа реализаций с потерями части внешних каналов рассеяния: консервативную (см. [4]) и диссипативную. Оба типа по существу рассматриваются в физике ядерных реакций [11] (стр. 147—148), где к диссипативной реализации приводит метод Тейхмана и Вигнера.

Наконец, укажем на применение описания минимальных $\tilde{\Theta}$ к синтезу электрических цепей. Для рациональных вещественных сжимающих при $|z| < 1$ матриц-функций $\Theta(z)$ порядка n минимальные $\tilde{\Theta}$ являются рациональными матрицами-функциями порядка $n+r$, где $r=\operatorname{rang}\left[I-\Theta^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\Theta(z)\right]$, и такие $\tilde{\Theta}$ можно выбрать вещественными (см. [2], § 6). С помощью этих $\tilde{\Theta}$ получаются реализации Θ как матрицы рассеяния идеального $2n$-полюсника, имеющего минимальное число сопротивлений, равное r, и в то же время минимальное суммарное число m_C+m_L конденсаторов и катушек, равное степени рациональной матрицы-функции $\Theta(z)$, $m_C + m_L = \deg\Theta =$

$= \deg \tilde{\Theta}$. (Задача получения такой реализации Θ была поставлена Телегиным [28]). Достаточно реализовать $\tilde{\Theta}$ как матрицу рассеяния идеального $2(n+r)$-полюсника без потерь с $m_C + m_L = \deg \tilde{\Theta}$, например, способом, указанным Хелтоном [22], а затем r соответствующих внешних ветвей нагрузить единичными сопротивлениями. Представление по Дарлингтону во второй форме с целой вещественной матрицей-функцией прохождения $\tilde{A}$ порядка $2n$ дает синтез уже не конечного идеального $2n$-полюсника путем замыкания на выходе через трансформатор единичными сопротивлениями идеальной регулярной n-проводной линии [5]. При $n = 1$ таким образом получается реализация идеальной регулярной струны с трением на одном конце по коэффициенту $Z(\lambda)$ динамической податливости скорости струны на другом конце (см. [5], § 4). Пользуясь изложенным в [5], нетрудно показать, что у минимальной реализации будет минимальная длина струны $l = -Z(0)\sum \operatorname{Re}\frac{1}{\lambda_j}$ и минимальная масса $M(l) = -Z^{-1}(0)\sum \operatorname{Re}\frac{1}{\mu_j}$, где λ_j и μ_j — нули и полюсы $Z(\lambda)$ с учетом их кратности; в [5] исследуется именно такая струна.

§ 1. МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ ПАССИВНЫХ СИСТЕМ С ОСНОВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ КЛАССОВ $C_{0\cdot}$, $C_{\cdot 0}$ и C_{00}.

1. Линейная стационарная динамическая система (*ПСДС*) α в сепарабельных гильбертовых пространствах $\mathfrak{N}^-$, $\mathfrak{N}^+$ (внешних) и $\mathfrak{H}$ (внутреннем) с дискретным временем $n(= 0, 1, 2, \ldots)$ определяется как система

$$\begin{cases} h(n+1) = Th(n) + F\varphi^-(n), \\ \varphi^+(n) = Gh(n) + S\varphi^-(n), \end{cases} \quad (n \geqslant 0) \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами T, F, G и S,

$$T \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}], \quad F \in [\mathfrak{N}^-, \mathfrak{H}], \quad G \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{N}^+], \quad S \in [\mathfrak{N}^-, \mathfrak{N}^+]$$

(через $[\mathfrak{N}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{N}_{\mathrm{II}}]$ обозначается множество линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{N}_{\mathrm{I}}$ в $\mathfrak{N}_{\mathrm{II}}$). Векторы $\varphi^-(n)$, $\varphi^+(n)$ и $h(n)$ из $\mathfrak{N}^-$, $\mathfrak{N}^+$ и $\mathfrak{H}$ интерпретируются как данные соответственно на входе, выходе и внутри системы в момент времени n. Оператором T описывается эволюция внутреннего состояния при нулевых данных на входе: $h(n) = T^n h(0)$ при $\varphi^-(n) \equiv 0$. Он называется основным оператором системы α. По данным $h(0)$ и $\{\varphi^-(n)\}_0^m$ из системы (1) однозначно определяются $\{h(n)\}_1^{m+1}$ и $\{\varphi^+(n)\}_0^m$. При $h(0) = 0$ имеем:

$$\varphi^+(0) = S\varphi^-(0), \quad \varphi^+(n) = S\varphi^-(n) + \sum_{k=0}^{n-1} GT^kF\varphi^-(n-k-1), \quad (n \geqslant 1).$$

Эта система равенств с помощью формальных степенных рядов

$$\Phi^{\pm}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{\pm}(n) z^n, \qquad \Theta(z) = S + \sum_{n=1}^{\infty} G T^{n-1} F z^n$$

записывается в виде

$$\Phi^{+}(z) = \Theta(z)\,\Phi^{-}(z).$$

Можно рассматривать $\Theta(z)$ как разложение в ряд голоморфной при $z = 0$ функции

$$\Theta_\alpha(z) = S + zG(I - zT)^{-1} F, \tag{2}$$

определенной по этой формуле в достаточно малой окрестности нуля. Она называется передаточной функцией системы α.

Ниже данные $\varphi^{-}(n)$ и $\varphi^{+}(n)$ интерпретируются как падающие и отраженные волны, приносящие и уносящие энергию, а квадрат нормы вектора в $\mathfrak{N}^{\pm}$ и $\mathfrak{H}$ как энергия.

Назовем α *пассивной системой рассеяния*, если при любых данных $h(0)$ и $\{\varphi^{-}(n)\}_0^\infty$ выполняется условие

$$\|\varphi^{-}(n)\|^2 - \|\varphi^{+}(n)\|^2 \geqslant \|h(n+1)\|^2 - \|h(n)\|^2,$$

означающее отсутствие внутреннего источника энергии. Так как

$$\begin{pmatrix} h(n+1) \\ \varphi^{+}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & F \\ G & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(n) \\ \varphi^{-}(n) \end{pmatrix},$$

то это условие означает, что оператор

$$V = \begin{pmatrix} T & F \\ G & S \end{pmatrix} (\in [\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{N}^{-},\ \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{N}^{+}])$$

является сжатием ($V^*V \leqslant I$), т.е. что имеют место два равносильных неравенства

$$\begin{pmatrix} I|\mathfrak{H} & 0 \\ 0 & I|\mathfrak{N}^{-} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T & F \\ G & S \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} T & F \\ G & S \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{pmatrix} I|\mathfrak{H} & 0 \\ 0 & I|\mathfrak{N}^{+} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T & F \\ G & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & F \\ G & S \end{pmatrix}^* \geqslant 0.$$

Если в каждом из них имеет место знак „$=$", т.е. V — унитарный оператор, то назовем α консервативной системой рассеяния, а в противном случае *диссипативной*. Передаточную функцию пассивной системы рассеяния α назовем матрицей рассеяния. Так как основной оператор T у такой системы — сжатие, то $\Theta_\alpha(z)$ определяется по формуле (2) в единичном круге (при $|z| < 1$).

2. Консервативные *ЛСДС* рассеяния по существу являются предметом исследования теории сжатий в гильбертовом пространстве, развитой последователями М. С. Лившица, а также Б. С. Надем и Ч. Фояшем и другими (см. [13, 8, 7]).

Обозначим для системы α

$$\mathfrak{Y}_\alpha^y = \bigvee_0^\infty T^n F \mathfrak{N}^-, \qquad \mathfrak{Y}_\alpha^H = \bigvee_0^\infty (T^*)^n G^* \mathfrak{N}^+$$

($\bigvee_n \mathfrak{D}_n$ — наименьшее подпространство, содержащее все $\mathfrak{D}_n$).

Назовем *ЛСДС простой*, если

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\alpha^y \vee \mathfrak{H}_\alpha^H.$$

Для консервативной системы рассеяния это условие означает, что T не имеет унитарной части (T — вполне неунитарное сжатие).

Обозначим через B класс голоморфных при $|z| < 1$ функций $\Theta(z)$, принимающих значения из $[\mathfrak{N}^-, \mathfrak{N}^+]$ при некоторых $\mathfrak{N}^-$ и $\mathfrak{N}^+$ и имеющих $\|\Theta(z)\| \leqslant 1$ ($|z| < 1$).

Один из важных результатов теории сжатий в гильбертовом пространстве (см. [13], [8]) можно сформулировать в следующем виде.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Матрица рассеяния произвольной консервативной ЛСДС принадлежит классу B. Произвольная функция $\Theta(z)$ класса B является матрицей рассеяния некоторой простой консервативной ЛСДС, определяетой по $\Theta(z)$ с точностью до унитарного подобия.*

Две *ЛСДС* α и α_1 называются (унитарно) подобными, если существует (унитарный) ограниченно обратимый оператор $X (\in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1])$ такой, что

$$F_1 = XF, \quad T_1 X = XT, \quad G = G_1 X, \quad (S_1 = S).$$

Имеются функциональные модели простой консервативной системы рассеяния α, построенные по граничным значениям $\Theta_\alpha(\zeta)$,

$$s\text{-}\lim_{r \uparrow 1} \Theta_\alpha(r\zeta) \qquad (|\zeta| = 1, \text{ n.b.})$$

функции $\Theta_\alpha(z) (\in B$, см. [13], [8]). Особенно простыми модели являются для систем α, у которых T удовлетворяют условию

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} T^n = 0 \qquad s\text{-}\lim_{n\to\infty} (T^*)^n = 0.$$

Класс таких сжатий T обозначается через $C_0.(C._0)$, а пересечение $C_0. \cap C._0$ — через C_{00}. Известно [13], что матрицы рассеяния консервативных систем с основными операторами класса $C_0.(C._0, C_{00})$ составляют подкласс функций $\Theta(z)$ из B, имеющих изометрические ($*$-изометрические, унитарные) граничные значения $\Theta(\zeta)$ почти всюду на окружности $|\zeta| = 1$. Такие функции $\Theta(z)$ называются внутренними ($*$-внутренними, двусторонне внутренними). Запишем модель в случае, когда $\Theta_\alpha(z)$ — внутренняя функция.

Пусть: $L^2(\mathfrak{N})$ — гильбертово пространство слабо измеримых функций $f(\zeta)$ ($|\zeta| = 1$), принимающих значения из гильбертова пространства $\mathfrak{N}$ и имеющих $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} \|f(\zeta)\|^2 |d\zeta| < \infty$, $H^2_+(\mathfrak{N})$ — подпространство функций $f(\zeta)$ из $L^2(\mathfrak{N})$, разлагающихся в ряд Фурье по неотрицательным степеням ζ. Будем отожествлять $H^2_+(\mathfrak{N})$ с пространством Харди голоморфных в единичном круге функций $f(z)$, принимающих значения из $\mathfrak{N}$ и имеющих $\|f\|^2 = \sup\limits_{r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} \|f(r\zeta)\|^2 |d\zeta| < \infty$;

$$f(\zeta) = s\text{-}\lim_{r\uparrow 1} f(r\zeta) \qquad (|\zeta| = 1, \text{n.b.}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. [8]. *Пусть $\Theta(z)$ — внутренняя функция, принимающая значения из $[\mathfrak{N}^-, \mathfrak{N}^+]$. Рассмотрим систему $\dot\alpha$ с внешними пространствами $\mathfrak{N}^-$ и $\mathfrak{N}^+$, у которой внутреннее пространство $\dot{\mathfrak{H}}$ и коэффициенты $\dot T$, $\dot F$, $\dot G$, $\dot S$ определяются до формулам:*

$$\dot{\mathfrak{H}} = H^2_+(\mathfrak{N}^+) \ominus \Theta(\zeta)H^2_+(\mathfrak{N}^-),$$

$$\dot T h = \zeta^{-1}[h(\zeta) - h(0)], \quad \dot G h = h(0) \quad (h = h(\zeta) \in \dot{\mathfrak{H}}),$$

$$\dot F\varphi^- = \zeta^{-1}[\Theta(\zeta) - \Theta(0)]\varphi^-, \quad \dot S\varphi^- = \Theta(0)\varphi^- \quad (\varphi^- \in \mathfrak{N}^-).$$

Тогда $\dot\alpha$ — простая консервативная система с матрицей рассеяния $\Theta(z)$.

Если α — система с коэффициентами T, F, G, S, то систему с коэффициентами T^*, G^*, F^*, S^* обозначим через α^* и назовем сопряженной для α. В записанной модели коэффициенты сопряженной системы $\dot\alpha^*$ определяются по формулам:

$$\dot F^* h = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} \zeta\Theta^*(\zeta)h(\zeta)\,|d\zeta|\ (=p_h), \quad \dot T^* h = \zeta h(\zeta) - \Theta(\zeta)p_h \ (h \in \dot{\mathfrak{H}}),$$

$$\dot G^*\varphi^+ = [I - \Theta(\zeta)\Theta^*(0)]\varphi^+, \quad \dot S^*\varphi^+ = \Theta^*(0)\varphi^+ \quad (\varphi^+ \in \mathfrak{N}^+).$$

Если $\Theta(z)$ — матрица рассеяния системы α, то $\Theta^{\sim}(z)\,(=\Theta^*(\bar z))$ — матрица рассеяния системы α^*. Следовательно, $\dot\alpha^*$ — модель простой консервативной системы, у которой матрица рассеяния $\Theta^{\sim}(z)$ — $*$-внутренняя функция.

3. ТЕОРЕМА 1. *Пусть α — простая пассивная система рассеяния с двусторонне внутренней функцией $\Theta_\alpha(z)$. Тогда α — консервативная система.*

Доказательство. Пусть пассивной системе α отвечает сжатие $V(\in[\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^-,\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^+])$ с блоками-коэффициентами T, F, G, S системы α. Рассмотрим

$$\mathring{\mathfrak{N}}^- = \overline{(I-VV^*)(\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^+)}\,(=\mathfrak{D}_{V^*}),\quad \mathring{\mathfrak{N}}^+ = \overline{(I-V^*V)(\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^-)}\,(=\mathfrak{D}_V),$$

$$\mathfrak{D}_{V^*} = (I-VV^*)^{1/2},\quad \mathfrak{D}_V = (I-V^*V)^{1/2},$$

$$\tilde V = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_{V^*} & V \\ -V^* & \mathfrak{D}_V \end{pmatrix} \in [\mathring{\mathfrak{N}}^- \oplus (\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^-),\ (\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^+)\oplus\mathring{\mathfrak{N}}^+];$$

$$\tilde{\mathfrak{N}}^- = \mathring{\mathfrak{N}}^- \oplus \mathfrak{N}^-,\quad \tilde{\mathfrak{N}}^+ = \mathfrak{N}^+ \oplus \mathring{\mathfrak{N}}^+,$$

$\tilde\alpha$ — система с внешними пространствами $\tilde{\mathfrak{N}}^-$ и $\tilde{\mathfrak{N}}^+$, внутренним пространством $\mathfrak{H}$ и коэффициентами $\tilde T$, $\tilde F$, $\tilde G$, $\tilde S$ — блоками оператора $\tilde V$. Легко видеть, что $\tilde\alpha$ — консервативная система и α — ее часть в том смысле, что

$$F = \tilde F|\mathfrak{N}^-,\qquad T=\tilde T,\qquad G = P_{\mathfrak{N}^+}\tilde G,\qquad S = P_{\mathfrak{N}^+}\tilde S|\mathfrak{N}^- \tag{3}$$

Матрица рассеяния $\Theta_\alpha(z)$ представима в виде блока матрицы $\Theta_{\tilde\alpha}(z)$: $\Theta_\alpha(z) = P_{\mathfrak{N}^+}\Theta_{\tilde\alpha}(z)|\mathfrak{N}^-$. Пусть $\Theta_\alpha(z)$ — двусторонне внутренняя функция. Так как при этом $\Theta_\alpha(\zeta)$ принимает унитарные значения при $|\zeta|=1$ (n.b.), а $\|\Theta_{\tilde\alpha}(\zeta)\|\leqslant 1$, то

$$\Theta_\alpha(\zeta) = \Theta_{\tilde\alpha}(\zeta)|\mathfrak{N}^-,\qquad \Theta_\alpha^*(\zeta) = \Theta_{\tilde\alpha}^*(\zeta)|\mathfrak{N}^+\quad \text{(n.b.)}$$

Эти равенства равносильны следующим:

$$S = \tilde S|\mathfrak{N}^-,\qquad GT^nF = \tilde G\tilde T^n\tilde F|\mathfrak{N}^-\qquad (n\geqslant 0);$$

$$S^* = \tilde S^*|\mathfrak{N}^+,\quad F^*(T^*)^nG^* = \tilde F^*(\tilde T^*)^n\tilde G^*|\mathfrak{N}^+\quad (n\geqslant 0).$$

Так как

$$\tilde T = T,\ \tilde S = \begin{pmatrix} P_{\mathfrak{N}^+}\mathscr{D}_{V^*} & S \\ -V^* & \mathscr{D}_V \end{pmatrix}\Bigg|\,\mathfrak{D}_{V^*}\oplus\mathfrak{N}^-,\quad \tilde G = \begin{pmatrix} G \\ \mathscr{D}_V|\mathfrak{H} \end{pmatrix},\ \tilde F = \left(P_{\mathfrak{H}}\mathscr{D}_{V^*}\Big|\mathfrak{D}_{V^*},\ F\right),$$

то получаем:

$$\mathscr{D}_V^2 \,|\, \mathfrak{N}^- = 0,\ \mathscr{D}_V^2 T^n F = 0;\ \mathscr{D}_{V^*}^2 | \mathfrak{N}^+ = 0,\ \mathscr{D}_{V^*}^2 (T^*)^n G^* = 0 \quad (n \geqslant 0).$$

Надо же доказать, что α — консервативная система, т.е. что $\mathscr{D}_{V^*}^2 = 0$, $\mathscr{D}_V^2 = 0$. Так как по условию α-простая система и для $\mathscr{D}_{V^*}^2(\geqslant 0)$ и $\mathscr{D}_V^2(\geqslant 0)$ уже имеем

$$\mathscr{D}_V^2 \,|\, \mathfrak{N}^- \oplus \mathfrak{H}_\alpha^y = 0, \qquad \mathscr{D}_{V^*}^2 \,|\, \mathfrak{N}^+ \oplus \mathfrak{H}_\alpha^H = 0,$$

то осталось показать, что

$$P_{\mathfrak{H}} \mathscr{D}_V^2 \,|\, \mathfrak{H}_\alpha^H = 0,\ P_{\mathfrak{H}} \mathscr{D}_{V^*}^2 \,|\, \mathfrak{H}_\alpha^y = 0.$$

Докажем первое равенство, второе доказывается аналогично.
Так как

$$\mathscr{D}_V^2 \,|\, \mathfrak{N}^- = \begin{pmatrix} -T^*F - G^*S \\ I - F^*F - S^*S \end{pmatrix} = 0, \quad \mathscr{D}_{V^*}^2 \,|\, \mathfrak{N}^+ = \begin{pmatrix} -TG^* - FS^* \\ I - GG^* - SS^* \end{pmatrix} = 0,$$

$$\mathscr{D}_{V^*}^2 (T^*)^n G^* = (I - TT^* - FF^*)(T^*)^n G^* = 0 \quad (n \geqslant 0),$$

то имеем:

$$T^*F = -G^*S,\ TG^* = -FS^*,\ GG^* = I - SS^*,\ (TT^*)(T^*)^n G^* = (I - FF^*)(T^*)^n G^*.$$

Поэтому

$$P_{\mathfrak{H}} \mathscr{D}_V^2 G^* = (I - T^*T - G^*G)G^* = G^* - T^*(TG^*) - G^*(GG^*) =$$
$$= G^* - T^*(-FS^*) - G^*(I - SS^*) = (T^*F)S^* + (G^*S)S^* =$$
$$= (-G^*S)\,S^* + (G^*S)S^* = 0,$$
$$P_{\mathfrak{H}} \mathscr{D}_V^2 (T^*)^n G^* = (I - T^*T - G^*G)(T^*)^n G^* = (T^*)^n G^* - T^*(TT^*)(T^*)^{n-1} G^* -$$
$$- G^*(GT^*)(T^*)^{n-1} G^* = (T^*)^n G^* - T^*(I - FF^*)(T^*)^{n-1} G^* -$$
$$- G^*(-SF^*)(T^*)^{n-1} G^* = (T^*F)F^*(T^*)^{n-1} G^* + (G^*S)F^*(T^*)^{n-1} G^* = 0.$$

Следовательно, $P_{\mathfrak{H}} \mathscr{D}_V^2 \,|\, \mathfrak{H}_\alpha^H = 0$. Таким образом $\mathscr{D}_V^2 = 0$, $\mathscr{D}_{V^*}^2 = 0$, т.е. V—унитарный оператор. Теорема доказана.

Простую пассивную *ЛСДС* рассеяния α назовем с и с т е м о й б е з п о т е р ь, если α — консервативная система с основным оператором T класса C_{00}; в противном случае α называется системой с потерями. Как видим, для того, чтобы простая пассивная *ЛСДС* рассеяния α была системой без потерь, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица рассеяния $\Theta_\alpha(z)$ была двусторонне внутренней функцией.

4. Выясним теперь, каковы характеристические свойства матриц рассеяния диссипативных систем с основными операторами классов $C_{0\cdot}$, $C_{\cdot 0}$ и C_{00}.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для того, чтобы $\Theta(z)$ была матрицей рассеяния некоторой пассивной системы с основным оператором класса $C_{0\cdot}$ ($C_{\cdot 0}$, C_{00}), необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде блока*

$$\Theta(z) = P_{\mathfrak{N}^+}\tilde{\Theta}(z)|\mathfrak{N}^-$$

некоторой внутренней (*-внутренней, двусторонне внутренней) *функций $\tilde{\Theta}(z)$.*

Доказательство. Пусть α-пассивная система рассеяния с основным оператором T класса $C_{0\cdot}$($C_{\cdot 0}$, C_{00}). Представим α в виде части консервативной системы $\tilde{\alpha}$ так, как это было сделано при доказательстве теоремы. Так как основной оператор $\tilde{T}(=T)$ системы $\tilde{\alpha}$ принадлежит классу $C_{0\cdot}$($C_{\cdot 0}$, C_{00}), то $\Theta_{\tilde{\alpha}}(z)$ — внутренняя (*-внутренняя, двусторонне внутренняя) функция. Матрица $\Theta_\alpha(z)$ является блоком матрицы $\Theta_{\tilde\alpha}(z)$. Необходимость доказана.

Пусть теперь $\Theta(z)$ представима в виде блока некоторой внутренней (*-внутренней, двусторонне внутренней) функции $\tilde{\Theta}(z)$. Рассмотрим простую консервативную систему $\tilde{\alpha}$ с матрицей рассеяния $\tilde{\Theta}(z)$. Ее основной оператор $\tilde{T}$ принадлежит классу $C_{0\cdot}$($C_{\cdot 0}$, C_{00}). Пусть $\Theta(z)$ принимает значения из $[\mathfrak{N}^-,\mathfrak{N}^+]$. Рассмотрим систему α с внешними пространствами $\mathfrak{N}^-$ и $\mathfrak{N}^+$, являющуюся частью системы $\tilde{\alpha}$ в указанном ранее смысле. У нее основной оператор $T(=\tilde{T})$ принадлежит классу $C_{0\cdot}$($C_{\cdot 0}$, C_{00}), $\Theta_\alpha(z) = \Theta(z)$. Предложение доказано.

Пусть $\Theta(z)$ — блок внутренней функции $\tilde{\Theta}(z)$. Можно считать, что

$$\tilde{\Theta}(z) = \begin{pmatrix} \Theta_{11}(z) & \Theta_{12}(z) \\ \Theta_{21}(z) & \Theta_{22}(z) \end{pmatrix}, \quad \Theta_{12}(z) = \Theta(z).$$

Тогда функция $\Theta_{22}(z)$ является решением факторизационной задачи:

$$\Theta_{22}^*(\zeta)\Theta_{22}(\zeta) = I - \Theta^*(\zeta)\Theta(\zeta) \quad (|\zeta| = 1, \text{n.b.}), \quad \Theta_{22}(z) \in B. \tag{4}$$

Обратно, если $\Theta_{22}(z)$ — произвольное решение этой задачи, то $\tilde{\Theta}(z) = \begin{pmatrix} \Theta(z) \\ \Theta_{22}(z) \end{pmatrix}$ — внутренняя функция с заданным блоком $\Theta(z)$. Точно так же $\Theta(z)$ является блоком $*$-внутренней функции тогда и только тогда, когда для нее разрешима факторизационная задача:

$$\Theta_{11}(\zeta)\Theta_{11}^*(\zeta) = I - \Theta(\zeta)\Theta^*(\zeta), \quad (|\zeta| = 1, \text{n.b.}), \quad \Theta_{11}(z) \in B. \tag{5}$$

Итак, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Функция $\Theta(z)$ тогда и только тогда является матрицей рассеяния некоторой пассивной системы с основным оператором класса $C_0.(C._0)$, когда для нее разрешима факторизационная задача* (4) ((5)).

Известны [15] необходимые и достаточные условия разрешимости факторизационной задачи

$$h^*(\zeta)\,h(\zeta) = f(\zeta) \quad (|\zeta| = 1, \text{n.b.}), \quad h(z) \in B$$

для неотрицательнозначной функции $f(\zeta)$ ($\leq I$), принимающей значения из $[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$: достаточным является условие Девинатца: $\ln\|f^{-1}(\zeta)\| \in L^1$. В случае, когда эта задача разрешима, множество ее решений описывается формулой

$$h(z) = b(z)\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — внешняя функция со значениями из $[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_\varphi]$ ($\varphi(z) \in B$, $\overline{\varphi(\zeta)H_+^2(\mathfrak{N})} = H_+^2(\mathfrak{N}_\varphi)$), а $b(z)$ — произвольная внутренняя функция со значениями из $[\mathfrak{N}_\varphi, \mathfrak{N}_*]$, $\mathfrak{N}_*$ — произвольное гильбертово пространство, имеющее $\dim \mathfrak{N}_* \geq \dim \mathfrak{N}_\varphi$, $\mathfrak{N}_\varphi \subset \mathfrak{N}$. При нормировке $\varphi(0)|\mathfrak{N}_\varphi > 0$ функция $\varphi(z)$ однозначно определяется по $f(\zeta)$. Размерность пространства $\mathfrak{N}_\varphi$ определяется равенством

$$\dim \mathfrak{N}_\varphi = \operatorname{rang} f(\zeta) \quad (|\zeta| = 1, \text{n. b}),$$

так что в случае, когда факторизационная задача разрешима, $\operatorname{rang} f(\zeta)$ $(=\dim f(\zeta)\mathfrak{N})$ постоянен (n.b., $|\zeta| = 1$).

Таким образом решения задач (4) и (5) записываются в виде

$$\Theta_{11}(z) = \varphi_1(z)b_1(z), \quad \Theta_{22}(z) = b_2(z)\varphi_2(z), \tag{6}$$

где $b_2(z)$ и $\varphi_2(z)$ — внутренняя и внешняя функции со значениями из $[\mathfrak{N}_{\varphi_2}, \mathring{\mathfrak{N}}^+]$ и $[\mathfrak{N}^-, \mathfrak{N}_{\varphi_2}]$, а $b_1(z)$ и $\varphi_1(z)$ — $*$-внутренняя и $*$-внешняя ($\tilde{\varphi_1}(z) = \varphi^*(\bar{z})$ — внешняя) функции со значениями из $[\mathring{\mathfrak{N}}^-, [\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1}]$ и $\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1}, \mathfrak{N}^+]$,

$$\dim \mathring{\mathfrak{N}}^- \geq \operatorname{rang}[I - \Theta(\zeta)\Theta^*(\zeta)], \ \dim \mathring{\mathfrak{N}}^+ \geq \operatorname{rang}[I - \Theta^*(\zeta)\Theta(\zeta)] \ (\ |\zeta| = 1) \tag{7}$$

Функции $b_1(z)$ и $b_2(z)$ являются здесь двусторонне внутренними тогда и только тогда, когда

$$\overline{\Theta_{22}(\zeta)L^2(\mathfrak{N}^-)} = L^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+), \quad \overline{\Theta_{11}^*(\zeta)L^2(\mathfrak{N}^+)} = L^2(\mathring{\mathfrak{N}}^-). \tag{8}$$

При выполнении этих условий имеем в (7) вместо знаком „$\geqslant$" знаки „$=$":

(9) $\dim \mathring{\mathfrak{N}}^- = \operatorname{rang}[I-\Theta(\zeta)\Theta^+(\zeta)]$, $\dim \mathring{\mathfrak{N}}^+ = \operatorname{rang}[I-\Theta^*(\zeta)\Theta(\zeta)]$ ($|\zeta|=1$, n.b.)

Если правые части здесь конечны, то условия (9) и (8) равносильны.

5. Укажем необходимое и достаточное условие для того, чтобы $\Theta(z)$ была представлена в виде блока $\Theta_{12}(z)$ двусторонне внутренней функции $\widetilde{\Theta}(z) = [\Theta_{ik}(z)]_1^2$, удовлетворяющей условию (8), и опишем все $\widetilde{\Theta}(z)$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — $*$-внешняя и внешняя функции, являющиеся решениями факторизационных задач* (5) *и* (4):

$$\varphi_1(\zeta)\,\varphi_1^*(\zeta) = I-\Theta(\zeta)\,\Theta^*(\zeta);\; \varphi_2^*(\zeta)\,\varphi_2(\zeta) = I-\Theta^*(\zeta)\,\Theta(\zeta)\;(\text{n.b.}) \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(z)\in B,\; \varphi_1^*(0)|\,\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1} > 0;\; \varphi_2(z)\in B,\; \varphi_2(0)|\,\mathfrak{N}_{\varphi_2} > 0, \\ \overline{\varphi_1^*(\zeta)H_+^2(\mathfrak{N}^+)} = H_+^2(\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1});\; \overline{\varphi_2(\zeta)\,H_+^2(\mathfrak{N}^-)} = H_+^2(\mathfrak{N}_{\varphi_2}) \end{pmatrix}$$

Тогда равенством

$$h_0^*(\zeta)\,\varphi_2(\zeta) = -\varphi_1^*(\zeta)\,\Theta(\zeta) \tag{11}$$

определяется сжимающая функция $h_0(\zeta)$ со значениями из $[\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1}, \mathfrak{N}_{\varphi_2}]$ (слабо измеримая, $\|h_0\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\|h_0(\zeta)\| \leqslant 1$). *Пусть $b_1(\zeta)$ и $b_2(\zeta)$ — двусторонне внутренние функции со значениямн из* $[\mathring{\mathfrak{N}}^-, \mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1}]$ *и* $[\mathfrak{N}_{\varphi_2}, \mathring{\mathfrak{N}}^+]$ *такие, что*

$$\Theta_{21}(\zeta) = b_2(\zeta)\,h_0(\zeta)\,b_1(\zeta) \tag{12}$$

является граничным значением некоторой функции $\Theta_{21}(z)$ класса B. Положим $\Theta_{21}(z) = \Theta(z)$ и определим $\Theta_{11}(z)$ и $\Theta_{22}(z)$ по формулам (6). *Тогда $\tilde{\Theta}(z) = (\Theta_{ik}(z))^2$, двусторонне внутренняя функция с заданным блоком $\Theta_{12}(z) = \Theta(z)$, удовлетворяющая условию* (8). *Так получаются все $\widetilde{\Theta}(z)$ с указанными свойствами.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\Theta}(z) = (\Theta_{ik})(z))_1^2$ — двусторонне внутренняя функция с заданным блоком $\Theta_{12}(z) = \Theta(z)$, удовлетворяющая условию (8). Тогда $\Theta_{11}(z)$ и $\Theta_{22}(z)$ — решения факторизационных задач (5) и (4), удовлетворяющие условию (8). Поэтому они представимы в виде (6), где $b_1(z)$ и $b_2(z)$ двусторонне внутренние функции, а $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — $*$-внешняя и внешняя функции, являющиеся решением задач (10). Из унитарности граничных значений $\widetilde{\Theta}(\zeta) = [\Theta_{ik}(\zeta)]_1^2$ следует:

$$\Theta_{11}^*(\zeta)\,\Theta_{12}(\zeta) + \Theta_{21}^*(\zeta)\,\Theta_{22}(\zeta) = 0;\; \Theta_{21}^*(\zeta)\,b_2(\zeta)\,\varphi_2(\zeta) = -b_1^*(\zeta)\,\varphi_1^*(\zeta)\,\Theta(\zeta).$$

Получаем, что сжимающая функция

$$h_0(\zeta) = b_2^*(\zeta)\,\Theta_{21}(\zeta)\,b_1^*(\zeta)$$

удовлетворяет соотношению (11); $\Theta_{21}(\zeta)$ выражается через $h_0(\zeta)$ по формуле (12).

Покажем теперь, что если $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — решения задач (10), то соотношением (11) однозначно определяется некоторая функция $h_0(\zeta)$ со значениями из $[\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1}, \mathfrak{N}_{\varphi_2}]$. Равенством

$$K\varphi_2(\zeta)\,g(\zeta) = -\varphi_1^*(\zeta)\,\Theta(\zeta)\,g(\zeta) \quad (g(\zeta) \in L^2(\mathfrak{N}^-))$$

определяется на плотном линеале $\varphi_2(\zeta)\,L^2(\mathfrak{N}^-)$ в $L^2(\mathfrak{N}_{\varphi_2})$ сжимающий оператор K, отображающий этот линеал в $L^2(\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1})$. Это следует из неравенства

$$\|\varphi_1^*(\zeta)\,\Theta(\zeta)\,g(\zeta)\|^2_{\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1}} \leqslant \|\varphi_2(\zeta)\,g(\zeta)\|^2_{\mathfrak{N}_{\varphi_2}},$$

которое легко проверяется.

Доопределим K по непрерывности на всем пространстве $L^2(\mathfrak{N})_{\varphi_2}$. В итоге получим сжатие $K(\in[L^2(\mathfrak{N}_{\varphi_2}),\ L^2(\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1})])$, обладающее свойствами: $K\dot{U}_2 = \dot{U}_1 K$, где $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ — операторы умножения на ζ в $L^2(\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1})$ и $L^2(\mathfrak{N}_{\varphi_2})$. Поэтому K — оператор „умножения" на некоторую сжимающую функцию $K(\zeta)$ со значениями из $[\mathfrak{N}_{\varphi_2}, \mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_1}]$ (см. [13], гл. v, доказательство леммы 3.1). Остается положить $h_0(\zeta) = K^*(\zeta)$ и заметить, что $K(\zeta)$ определяется по K однозначно.

Для функции $h_0(\zeta)$, определенной соотношением (11), справедливы равенства:

$$h_0(\zeta)\varphi_1^*(\zeta) = -\varphi_2(\zeta)\,\Theta^*(\zeta),$$

(13)

$$\varphi_1^*(\zeta)\varphi_1(\zeta) + h_0^*(\zeta)h_0(\zeta) = I, \quad \varphi_2(\zeta)\varphi_2^*(\zeta) + h_0(\zeta)h_0^*(\zeta) = I.$$

Так как $\varphi_1^*(\bar{z})$ и $\varphi_2(z)$ — внешние функции, для их доказательства достаточно проверить, что

$$\varphi_2^*(\zeta)[\varphi_2(\zeta)\Theta^*(\zeta) + h_0(\zeta)\varphi_1^*(\zeta)] = 0,$$
$$\varphi_2^*(\zeta)[\varphi_2(\zeta)\varphi_2^*(\zeta) + h_0(\zeta)h_0^*(\zeta) - I] = 0,$$
$$\varphi_1(\zeta)[\varphi_1^*(\zeta)\varphi_1(\zeta) + h_0^*(\zeta)h_0(\zeta) - I] = 0.$$

Эти равенства вытекают из соотношений (10) — (11).

Равенства (10), (11) и (13) означают, что функция $\tilde{\Theta}_2(\zeta)$, определенная по формуле

$$\tilde{\Theta}_0(\zeta) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\zeta) & \Theta(\zeta) \\ h_0(\zeta) & \varphi_2(\zeta) \end{pmatrix} (=[\Theta^0_{ik}(\zeta)]_1^2)$$

принимаем унитарные значения (n.b. $|\zeta| = 1$).

Пусть теперь для функций $h_0(\zeta)$ существуют двусторонне внутренние функции $b_1(z)$ и $b_2(z)$ такие, что определенная по формуле (12) функция

$\Theta_{21}(\zeta)$ является граничным значением некоторой функции $\Theta_{21}(z)$ класса B. Положим $\Theta_{12}(z)=\Theta(z)$, определим $\Theta_{11}(z)$ и $\Theta_{22}(z)$ по формулам (6) и проверим, что полученная в итоге функция $\tilde{\Theta}(z)=[\Theta_{ik}(z)]_1^2$ является двусторонне внутренней. Так как $\Theta_{ik}(z)\in B$, то $\tilde{\Theta}(z)$ — ограниченная голоморфная в единичном круге функция. поэтому $\tilde{\Theta}(z)\in B$, если только $\|\tilde{\Theta}(\zeta)\|\leqslant 1$. Но

$$\tilde{\Theta}(\zeta)=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & b_2(\zeta)\end{pmatrix}\tilde{\Theta}_0(\zeta)\begin{pmatrix} b_1(\zeta) & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}$$

и потому $\tilde{\Theta}(\zeta)$ принимает унитарные значения ($|\zeta|=1$, n.b.). Следовательно, $\tilde{\Theta}(z)$ — двусторонне внутренняя функция. Она удовлетворяет условию (8). Теорема доказана.

§ 2. СИНТЕЗ МИНИМАЛЬНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ РАССЕЯНИЯ С ОСНОВНЫМ ОПЕРАТОРОМ КЛАССА C_{00}.

1. Пусть $\Theta(z)$ представима в виде блока $\Theta_{12}(z)$ некоторой двусторонне внутренней функции $\tilde{\Theta}(z)=[\Theta_{ik}(z)]_1^2$. Пусть $\Theta(z)$ и $\tilde{\Theta}(z)$ принимают значения соответственно из $[\mathfrak{N}^-,\mathfrak{N}^+]$ и $[\tilde{\mathfrak{N}}^-,\tilde{\mathfrak{N}}^+]$, $\tilde{\mathfrak{N}}^\pm=\mathfrak{N}^\pm\oplus\mathring{\mathfrak{N}}^\pm$. Рассмотрим простую консервативную систему $\tilde{\alpha}$ с матрицей рассеяния $\tilde{\Theta}(z)$ и ее часть α с матрицей рассеяния $\Theta(z)$. Основной оператор $T(=\tilde{T})$ системы α принадлежит классу C_{00}. Система $\tilde{\alpha}$ унитарно подобна своей модели $\dot{\tilde{\alpha}}$, которая строится по $\tilde{\Theta}(z)$ так, как указано в предложении 2. Часть $\dot{\alpha}$ системы $\dot{\tilde{\alpha}}$ с тем же внутренним пространством, что и у $\dot{\tilde{\alpha}}$, и с внешними пространствами $\mathfrak{N}^-$ и $\mathfrak{N}^+$ является моделью системы α. Внутреннее пространство $\dot{\mathfrak{H}}(=\dot{\tilde{\mathfrak{H}}})$ и коэффициенты $\dot{T}$, $\dot{F}$, $\dot{G}$, $\dot{S}$ системы $\dot{\alpha}$ определяются по формулам:

$$\dot{\mathfrak{H}}=H_+^2(\tilde{\mathfrak{N}}^+)\ominus\tilde{\Theta}(\zeta)H_+^2(\tilde{\mathfrak{N}}^-),$$

$$\dot{T}h=\zeta^{-1}[h(\zeta)-h(0)],\quad \dot{G}h=h_1(0)$$

$$(h=h(\zeta)=h_1(\zeta)\oplus h_2(\zeta)\in\dot{\mathfrak{H}},\ h_1(\zeta)\in H_+^2(\mathfrak{N}^+),\ h_2(\zeta)\in H_+^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+)),$$

$$\dot{F}\varphi^-=\zeta^{-1}[\tilde{\Theta}(\zeta)-\tilde{\Theta}(0)]\varphi^-,\quad \dot{S}\varphi^-=\Theta(0)\varphi^-\quad(\varphi^-\in\mathfrak{N}^-).$$

Для коэффициентов сопряженной системы $\dot{\alpha}^*$ имеем :

$$\dot{F}^*h=p_{\mathfrak{N}^+}p_h,\quad \dot{T}^*h=\zeta h(\zeta)-\tilde{\Theta}(\zeta)p_h\quad(h\in\dot{\mathfrak{H}}),$$

$$p_h=\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\zeta\tilde{\Theta}(\zeta)h(\zeta)|\,d\zeta|,$$

$$\dot{G}^*\varphi^+=[I-\tilde{\Theta}(\zeta)\tilde{\Theta}^*(0)]\varphi^+,\quad \dot{S}^*\varphi^+=\Theta^*(0)\varphi^+\quad(\varphi^+\in\mathfrak{N}^+).$$

Система $\alpha(\dot{\alpha})$ является консервативной тогда и только тогда, когда $\tilde{\Theta}(0)$ унитарно отображает $\mathring{\mathfrak{N}}^-$ на $\mathring{\mathfrak{N}}^+$, а это имеет место в том и только в том случае, когда $\Theta_{11}(z) \equiv 0$, $\Theta_{22}(z) \equiv 0$, $\Theta_{21}(z) \equiv \Theta_{21}(0)$, $\Theta_{21}(0)$ — унитарный оператор, $\Theta_{12}(z) = \Theta(z)$ — двусторонне внутренняя функция. Этот случай здесь не представляет интереса и его в дальнейшем исключим из рассмотрения. Итак $\dot{\alpha}$ — модель диссипативной системы с основным оператором $\dot{T}$ класса C_{00}, построенная в виде части консервативной системы с этим основным оператором.

Представление $\Theta(z)$ в виде блока $\Theta_{12}(z)$ двусторонне внутренней функции $\tilde{\Theta}(z) = [\Theta_{ik}(z)]_1^2$, назовем $\mathscr{D}$ -представлением.

2. Нас будет интересовать вопрос, при каких $\tilde{\Theta}(z)$ построенная с помощью $\mathscr{D}$ -представления диссипативная система $\alpha(\dot{\alpha})$ является м и н и м а л ь н о й, т.е. одновременно у п р а в л я е м о й ($\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\alpha^y$) и н а б л ю д а е м о й ($\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\alpha^H$).

Назовем $\mathscr{D}$-представление м и н и м а л ь н ы м, если $\tilde{\Theta}(z)$ не имеет нетривиальных двусторонне внутренних левых и правых делителей в классе B соответственно вида $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & u(z) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} v(z) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, т.е. если $\tilde{\Theta}(z)$ не представима в виде

$$\tilde{\Theta}(z) = \begin{pmatrix} I|\mathfrak{N}^+ & 0 \\ 0 & u(z) \end{pmatrix} \mathring{\tilde{\Theta}}(z) \begin{pmatrix} v(z) & 0 \\ 0 & I|\mathfrak{N}^- \end{pmatrix},$$

где $\mathring{\tilde{\Theta}}(z) \in B$, $u(z)$ и $v(z)$ — двусторонне внутренние функции и хотя бы одна из них не постоянная.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\Theta(z)$ имеет $\mathscr{D}$ -представление, определяемое функцией $\tilde{\Theta}(z)$ и α- диссипативная система, построенная по системе без потерь $\tilde{\alpha}$ с матрицей рассеяния $\tilde{\Theta}(z)$ как ее часть* (по формулам (3)). *Система α с матрицей рассеяния $\Theta(z)$ является минимальной тогда и только тогда, когда рассматриваемое $\mathscr{D}$-представление минимально.*

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_\alpha^y$ — наибольшее среди подпространств $\mathfrak{D}_*$ таких, что $F^*\mathfrak{D}_* = \{0\}$, $T^*\mathfrak{D}_* \subset \mathfrak{D}_*$, а $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_\alpha^H$ — наибольшее среди таких $\mathfrak{D}$, что $G\mathfrak{D} = \{0\}$, $T\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$. Следовательно, α — минимальная система в том и только том случае, когда нет ненулевых подпространств $\mathfrak{D}_*$ и $\mathfrak{D}$ с указанными свойствами.

Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\alpha^H$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\Theta}(z)$ не имеет нетривиального левого двусторонне внутреннего делителя вида $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & u(z) \end{pmatrix}$. Пусть такой делитель существует. Рассмотрим в $H_+^2(\tilde{\mathfrak{N}}^+)$ подпространство $\dot{\mathfrak{D}}$, состоящее из тех $h(\zeta) = h_1(\zeta) \oplus h_2(\zeta)$, у которых $h_1(\zeta) = 0$ и $h_2(\zeta) \in H_+^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+) \ominus$ $\ominus\, u(\zeta) H_+^2(\mathfrak{N})$. Очевидно, что $\dot{\mathfrak{D}} \neq \{0\}$, $\dot{\mathfrak{D}} \subset \dot{\mathfrak{H}}$, $\dot{G}\dot{\mathfrak{D}} = \{0\}$, $\dot{T}\dot{\mathfrak{D}} \subset \dot{\mathfrak{D}}$. Поэтому $\dot{\mathfrak{H}} \neq \mathfrak{H}_{\dot{\alpha}}^H$ и, следовательно, $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{H}_\alpha^H$.

Пусть теперь известно, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{H}_\alpha^H$, т.е. $\dot{\mathfrak{H}} \neq \dot{\mathfrak{H}}_\alpha^H$. Рассмотрим $\dot{\mathfrak{D}} = \dot{\mathfrak{H}} \ominus \dot{\mathfrak{H}}_\alpha^H$. Из формул, определяющих $\dot{T}$ и $\dot{G}$, видно, что $\dot{\mathfrak{D}}$—подпространство тех $h(\zeta)(= h_1(\zeta) \oplus h_2(\zeta))$ из $\dot{\mathfrak{H}}$, у которых $h_1(\zeta) = 0$. Следовательно, можно сказать, что $\dot{\mathfrak{D}} \subset H_+^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+)$ (отождествляя $0 \oplus h_2(\zeta)$ с $h_2(\zeta)$). Подпространство $\dot{\mathfrak{D}}$ инвариантно относительно оператора $\dot{T}$. Поэтому $H_+^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+) \ominus \dot{\mathfrak{D}}$— подпространство, инвариантное относительно оператора умножения на ζ. Следовательно, существует внутренняя функция $u(z)$ со значениями из $[\mathfrak{N}, \mathring{\mathfrak{N}}^+]$ $(\mathfrak{N} \subset \mathring{\mathfrak{N}}^+)$ такая, что

$$H_+^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+) \ominus \dot{\mathfrak{D}} = u(\zeta) H_+^2(\mathfrak{N}), \quad \dot{\mathfrak{D}} = H_+^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+) \ominus u(\zeta) H_+^2(\mathfrak{N}).$$

Покажем, что $u(z)$ — двусторонне внутренняя функция.
Действительно, так как

$$(\dot{\mathfrak{D}} =) H_+^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+) \ominus u(\zeta) H_+^2(\mathfrak{N}) \subset H_+^2(\tilde{\mathfrak{N}}^+) \ominus \tilde{\Theta}(\zeta) H_+^2(\tilde{\mathfrak{N}}^-)(= \dot{\mathfrak{H}}),$$

то получаем одно за другим включения:

$$\tilde{\Theta}(\zeta) H_+^2(\tilde{\mathfrak{N}}^-) \subset H_+^2(\mathfrak{N}^+) \oplus u(\zeta) H_+^2(\mathfrak{N}),$$

(16)

$$\tilde{\Theta}(\zeta) L^2(\tilde{\mathfrak{N}}^-) \subset L^2(\mathfrak{N}^+) \oplus u(\zeta) L^2(\mathfrak{N}).$$

С другой стороны, $\tilde{\Theta}(\zeta)$ принимает унитарные значения и потому:

$$\tilde{\Theta}(\zeta) L^2(\tilde{\mathfrak{N}}^-) = L^2(\tilde{\mathfrak{N}}^+) = L^2(\mathfrak{N}^+) \oplus L^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+) = L^2(\mathfrak{N}^+) \oplus u(\zeta) L^2(\mathfrak{N}).$$

Получаем, то $u(\zeta) L^2(\mathfrak{N}) = L^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+)$, а это возможно для внутренней функции $u(z)$ лишь когда она является двусторонне внутренней функцией. Рассмотрим теперь

$$\mathring{\tilde{\Theta}}(\zeta) = \begin{pmatrix} I|\, \mathfrak{N}^+ & 0 \\ 0 & u^*(\zeta) \end{pmatrix} \tilde{\Theta}(\zeta).$$

Функция $\mathring{\tilde{\Theta}}(\zeta)$ принимает унитарные значения ($|\zeta| = 1$, n.b.) и, кроме того, в силу включения (16) для нее имеем:

$$\mathring{\tilde{\Theta}}(\zeta) H_+^2(\tilde{\mathfrak{N}}^-) \subset H_+^2(\mathfrak{N}^+ \oplus \mathfrak{N}).$$

Поэтому $\mathring{\tilde{\Theta}}(z)$ — двусторонне внутренняя функция. Получили представление $\tilde{\Theta}(z)$ в виде (15) с $v(z) = \mathrm{I}$ и $u(z)$—не постоянной двусторонне внутренней функцией. Следовательно, $\mathfrak{D}$- представление, определяемое $\tilde{\Theta}(z)$, не минимально.

Заметим теперь, что: 1) $\mathfrak{H}_\alpha^y = \mathfrak{H}_{\alpha^*}^H$, 2) α^* строится по $\tilde{\alpha}^*$ с матрицей рассеяния $\tilde{\Theta}^*(\bar{z})$ так же, как α строится по $\tilde{\alpha}$, 3) $\begin{bmatrix} v(z) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ является правым двусторонне внутренним делителем функции $\tilde{\Theta}(z)$ тогда и только тогда, когда $\begin{pmatrix} v^*(\bar{z}) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ является левым двусторонне внутренним делителем функции $\tilde{\Theta}^*(\bar{z})$. Поэтому из уже доказанного следует, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{H}_\alpha^\nu$ в том и только том случае, когда $\tilde{\Theta}(z)$ имеет нетривиальный правый двусторонне внутренний делитель вида $\begin{pmatrix} v(z) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Теорема доказана.

3. В теореме 2 дано описание $\mathfrak{D}$-представлений $\Theta(z)$, удовлетворяющих условию (8). В качестве „параметров" в нем рассматривалась упорядоченная пара $\{b_2(z), b_1(z)\}$ двусторонне внутренних функций, при которых $b_2(\zeta)h_0(\zeta)b_1(\zeta)$ — граничное значение функций класса B. Назовем эту пару *знаменателем* функции $h_0(\zeta)$. Введем естественным образом понятие делимости знаменателей функции $h_0(\zeta)$: $\{b_2(z), b_1(z)\}$ делится на $\{\mathring{b}_2(z), \mathring{b}_1(z)\}$, если $b_2(z) = u(z)\mathring{b}_2(z)$ и $b_1(z) = \mathring{b}_1(z)v(z)$, где $u(z)$ и $v(z)$ — двусторонне внутренние функции. Знаменатель $\{b_2(z), b_1(z)\}$ назовем *минимальным*, если он не имеет нетривиального делителя.

Предложение 5. *$\mathfrak{D}$-представление функции $\Theta(z)$, удовлетворяющее условию* (8), *является минимальным тогда и только тогда, когда соответствующий ему знаменатель $\{b_2(z), b_1(z)\}$ функции $h_0(\zeta)$ является минимальным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}$-представлению $\Theta(z)$ с двусторонне внутренней функцией $\tilde{\Theta}(z)$, удовлетворяющей условию (8), отвечает знаменатель $\{b_2(z), b_1(z)\}$ функции $h_0(\zeta)$. Пусть это $\mathfrak{D}$-представление не минимально, т.е. имеет место соотношение (15), где $u(z)$, $\mathring{\tilde{\Theta}}(z)$ и $v(z)$ — двусторонне внутренние функции, $u(z)$ или $v(z)$ не постоянная. Тогда функцией $\mathring{\tilde{\Theta}}(z)$ определяется $\mathscr{D}$-представление, удовлетворяющее условию (8). Пусть ей отвечает знаменатель $\{\mathring{b}_2(z), \mathring{b}_1(z)\}$ функции $h_0(\zeta)$. Из единственности представления $\tilde{\Theta}(\zeta)$ в виде (14) вытекает, что $b_2(z) = u(z)\mathring{b}_2(z)$, $b_1(z) = \mathring{b}_1(z)\ v(z)$, т.е. $\{\mathring{b}_2(z), \mathring{b}_1(z)\}$ — нетривиальный делитель знаменателя $\{b_2(z), b_1(z)\}$. Обратно, имея такой делитель, получим соотношение (15), в котором одна из двусторонне внутренних функций $u(z)$ и $v(z)$ не постоянная.

Предложение 6. *Для произвольного знаменателя $\{b_2(z), b_1(z)\}$ функции $h_0(\zeta)$ существует делитель $\{\mathring{b}_2(z), \mathring{b}_1(z)\}$, являющийся минимальным знаменателем этой функции.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{L}_1$ множество функций $h(\zeta)$ из $H_+^2(\mathfrak{N}_{\varphi_1^\sim})$, для которых $b_2(\zeta)h_0(\zeta)h(\zeta) \in H_+^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+)$. Так как $\mathfrak{L}_1$ — подпространство в $H_+^2(\mathfrak{N}_{\varphi_1^\sim})$, инвариантное относительно оператора умножения на ζ, то $\mathfrak{L}_1 = \mathring{b}_1(\zeta)H_+^2(\mathfrak{N}_1^-)$, где $\mathring{b}_1(z)$, — внутренняя функция со значениями из $[\mathfrak{N}_1^-, \mathfrak{N}_{\varphi_1^\sim}]$. Из включения $b_1(\zeta)H_+^2(\mathring{\mathfrak{N}}^-) \subset \mathring{b}_1(\zeta)H_+^2(\mathfrak{N}_1^-)$ следует, что $\mathring{b}_1(z)$ —

двусторонне внутренняя функция и $b_1(z) = \mathring{b}_1(z)v(z)$, где $v(z)$ — двусторонне внутренняя функция со значениями из $[\mathring{\mathfrak{N}}^-, \mathfrak{N}_1^-]$. Обозначим теперь через $\mathfrak{T}_2$ множество функций $h(\zeta)$ из $H_+^2(\mathfrak{N}_{\varphi_2})$, для которых $\mathring{b}_1^*(\bar{\zeta})h_0^*(\bar{\zeta}) \in H_+^2(\mathfrak{N}_1^-)$. Это подпространство в $H_+^2(\mathfrak{N}_{\varphi_2})$, инвариантное относительно оператора умножения на ζ. Поэтому $\mathfrak{T}_2 = \mathring{b}_2^*(\bar{\zeta})H_+^2(\mathfrak{N}_1^+)$, где $\mathring{b}_2^*(\bar{z})$ — внутренняя функция со значениями из $[\mathfrak{N}_1^+, \mathfrak{N}_{\varphi_2}]$. Используя включение $b_2^*(\bar{\zeta})H_+^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+) \subset \mathring{b}_2^*(\bar{\zeta})H_+^2(\mathfrak{N}_1^+)$, получаем, что $\mathring{b}_2(z)$ — двусторонне внутренняя функция и $b_2(z) = u(z)\mathring{b}_2(z)$, где $u(z)$ — двусторонне внутренняя функция со значениями из $[\mathfrak{N}_1^+, \mathring{\mathfrak{N}}^+]$. Так как $\mathring{b}_1^*(\bar{\zeta})h_0^*(\bar{\zeta})\mathring{b}_2^*(\bar{\zeta})H_+^2(\mathfrak{N}_1^+) \subset H_+^2(\mathfrak{N}_1^-)$, то $\{\mathring{b}_1^*(\bar{z}), \mathring{b}_2^*(\bar{z})\}$ — знаменатель функции $h_0^*(\bar{\zeta})$ и, следовательно, $\{\mathring{b}_2(z), \mathring{b}_1(z)\}$ — знаменатель функции $h_0(\zeta)$. Последний является делителем знаменателя $\{b_2(z), b_1(z)\}$. Остается убедиться в том, что $\{\mathring{b}_2(z), \mathring{b}_1(z)\}$ — минимальный знаменатель. Пусть $\{d_2(z), d_1(z)\}$ — его делитель. Тогда

$$d_1^*(\bar{\zeta})h_0^*(\bar{\zeta})\, d_2^*(\bar{\zeta})H_+^2(\mathfrak{N}_2^+) \subset H_2^+(\mathfrak{N}_2^-),\ \mathring{b}_1^*(\bar{\zeta})h_0^*(\bar{\zeta})d_2^*(\bar{\zeta})H_+^2(\mathfrak{N}_2^+) \subset H_+^2(\mathfrak{N}_1^-)$$

и потому

$$d_2^*(\bar{\zeta})H_+^2(\mathfrak{N}_2^+) \subset \mathring{b}_2^*(\bar{\zeta})H_+^2(\mathfrak{N}_1^+)\ (= \mathfrak{T}_2),\ \mathring{b}_2^*(\bar{\zeta})d_2^*(\bar{\zeta})H_+^2(\mathfrak{N}_2^+) \subset H_+^2(\mathfrak{N}_{\varphi_2}).$$

Из последнего включения вытекает, что $\mathring{b}_2(z)$ является правым делителем для $d_2(z)$, т.е. $d_2(z) = \mathring{u}(z)\mathring{b}_2(z)$, где $\mathring{u}(z)$ — двусторонне внутренняя функция. Так как, с другой стороны, $d_2(z)$ — правый делитель для $\mathring{b}_2(z)$, то получаем, что $\mathring{u}(z) = \mathring{u}$ — постоянная. Таким же образом из включений

$$b_2(\zeta)h_0(\zeta)d_1(\zeta)H_+^2(\mathfrak{N}_2^+) \subset H_+^2(\mathring{\mathfrak{N}}^+),\ d_1(\zeta)H_+^2(\mathfrak{N}_2^+) \subset \mathring{b}_1(\zeta)H_+^2(\mathfrak{N}_1^-)$$

вытекает, что $d_1(z) = \mathring{b}_1(z)\mathring{v}$, где $\mathring{v}$ — постоянная. Получили, что $\{\mathring{b}_2(z), \mathring{b}_1(z)\}$ — минимальный знаменатель функции $h_0(\zeta)$, являющийся делителем знаменателя $\{b_2(z), b_1(z)\}$. Предложение доказано.

§ 3. МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ КЛАССОВ $B\tilde{\Pi}$ и $B\Pi$

1. Остановимся теперь на следующем классе матриц рассеяния, для которых существуют $\mathscr{D}$-представления, удовлетворяющие условию (8).

Отнесем $\Theta(z)$ к классу $B\tilde{\Pi}$, если: 1) $\Theta(z) \in B$, 2) существуют $c(z)$ и $d(z)$ класса B такие, что $c(\zeta)\Theta^*(\zeta)$ и $\Theta^*(\zeta)d(\zeta)$ — граничные значения функций класса B, причем $\ker c(\zeta) = \{0\}$ и $\ker d^*(\zeta) = \{0\}$, $|\zeta| = 1$ n.b. (Через $\ker c$ обозначается ядро оператора c.)

Если

$$c^*(\bar{z}) = b_1(z)\varphi(z), \quad d(z) = b_2(z)\psi(z)$$

представление функций $c^*(\bar{z})$ и $d(z)$ в виде произведения внутренней функции на внешнюю, то $b_1^*(\bar{\zeta})\Theta^*(\zeta)$ и $\Theta^*(\zeta)b_2(\zeta)$—граничные значения функций класса B. Условие $\ker c(\zeta) = \{0\}$ и $\ker d^*(\zeta) = \{0\}$ (n.b.) означает, что $b_1(z)$ и $b_2(z)$ — двусторонние внутренние функции. Для $\Theta(z)$ ($\in B\tilde{\Pi}$) существуют двусторонние внутренние функции $b_\Pi(z)$ и $b_\Omega(z)$ такие, что:
1) $b_\Pi(\zeta)\,\Theta^*(\zeta)$ и $\Theta^*(\zeta)\,b_\Omega(\zeta)$ — граничные значения функций класса B,
2) $b_\Pi(z)$ и $b_\Omega(z)$ являются общими делителями соответственно справа и слева функций $c(z)$ и $d(z)$ с указанными выше свойствами, т.е. $c(\zeta)\,b_\Pi^{-1}(\zeta)$ и $b_\Omega^{-1}(\zeta)\ d(\zeta)$ — граничные значения функций класса B. Обозначим

$$b_\Pi(\zeta)\Theta^*(\zeta) = \Theta_\Pi(\zeta), \qquad \Theta^*(\zeta)\,b_\Omega(\zeta) = \Theta_\Omega(\zeta).$$

Тогда

$$\Theta(\zeta) = \Theta_\Pi^*(\zeta)[b_\Pi^*(\zeta)]^{-1}, \qquad \Theta(\zeta) = [b_\Omega^*(\zeta)]^{-1}\,\Theta_\Omega^*(\zeta),$$

$\Theta_\Pi^*(\zeta)$, $\Theta_\Omega^*(\zeta)$, $b_\Pi^*(\zeta)$, $b_\Omega^*(\zeta)$ — граничные значения голоморфных сжимающих при $|z| > 1$ функций $\Theta_\Pi^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$, $\Theta_\Omega^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$, $b_\Pi^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$, $b_\Omega^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$. Получаем, что функция $\Theta(z)$ ($\in B$) принадлежит классу $B\tilde{\Pi}$ тогда и только тогда, когда ее граничное значение $\Theta(\zeta)$ представимо в виде „правого" и „левого" отношений граничных значений голоморфных сжимающих при $|z| > 1$ функций; $b_\Pi^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ и $b_\Omega^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ являются наименьшими правым и левым знаменателями для $\Theta(z)$, общими делителями всех остальных правых и левых знаменателей. Функции $b_\Pi(z)$ и $b_\Omega(z)$ определяются по $\Theta(z)$ с точностью до (левого и правого) постоянных унитарных множителей. Если $\Theta(z) \in B\tilde{\Pi}$, то $\Theta^*(\bar{z}) \in B\tilde{\Pi}$: $b_\Omega\left(\frac{1}{z}\right)$ и $b_\Pi\left(\frac{1}{z}\right)$— наименьшие знаменатели для $\Theta^*(\bar{z})$, правый и левый соответственно.

2. В дальнейшем понадобится следующее обобщение достаточного условия Розенблюма-Ровняка для разрешимости факторизационной задачи, предложенное В. И. Мацаевым (устное сообщение на Новгородской ЛМШ, 1976 г.).

ЛЕММА. *Пусть для неотрицательной сжимающей функции* $f(\zeta)$ ($|\zeta|=1$) *существует сжимающая функция* $c(\zeta)$ *такая, что* $\ker c(\zeta) = \{0\}$ (n.b.) *и* $c(\zeta)f(\zeta)$ *—граничное значение некоторой функции класса* B. *Тогда для* $f(\zeta)$ *разрешима факторизационная задача*

$$f(\zeta) = \varphi^*(\zeta)\varphi(\zeta) \quad (\text{n.b.}, |\zeta| = 1), \quad \varphi(z) \in B.$$

Доказательство. Если $f(\zeta)$ ($\leqslant 1$) принимает значения из $[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$, то для разрешимости факторизационной задачи, как известно [15], необходимо и достаточно, чтобы

$$\bigcap_{n\geqslant 0} \overline{\zeta^n f^{1/2}(\zeta)\, H_+^2(\mathfrak{N})} = \{0\},$$

где черта „—" означает замыкание в метрике $L^2(\mathfrak{N})$. Обозначим левую часть этого равенства через $\mathfrak{L}$. Имеем

$$\mathfrak{L} \subset \overline{f^{1/2}(\zeta)\, H^2_+(\mathfrak{N})}.$$

Поэтому, если $c(\zeta) f^{1/2}(\zeta)\, \mathfrak{L} = \{0\}$ и $\ker c(\zeta) = \{0\}$ (n.b.), то $\mathfrak{L} = \{0\}$. Но так как $c(\zeta)\, f(\zeta)$ — граничное значение функции класса B, то

$$c(\zeta) f^{1/2}(\zeta)\, \mathfrak{L} = c(\zeta) f^{1/2}(\zeta) \bigcap_{n\geqslant 0} \zeta^n \overline{f^{1/2}(\zeta)\, H^2_+(\mathfrak{N})} \subset$$

$$\subset \bigcap_{n\geqslant 0} \zeta^n \overline{c(\zeta) f(\zeta)\, H^2_+(\mathfrak{N})} \subset \bigcap_{n\geqslant 0} \zeta^n H^2_+(\mathfrak{N}_1) = \{0\}.$$

Таким образом, при выполнении условия леммы $\mathfrak{L} = \{0\}$ и, следовательно, для $f(\zeta)$ разрешима факторизационная задача.

3. Покажем теперь, что для матриц рассеяния класса $B\tilde{\Pi}$ осуществим синтез по Дарлингтону.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\Theta(z)$ принадлежит классу $B\tilde{\Pi}$. Тогда $\Theta(z)$ существует $\mathscr{D}$-представление, удовлетворяющее условию* (8).

Доказательство. Пусть для $\Theta(z)$ класса $B\tilde{\Pi}$ $b^*_\Pi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ и $b^*_\Omega\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ ее наименьшие правый и левый знаменатели. Тогда функции

$$b^*_\Omega(\bar{\zeta})\,[I - \Theta(\bar{\zeta})\, \Theta^*(\zeta)],\quad b_\Pi(\zeta)[I - \Theta^*(\zeta)\, \Theta(\zeta)]$$

являются граничными значениями функций класса B. По лемме для $I - \Theta(\bar{\zeta})\, \Theta^*(\bar{\zeta})$ и $I - \Theta^*(\zeta)\, \Theta(\zeta)$ разрешимы факторизационные задачи, т.е. существуют решения $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ задач (10). Рассмотрим сжимающую функцию $h_0(\zeta)$, определяемую соотношением (11), и покажем, что для нее существуют двусторонне внутренние функции $b_1(z)$ и $b_2(z)$ такие, что определяемая по формуле (12) функция $\Theta_{21}(\zeta)$ является граничным значением функции класса B. Ниже будем отожествлять функции класса B с их граничными значениями. Обозначим

$$\psi(\zeta) = b_\Pi(\zeta)\, \varphi^*_2(\zeta).$$

Это функция класса B, так как

$$\psi(\zeta)\varphi_2(\zeta) = b_\Pi(\zeta)\,[I - \Theta^*(\zeta)\, \Theta(\zeta)] \in B$$

и $\varphi_2(\zeta)$ — внешняя функция. Если $b_\Pi(\zeta)$ принимает значения из $[\mathfrak{N}^-, \mathfrak{N}^-]$, то

$$\overline{\psi^*(\zeta)\, \mathfrak{N}^-} = \mathfrak{N}_{\varphi_2}.$$

Поэтому

$$\psi(z) = \varphi(z)\, b(z),$$

где $\varphi(z)$ и $b(z)$ соответственно $*$-внешняя и двусторонне внутренняя функции. Так как

$$\psi(\zeta)\, h_0(\zeta) = -b_\Pi(\zeta)\, \Theta^*(\zeta)\, \varphi_1(\zeta) \in B,$$

то получаем, что $b(\zeta)\, h_0(\zeta) \in B$, т.е. $\{b(z), I\}$ — знаменатель функции $h_0(\zeta)$. Таким образом можем положить

$$\Theta_{21}(\zeta) = b(\zeta)\, h_0(\zeta).$$

По теореме 2. диагональные блоки нужной двусторонне внутренней функции $\tilde{\Theta}(z) = [\Theta_{ik}(z)]_1^2$, удовлетворяющей условию (8), получаем, полагая

$$\Theta_{11}(z) = \varphi_1(z), \qquad \Theta_{22}(z) = b(z)\varphi_2(z).$$

Теорема доказана.

4. Остановимся теперь на случае, когда у функции $\Theta(z)$ класса B существует скалярный знаменатель — скалярная внутренняя функция $b_1(z)$ такая, что $b_1^*(\bar{\zeta})\, \Theta^*(\zeta) \in B$. Это имеет место тогда и только тогда, когда $\Theta(\zeta)$ является граничным значением мероморфной вне круга функции, представимой в виде отношения двух ограниченных голоморфных функций $\Theta_2^{-1}(z)\, \Theta_1(z)$, операторозначной $\Theta_1(z)$ к скалярной $\Theta_2(z)$.
Класс таких $\Theta(z)$ обозначим через $ВП$. Среди скалярных знаменателей $b_1(z)$ функции $\Theta(z)$ класса $ВП$ существует наибольший общий делитель других. Обозначим его через $b_\Theta(z)$. Квазинепрерывное продолжение $\Theta(z)$ (по граничным значениям) во внешности единичного круга представимо в виде

$$\Theta(z) = b_\Theta^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) \Theta_1(z) \qquad (|z| > 1),$$

где $\Theta_1\left(\frac{1}{z}\right) \in B$. Функция $b_\Theta(z)$ является носителем особенностей $\Theta(z)$, точка z является полюсом $\Theta(z)$ при $|z| > 1$ тогда и только тогда, когда $1/z$ является нулем для $b_\Theta(z)$.

Заметим, что двусторонне внутренняя функция $\Theta(z)$ принадлежит классу $ВП$ тогда и только тогда, когда она обладает скалярным кратным в смысле [13], т.е., когда существует скалярная функция $b_1(z)$ такая, что $b_1(z)\Theta^{-1}(z) \in B$. Функция $b_\Theta(z)$ является наилучшей минорантой для $\Theta(z)$.

Известно [13], что $\Theta(z)$ является двусторонне внутренней функцией со скалярным кратным тогда и только тогда, когда основной оператор T простой консервативной системы α с матрицей рассеяния $\Theta(z)$ принадлежит классу $C_0(\subset C_{00})$, введенному и исследованному Б. С. Надем и Ч. Фояшем [13, 25—27). Напомним, что для вполне неунитарного сжатия T включение $T \in C_0$ означает существование функции $m(z)\ (\not\equiv 0)$ класса B такой, что $m(T) = 0$. Среди $m(z)$ существует общий делитель других.

Такая функция обозначается через $m_T(z)$ и называется минимальной функцией сжатия T. Для T в конечномерном пространстве $m_T(z)=p(z)/z^n \overline{p\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$, где $p(z)$ — минимальный многочлен оператора T, n-степень $p(z)$. Спектр $\sigma(T)$ сжатия T полностью определяется функцией $m_T(z:)\sigma(T) = S_T$, где S_T-множество, состоящее из нулей $m_T(z)$ в круге $|z|<1$ и дополнения относительно окружности $|\zeta|=1$ к объединению всех тех дуг, на которых $m_T(\zeta)$ аналитична. Каждый нуль z_0 функции $m_T(z)(|z_0|<1)$ является собственным значением для T и порядок собственного значения z_0 равен кратности z_0 как нуля $m_T(z)$. Для того, чтобы корневые векторы T, отвечающие лежащим в круге $|z|<1$ точкам спектра оператора T, порождали все пространство $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы $m_T(z)$ была произведением Бляшке. Как показано в работе [10], $T\in C_0$ тогда и только тогда, когда $T\in C_{00}$ и $(zI-T)^{-1}$— мероморфная при функции с полюсами, удовлетворяюищми условию Бляшке, такая, что

$$\sup_{r<1}\int\limits_{|\zeta|=1} \ln^+(1-r)\|(r\zeta I-T)^{-1}\||d\zeta| < \infty.$$

ТЕОРЕМА 5. *Матрица рассеяния $\Theta(z)$ произвольной пассивной ЛСДС рассеяния с основным оператором T класса C_0 принадлежит классу ВП, причем минимальная функция $m_T(z)$ оператора T является скалярным знаменателем функции* $\Theta\left(\frac{1}{z}\right)$, т.е. $m_T(z)\Theta\left(\frac{1}{z}\right)\in B$. *Если $\Theta(z)$—произвольная функция класса ВП, то основной оператор T любой минимальной пассивной ЛСДС рассеяния α с матрицей рассеяния $\Theta(z)$ принадлежит классу C_0; при этом минимальная функция $m_T(z)$ не зависит от выбора минимальной ЛСДС α и равна наименьшему скалярному знаменателю функции* $\Theta\left(\frac{1}{z}\right)$.

Доказательство. Пусть $\Theta(z)$ — функция класса ВП, принимающая значения из $[\mathfrak{N}^-,\mathfrak{N}^+]$, a $b(z)$ —скалярный знаменатель для $\Theta\left(\frac{1}{z}\right)$. Тогда при любых f из $\mathfrak{N}^-$ и g из $\mathfrak{N}^+$ имеем

$$\int\limits_{|\zeta|=1} (\zeta^n\overline{b(\zeta)}g,\ \Theta(\zeta)f)\,|d\zeta| = 0 \qquad (n\geqslant 1),$$

так как $\overline{b(\zeta)}\,\Theta^*(\zeta)$ — граничное значение функции класса B. Пользуясь равенством Парсеваля в $L^2(\mathfrak{N}^+)$, для $b(z)=\sum\limits_0^\infty b_kz^k$ и $\Theta(z)=\sum\limits_0^\infty \Theta_kz^k$

получаем

$$\sum_0^\infty (\overline{b_k} g, \Theta_{k+n} f) = 0, \qquad (n \geqslant 1).$$

Пусть α — пассивная *ЛСДС* рассеяния с коэффициентами F, T, G, S и передаточной функцией $\Theta(z)$. Тогда $\Theta_{k+n} = GT^{k+n-1} F (n \geqslant 1, k \geqslant 0)$ и потому имеем

$$\sum_0^\infty (g, b_k G T^{k+n} Ff) = 0, \qquad (n \geqslant 0).$$

По теореме Абеля получаем, что

$$\lim_{r \uparrow 1} \left(g, G\left(\sum_0^\infty b_k r^k T^k\right) T^n F f\right) = 0, \qquad (n \geqslant 0).$$

Но по определению

$$\lim_{|r \uparrow 1} \sum_0^\infty b_k r^k T^k = b(T).$$

Таким образом

$$(g, Gb(T)\, T^n Ff) = 0 \qquad (n \geqslant 0, f \in \mathfrak{N}^-, \qquad g \in \mathfrak{N}^+).$$

Для минимальной системы α отсюда следует, что $b(T) = 0$, так как у нее

$$\mathfrak{Y} = \bigvee_0^\infty T^n F \mathfrak{N}^- = \bigvee_0^\infty (T^*)^n G^* \mathfrak{N}^+.$$

В этом случае пришли к тому, что $T \in C_0$ и $b(z)$ делится на $m_T(z)$.

Обратно, пусть $T \in C_0$. Положим $b(z) = m_T(z)$. Если $\Theta(z)$ — матрица рассеяния системы α с основным оператором T, то, обращая проведенные рассуждения, получим, что $\overline{b(\zeta)}\Theta^*(\zeta)$ — граничное значение некоторой функции класса B, т.е. $\Theta(z) \in ВП$ и $b(z)$ — скалярный знаменатель функции $\Theta\left(\frac{1}{z}\right)$.

Из доказанного вытекает, что если $\Theta(z) \in ВП$ и T — основной оператор минимальной пассивной *ПСДС* рассеяния с передаточной функцией $\Theta(z)$, то $T \in C_0$ и $m_T(z)$ — наименьший скалярный знаменатель функции $\Theta\left(\frac{1}{z}\right)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $\Theta(z)$ — функция класса ВП и функцией $\tilde{\Theta}(z)$ определяется минимальное $\mathscr{D}$-представление $\Theta(z)$. Тогда $\tilde{\Theta}(z) \in ВП$ и $b_\Theta(z) = b_{\tilde{\Theta}}(z)$.*

Доказательство. Рассмотрим консервативную минимальную систему рассеяния $\tilde{\alpha}$ с матрицей рассеяния $\tilde{\Theta}(z)$ и часть α системы $\tilde{\alpha}$ с матрицей рассеяния $\Theta(z)$. По теореме 3 система α *является минимальной*. Так как $\Theta(z) \in В\Pi$, то по теореме 5 основной оператор T системы α принадлежит классу C_0 и $b_\Theta(z) = m_T(z)$. Но у системы $\tilde{\alpha}$ основной оператор $\tilde{T}$ совпадает с T, так что $\tilde{T} \in C_0$ и по теореме 5, учитывая, что система $\tilde{\alpha}$ минимальна, получаем, что $\tilde{\Theta}(z) \in В\Pi$ и $b_{\tilde{\Theta}}(z) = m_{\tilde{T}}(z) = m_T(z) = b_\Theta(z)$. Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Если* $\Theta(z)$ — *матрица рассеяния* (2) *системы* α *с основным оператором* T *класса* C_0, *то*

$$\Theta\left(\frac{1}{z}\right) = S + G(zI - T)^{-1}F, \qquad (|z| < 1),$$

т.е. *квазинепрерывное продолжение* $\Theta(z)$ ($\in В\Pi$) *во внешности единичного круга также записывается по формуле* (2).

Действительно, систему α можно рассматривать как часть консервативной системы $\tilde{\alpha}$ с основным оператором $\tilde{T} = T$. При этом $\Theta(z)$ записывается в виде блока матрицы рассеяния $\tilde{\Theta}(z)$ системы $\tilde{\alpha}$. Так как $\tilde{T} \in C_0$, то $\tilde{\Theta}(z)$ — двусторонне внутренняя функция со склалярным кратным. Квазинепрерывное продолжение $\tilde{\Theta}(z)$ во внешность единичного круга можно определить по принципу симметрии

$$\tilde{\Theta}(z) = \left[\tilde{\Theta}^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right]^{-1}, \quad (|z| > 1).$$

Непосредственно проверяется, что $\left[\tilde{\Theta}^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right]^{-1}$, выражается через коэффициенты $\tilde{F}$, $\tilde{T}$, $\tilde{G}$, $\tilde{S}$ системы $\tilde{\alpha}$ так же, как и $\tilde{\Theta}(z)$, т.е., что

$$\tilde{\Theta}(z) = \tilde{S} + z\tilde{G}(I - z\tilde{T})^{-1}\tilde{F}, \qquad (|z| > 1).$$

Остается теперь воспользоваться соотношением (3) и тем, что $\Theta\left(\frac{1}{z}\right)$ блок $\tilde{\Theta}\left(\frac{1}{z}\right)$ $(|z| < 1)$.

§ 4. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАССИВНЫЕ СИСТЕМЫ РАССЕЯНИЯ

1. Легко видеть, что *ПСДС* α является пассивной тогда и только тогда, когда для ее коэффициентов разрешима система уравнений

(17) $I - T^*T - G^*G = M^*M, \quad -T^*F - G^*S = M^*N, \quad I - F^*F - S^*S = N^*N,$

которую можно записать в виде

$$(I - V^*V =)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T & F \\ G & S \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} T & F \\ G & S \end{pmatrix} = (M \mid N)^*[M \mid N]$$

(здесь $M \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{N}]$, $N \in [\mathfrak{N}^-, \mathfrak{N}]$, $\mathfrak{N}$ — некоторое гильбертово пространство). Действительно, если это равенство имеет место, то $I - V^*V \geqslant 0$, т.е α—пассивная система. Обратно, если $I - V^*V \geqslant 0$, то решение системы уравнений (17) получим, положив

$$\mathfrak{N} = \overline{(I - V^*V)(\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{N}^-)}, \quad M = (I - V^*V)^{1/2}|\mathfrak{Y}, \quad N = (I - V^*V)^{1/2}|\mathfrak{N}^-.$$

Пусть α — пассивная система рассеяния, M и N — решение уравнений (17),

$$\psi(z) = N + zM(I - zT)^{-1} F, \qquad K_\alpha(z) = (I - zT)^{-1} F. \tag{18}$$

Пользуясь равенствами (17), после простой выкладки получим

$$I - \Theta_\alpha^*(\eta)\, \Theta_\alpha(\zeta) = \psi^*(\eta)\, \psi(\zeta) + (1 - \bar{\eta}\zeta)\, K_\alpha^*(\eta)\, K_\alpha(\zeta). \tag{19}$$

Из этого тождества, в частности, видно, что $I - \Theta_\alpha^*(z)\, \Theta_\alpha(z) \geqslant 0$ при $|z| < 1$. Итак, справедливо

Предложение 8 [7]. *Матрица рассеяния произвольной пассивной ЛСДС принадлежит классу B.*

Для граничных значений функций $\Theta_\alpha(z)$ ($\in B$) и $\psi(z)$($\in B$) получаем при h из $\mathfrak{N}$ и $|\zeta| = 1$ (n.b.)

$$\|[I - \Theta_\alpha^*(\zeta)\, \Theta_\alpha(\zeta)]^{1/2} h\|^2 = \|\psi(\zeta) h\|^2 + \lim_{r \uparrow 1} (1 - r^2) \| K_\alpha(r\zeta) h\|^2.$$

Поэтому следующие два равенства равносильны:

$$I - \Theta_\alpha^*(\zeta)\, \Theta_\alpha(\zeta) = \psi^*(\zeta)\, \psi(\zeta), \ \ s\text{-}\lim_{r \uparrow 1} (1 - r^2)^{1/2}\, K_\alpha(r\zeta) = 0. \tag{20}$$

Но $\|\psi(\zeta) h\| \leqslant \|(I - \Theta_\alpha^*(\zeta)\, \Theta_\alpha(\zeta)]^{1/2}\, h\|$ и потому равенства (20) имеют место тогда и только тогда, когда

$$\|\psi(\zeta)\, h\|_{L^2(\mathfrak{N})} = \|[I - \Theta_\alpha^*(\zeta)\, \Theta_\alpha(\zeta)]^{1/2}\, h\|_{L^2(\mathfrak{N}^-)}, \qquad (\forall h,\, h \in \mathfrak{N}^-).$$

Учитывая, что $\psi(\zeta) h \in H_+^2(\mathfrak{N})$ и $\Theta_\alpha(\zeta)\, h \in H_+^2(\mathfrak{N}^+)$, получаем

$$\|\psi(\zeta)\, h\|_{L^2(\mathfrak{N})}^2 = \|Nh\|^2 + \sum_0^\infty \|MT^k\, Fh\|^2,$$

$$\|[I - \Theta_\alpha^*(\zeta)\, \Theta_\alpha(\zeta)]^{1/2}\, h\|_{L^2(\mathfrak{N}^-)}^2 = \|h\|^2 - \|\Theta_\alpha(\zeta) h\|_{L^2(\mathfrak{N}^+)}^2 =$$

$$= \|h\|^2 - \|Sh\|^2 - \sum_0^\infty \|GT^k\, Fh\|^2.$$

Воспользуемся теперь равенствами (17) и тождеством

$$I - s\text{-}\lim_{n\to\infty} (T^*)^n T^n = \sum_{k=0}^{\infty} (T^*)^k (I - T^*T) T^k.$$

В итоге прийдем к соотношению

$$\|[I - \Theta_\alpha^*(\zeta)\,\Theta_\alpha(\zeta)]^{1/2} h\|^2_{L^2(\mathfrak{N}^-)} = \|\psi(\zeta)h\|^2_{L^2(\mathfrak{N})} + \lim_{n\to\infty} \|T^n Fh\|^2.$$

Следовательно, условия (20) эквивалентны тому, что

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} T^n F = 0.$$

Для управляемой системы α это предельное соотношение означает, что $T \in C_{0\cdot}$.

2. Заметим, что $h(n) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k F\varphi^-(n-k-1)$ при $h(0)=0$. Поэтому пассивную систему $\mathring{\alpha}$ с матрицей рассеяния $\Theta(z)$ естественно называть о п т и м а л ь н о й, если для любой другой пассивной системы α с той же матрицей рассеяния $\Theta(z)$ имеем

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \mathring{T}^k \mathring{F} h_k \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{n} T^k F h_k \right\|$$

при произвольных h_k из $\mathfrak{N}^-$ и $n \geqslant 0$. Из этого определения следует, что оптимальная управляемая пассивная система определяется по матрице рассеяния с точностью до унитарного подобия. Легко также видеть, что такая система автоматически является наблюдаемой, а значит и минимальной.

ТЕОРЕМА 7. *Произвольная функция $\Theta(z)$ класса B является матрицей рассеяния некоторой оптимальной и минимальной пассивной системы.*

Доказательство. Для $\Theta(z)\,(\in B)$ существует внешняя функция $\varphi(z)\,(\in B)$ такая, что: 1) $\varphi^*(\zeta)\varphi(\zeta) \leqslant I - \Theta^*(\zeta)\,\Theta(\zeta)$ (n.b.), 2) если $\psi(z) \in B$ и $\psi^*(\zeta)\,\psi(\zeta) \leqslant I - \Theta^*(\zeta)\,\Theta(\zeta)$, то $\psi^*(\zeta)\,\psi(\zeta) \leqslant \varphi^*(\zeta)\ \varphi(\zeta)$ (см. [13], гл. V, предложение 4.2). Функция $\varphi(z)$ определяется по $\Theta(z)$ с точностью до левого постоянного унитарного множителя. Не исключено, что $\varphi(z) \equiv 0$. Если для $\Theta(z)$ разрешима факторизационная задача (4), то $\varphi(z)$ — ранее введенная функция $\varphi_2(z)$. Рассмотрим голоморфную и ограниченную при $|z| < 1$ функцию $\tilde{\Theta}(z) = \begin{pmatrix} \Theta(z) \\ \varphi(z) \end{pmatrix}$ со значениями из $[\mathfrak{N}^-, \mathfrak{N}^+ \oplus \oplus \mathring{\mathfrak{N}}]$. Так как $\tilde{\Theta}^*(\zeta)\,\tilde{\Theta}(\zeta) \leqslant I$, то по принципу максимума $\tilde{\Theta}(z) \in B$. Пусть

$\tilde{\alpha}$ — простая консервативная система с матрицей рассеяния $\tilde{\Theta}(z)$, а $\mathring{\alpha}$ — часть системы $\tilde{\alpha}$ с внешними пространствами $\mathfrak{N}^-$, $\mathfrak{N}^+$ и коэффициентами $\mathring{F} = \tilde{F}$, $\mathring{T} = \tilde{T}$, $\mathring{G} = P_{\mathfrak{N}^+} \tilde{G}$, $\mathring{S} = P_{\mathfrak{N}^+} \tilde{S}$. Очевидно, что $\Theta_{\mathring{\alpha}}(z) = \Theta(z)$ и

$$\varphi(z) = \mathring{N} + z\mathring{M}(I - z\mathring{T})^{-1} \mathring{F}, \quad \mathring{N} = P_{\mathring{\mathfrak{N}}} \tilde{S}, \mathring{M} = P_{\mathring{\mathfrak{N}}} \tilde{G}.$$

Операторы $\mathring{N}$ и $\mathring{M}$ являются решением уравнений (17) для коэффициентов системы $\mathring{\alpha}$, так что согласно (19) имеем

$$I - \Theta^*(\eta)\Theta(\xi) = \varphi^*(\eta)\varphi(\xi) + (1 - \bar{\eta}\xi) K^*_{\mathring{\alpha}}(\eta)K_{\mathring{\alpha}}(\xi).$$

Пользуясь определением $\varphi(z)$ и этим равенством, покажем, что $\mathring{\alpha}$ — оптимальная система. Действительно, пусть α — любая другая пассивная система с матрицей рассеяния $\Theta(z)$. Для соответствующих ей по формулам (18) функций $\psi(z)$ и $K_\alpha(z)$ будем иметь тождество (19), в котором $\Theta_\alpha(z) = \Theta(z)$. Поэтому $\psi^*(\zeta)\psi(\zeta) \leqslant I - \Theta^*(\zeta)\,\Theta(\zeta)$ и

$$K^*_\alpha(\eta)\,K_\alpha(\xi) - K^*_{\mathring{\alpha}}(\eta)\,K_{\mathring{\alpha}}(\xi) = (1 - \bar{\eta}\xi)^{-1}\,\varphi^*(\eta)\,\varphi(\xi) - (1 - \bar{\eta}\xi)^{-1}\,\psi^*(\eta)\,\psi(\xi),$$

Убедимся в том, что стоящее в правой части этого равенства ядро от двух переменных ξ и $\eta (|\zeta| < 1, |\eta| < 1)$, является неотрицательно-определенным. Обозначим через π_--ортопроектор из $L^2(\mathfrak{N})$ на $H^2_-(\mathfrak{N}) = L^2(\mathfrak{N}) \ominus H^2_+(\mathfrak{N})$. Пусть $h_i \in \mathfrak{N}^-, |z_i| < 1, (1 \leqslant i \leqslant n)$. Рассмотрим:

$$h(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} (\zeta - z_i)^{-1} h_i (\in H^2_-(\mathfrak{N}^-)), \quad \pi_-\psi h = \sum_{i=1}^{n} (\zeta - z_i)^{-1}\,\psi(z_i)h_i,$$

$$\|\pi_-\psi h\|^2_{L^2(\mathfrak{N})} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (1 - \bar{z}_j z_i)^{-1}\,(\psi(z_j)\,\psi(z_i)\,h_i,\, h_j).$$

Аналогичное равенство можем записать и для $\varphi(z)$. Но из определения $\varphi(z)$ вытекает, что $\psi(z) = b(z)\,\varphi(z)$, где $b(z) \in B$. Поэтому
Здесь через b обозначен оператор ,,умножения'' на $b(\zeta)$ функций из $L^2(\mathfrak{N})$ так, что $\|\pi_- b\| \leqslant 1$. Итак, последовательно получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (1 - \bar{z}_j z_i)^{-1}(\psi^*(z_j)\,\psi(z_i)\,h_i,\, h_j) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (1 - \bar{z}_j z_i)^{-1}\,(\varphi^*(z_j)\,\varphi(z_i)h_i,\, h_j),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (K^*_\alpha(z_j)K_\alpha(z_i)\,h_i,\, h_j) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (K^*_{\mathring{\alpha}}(z_j)K_{\mathring{\alpha}}(z_i)h_i,\, h_j),$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (I - z_i T)^{-1}\,F h_i \right\|^2 \geqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} (I - z_i\mathring{T})^{-1}\,\mathring{F} h_i \right\|^2.$$

Заметим теперь, что

$$(I - zT)^{-1}F = \sum_0^\infty z^n T^n F, \quad r^n T^n F = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} \bar{\zeta}^n (I - r\zeta T)^{-1} F |d\zeta|, \quad (0 < r < 1).$$

Поэтому из последнего полученного неравенства, верного при любых $h_i (\in \mathfrak{N}^-)$ и $z_i (|z_i| < 1)$ вытекает, что

$$\left\| \sum_{k=0}^n T^k F h_k \right\| \geqslant \left\| \sum_{k=0}^n \mathring{T}^k \mathring{F} h_k \right\|,$$

т.е., что $\mathring{\alpha}$ — оптимальная система. Если она не является управляемой, то перейдем от нее к новой системе α_0 с внутренним пространством $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}^y_{\mathring{\alpha}} (= \mathfrak{H}^y_{\tilde{\alpha}})$ и коэффициентами

$$F_0 = \mathring{F}, \quad T_0 = \mathring{T}|\mathfrak{H}_0, \quad G_0 = \mathring{G}|\mathfrak{H}_0, \quad S_0 = \mathring{S}.$$

Так как $\Theta_{\alpha_0}(z) = \Theta(z)$ и $T_0^k F_0 = \mathring{T}^k \mathring{F} \, (k \geqslant 0)$, то система α_0 также является оптимальной. К тому же она и управляемая, а значит и минимальная. Теорема доказана.

Замечание 1. При доказательстве вместе $\begin{pmatrix} \Theta(z) \\ \varphi(z) \end{pmatrix}$ можно было взять произвольную функцию $\tilde{\Theta}(z) = [\Theta_{ik}(z)]_1^2$ класса B, имеющую $\Theta_{12}(z) = \Theta(z)$ и $\Theta_{22}(z) = \varphi(z)$, и рассмотреть часть $\mathring{\alpha}$ простой консервативной системы $\tilde{\alpha}$ с $\Theta_{\tilde{\alpha}}(z) = \tilde{\Theta}(z)$, определяемую по формулам (3). При этом $\tilde{\Theta}(z)$ можно выбрать так, чтобы оптимальная система $\mathring{\alpha}$ была управляемой.

Замечание 2. Для внешней функции $\varphi(z)$ и $\psi(z) \, (\in B)$ из условий $\psi^*(z)\,\psi(z) \leqslant \varphi^*(z)\,\varphi(z)$ и $\psi^*(0)\,\psi(0) = \varphi^*(0)\,\varphi(0)$ вытекает, что $\psi(z) = b\varphi(z)$, где b — не зависящий от z изометрический оператор. Поэтому, пользуясь тождеством (19), получаем, что оптимальная система $\mathring{\alpha}$ характеризуется условием $\mathring{F}^*\mathring{F} \leqslant F^*F$, где $\mathring{F}$ и F — коэффициенты соответственно оптимальной и произвольной пассивной системы с одной и той же матрицей рассеяния $\Theta(z)$. Вместо $z = 0$ можно взять любую точку $\xi \; (|\xi| < 1)$. Характеристическое условие оптимальности системы при этом запишется в виде

$$\mathring{F}^*(I - \bar{\xi}\mathring{T}^*)^{-1}(I - \xi\mathring{T})^{-1}\mathring{F} \leqslant F^*(I - \bar{\xi}T^*)^{-1}(I - \xi T)^{-1}F.$$

3. Пусть $\mathring{T}$ — основной оператор оптимальной управляемой системы $\mathring{\alpha}$ с матрицей рассеяния $\Theta(z)$. Из предложения 4 и определения $\mathring{\alpha}$ следует,

что $\overset{\circ}{T} \in C_0$. тогда и только тогда, когда для $\Theta(z)$ разрешима факторизационная задача (4).

ТЕОРЕМА 8. *Для включения $\overset{\circ}{T} \in C_{00}$ необходимо и достаточно, чтобы для $\Theta(z)$ были разрешимы факторизационные задачи* (4), (5) *и чтобы для соответствующей сжимающей функции $h_0(\zeta)$, определенной по формуле* (11), *существовала двусторонне внутренняя функция $b(z)$ такая, что $h_0(\zeta)b(\zeta) \in B$. При выполнении этих условий синтез $\overset{\circ}{\cdot}$ можно осуществить указанным в* § 2 *способом с помощью минимального $\mathscr{D}$-представления $\Theta(z)$ вида*

$$\tilde{\Theta} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Theta \\ h_0 & \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $\overset{\circ}{T} \in C_{00}$. Тогда $\Theta(z)$ имеет $\mathscr{D}$-представление $\tilde{\Theta} = [\Theta_{ik}]_1^2$ $(\Theta_{12} = \Theta)$ с $\Theta_{22} = \varphi = \varphi_2$ (см. доказательства предложения 3 и теоремы 7). Так же, как и при доказательстве предложения 2, для $\tilde{\Theta}$ получим формулу (21), где $\{I, b(z)\}$ — знаменатель $h_0(\zeta)$. Тем самым получена необходимость сформулированных условий для включения $\overset{\circ}{T} \in C_{00}$. Пусть теперь выполняются эти условия. Рассмотрим минимальный знаменатель $\{I, b(z)\}$ для $h_0(\zeta)$ и соответствующее $\mathscr{D}$-представление (21). С его помощью построим систему α способом, указанным в § 2. Так как $\Theta_{22}(z) = \varphi_2(z) = \varphi(z)$, то α—оптимальная система. По теореме 3 она является и минимальной. У нее $\Theta_{\alpha}(z) = \Theta(z)$, $\overset{\circ}{T} \in C_{00}$ и потому $\overset{\circ}{T} \in C_{00}$. Теорема доказана.

Двусторонне внутренняя функция $b(z)$ в формуле (21) определяется по $\Theta(z)$ с точностью до правого постоянного унитарного множителя условиями: 1) $h_0(\zeta)b(\zeta) \in B$, 2) если $b_1(z)$ — двусторонне внутренняя функция и $h_0(\zeta)b_1(\zeta) \in B$, то $b_1(z)$ делится слева на $b(z)$, т.е. $b^*(\zeta)b_1(\zeta) \in B$.

Следствие. Если $\Theta(z) \in B\tilde{\Pi}$, то $T \in C_{00}$.

Действительно, для $\Theta(z)$ класса $B\tilde{\Pi}$ выполняются условия, сформулированные в теореме 8. Существование для $h_0(\zeta)$ правого знаменателя $\{I, b(z)\}$ доказывается так же, как в теореме 4 доказано существование левого знаменателя.

Согласно теореме 5 включения $\overset{\circ}{T} \in C_0$ и $\Theta(z) \in B\Pi$ эквивалентны. Остается открытым вопрос: эквивалентны ли включения $\overset{\circ}{T} \in C_{00}$ и $\Theta(z) \in B\tilde{\Pi}$?

Для $\overset{\circ}{T}$ класса C_{00} характеристическая функция $\Theta_{\overset{\circ}{T}^*}(z)$ совпадает с так называемой чистой частью функции $\tilde{\Theta}(z)$, определенной по формуле (21) (см. соответствующие определения в [13]). Поэтому по $\tilde{\Theta}(z)$ известным образом находится спектр оператора $\overset{\circ}{T}$ (см. [13], гл. VI, теорема 4.1). Можно использовать также другие известные результаты по теории характеристических функций для исследования $\mathring{T}$ по $\tilde{\Theta}(z)$. Заметим, что в случае, когда определены соответствующие определители,

$$\det \tilde{\Theta}(\zeta) = \det b(\zeta) \det \varphi(\zeta) / \overline{\det \varphi(\zeta)} \quad (|\zeta| = 1),$$

где $\varphi(z) = \varphi_2(z)$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аров, Д. З., О методе Дарлингтона в исследовании диссипативных систем, *Докл. АН СССР*, **201**: 3 (1971), 559—562.
2. Аров, Д. З., Реализация матриц-функций по Дарлингтону. *Изв. АН СССР*, **37**: 6 (1973), 1299—1331.
3. Аров, Д. З., Теория рассеяния с диссипацией энергии, *Докл. АН СССР*, **216**: 4 (1974), 713—716.
4. Аров, Д. З., Об унитарных сцеплениях с потерями (теория рассеяния с потерями), *Функц. анализ и его прилож.*, 8: 4, (1974), 5—22.
5. Аров, Д. З., Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости, *Сибирский матем. журн.*, **16**: 3, (1975), 540—563.
6. Аров, Д. З., Аппроксимационная характеристика функций класса *ВП*, *Функц. анализ и его прилож.*, **12**: 2 (1978), 70—71.
7. Аров, Д. З., Пассивные линейные стационарные динамические системы, *Сибирский математический журнал*, **19**: 2(1979).
8. Бродский, В. М.; Шварцман, Я. С., Инвариантные подпространства сжатия и факторизации характеристических функций, *Теория функций, функц. анализ и их прилож.*, **22** (1975), 15—35.
9. Гиллемин, Е. А., *Синтез пассивных цепей*, Связь, Москва, 1970.
10. Гинзбург, Ю. П., О спектральных подпространствах сжатий с медленно растущей резольвентой, *Математич. исследования*, Кишинев, **5**: 4 (1970), 45—62.
11. Лейн, А.; Томас Р., *Теория ядерных реакций при низких энергия*, ИЛ, Москва, 1960.
12. Маламуд, Е. Я., Об одном обобщении теоремы Дарлингтона, *Известия АН Арм. ССР*, **7**: 3 (1972), 183—195.
13. С.-Надь, Б.; Фояш, Ч., *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, Москва, 1970.
14. Потапов, В. П., Мультипликативные представления аналитических матриц-функций, *Тезисы кратк. научн. сообщ. Международного конгр. матем.*, секция 4, Москва (1966), 74—75.
15. Розанов, Ю. А., *Теория обновляющих процессов*, Наука, Москва, 1974.
16. Belevitch, Y., Elementary applications of the scattering formalism in network design, *IRE Frans on circuit theory*, CT-3, June 1956, 97—107; *Ann Télécommun.*, 6(1951), 302.
17. Bondy, D. A., An application of functional operator models to dissipative scattering theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, (1976), 1—43.
18. Darlington, S., Synthesis of reactanse 4-poles which produce prescribed insertion loss characteristics including special application to filter design, *J. Math. and Phys.*, **18** (1939), 257—353.

19. DE WILDE, P., Roomy scattering matrix synthesis, Technical Report, Berkeley, 1971.
20. DOUGLAS, R. G.; HELTON J. W., Inner dilation of analytic matrix function and Darlington synthesis, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **34** (1973), 61–67.
21. FOIAŞ, C., On the Lax – Phillips Nonconservative Scattering Theory, *J. Functional Analysis*, **19**: 3(1975), 273–301.
22. HELTON, J. W., The characteristic functions of operator theory and electrical network realization, *Indiana Univ. Math.* J., **22**: 5(1972), 403–414.
23. HELTON, J. W., Discrete time systems, operators models and scattering theory, *J. Functional Analysis*, **16**: 1(1974), 15–38.
24. LAX, P. D.; PHILLIPS, R. S., Scattering theory for dissipative hyperbolic systems. *J. Functional Analysis*, **14**: 2 (1975), 172–235.
25. SZ.-NAGY, B.; FOIAŞ, C., Opérateurs sans multiplicité, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **30**(1969), 1–18.
26. SZ.-NAGY, B.; FOIAŞ, C. Modele Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **31**(1970), 91–115.
27. SZ.-NAGY, B.; FOIAŞ, C. Compléments á l'étude des opérateurs de class C_0., *Acta Sci. Math.*, (Szeged), **31**: 3–4 (1970), 287–296.
28. TELLEGEN, B. D. H., Synthesis of 2n-poles by networks containing the minimum number of elements, *J. Math. and Phys.*, **32**: 1(1953), 1–18.

D. Z. AROV
State Pedagogical Institute of Odessa
Odessa, Komsomolskaia 26,
U.S.S.R.

Received February 12, 1979.