J. OPERATOR THEORY
5(1981), 171–194

SUR DEUX RÉSULTATS D'ANALYSE HARMONIQUE NON-COMMUTATIVE: UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DES ALGÈBRES DE KAC

JEAN DE CANNIÈRE, MICHEL ENOCK, JEAN-MARIE SCHWARTZ

L'une des méthodes de l'analyse harmonique consiste à étudier certaines algèbres de Banach associées à un groupe localement compact G: $M^1(G)$ (algèbre des mesures bornées sur G), $L^1(G)$ (idéal de $M^1(G)$ formé des fonctions intégrables par rapport à une mesure de Haar à gauche sur G), $A(G)$ et $B(G)$ (algèbres de Fourier et de Fourier-Stieltjes, introduites par P. Eymard [5]). L'intérêt de ces constructions apparaît notamment à la lumière des théorèmes démontrés par J. G. Wendel [12] (resp. B. E. Johnson [6], resp. M. E. Walter [11] th. 2, resp. M. E. Walter [11] th. 3) énonçant que $L^1(G_1)$ et $L^1(G_2)$ (resp. $M^1(G_1)$ et $M^1(G_2)$, resp. $B(G_1)$ et $B(G_2)$, resp. $A(G_1)$ et $A(G_2)$) sont des algèbres de Banach isométriquement isomorphes si et seulement si les groupes localement compacts G_1 et G_2 sont topologiquement isomorphes.

Rappelons d'autre part que les algèbres de Kac forment une catégorie plus vaste que celle des groupes localement compacts, et mieux adaptée qu'elle à la théorie de la dualité non commutative. Il apparaît en effet qu'un nombre croissant de théorèmes d'analyse harmonique restent vrais dans ce cadre plus général. De plus, des théorèmes distincts démontrés avec des techniques différentes se révèlent désormais être des corollaires d'un unique résultat, ce qui en permet une meilleure compréhension.

Ainsi, nous avons associé dans [3] à toute algèbre de Kac $\mathbf{K}$ son algèbre de Fourier-Stieltjes $B(\mathbf{K})$ (resp. son algèbre de Fourier $A(\mathbf{K})$, qui est un idéal bilatère fermé de $B(\mathbf{K})$). Ces objets généralisent à la fois $B(G)$ et $M^1(G)$ (resp. $A(G)$ et $L^1(G)$); rappelons à ce propos que si G est abélien et si $\hat{G}$ désigne son groupe dual, $B(G)$ (resp. $A(G)$) est l'image, par la transformation de Fourier, de $M^1(\hat{G})$ (resp. $L^1(\hat{G})$).

L'objet de ce papier est de démontrer, dans le cadre des algèbres de Kac, des théorèmes analogues à ceux de Wendel, Johnson et Walter. Plus précisément si $\mathbf{K}_1$ et $\mathbf{K}_2$ désignent deux algèbres de Kac, nous montrons que les algèbres de Banach $B(\mathbf{K}_1)$ et $B(\mathbf{K}_2)$ (resp. $A(\mathbf{K}_1)$ et $A(\mathbf{K}_2)$) sont isométriquement isomorphes si et seulement si l'algèbre de Kac $\mathbf{K}_1$ est isomorphe à $\mathbf{K}_2$ ou à l'algèbre de Kac réfléchie $\mathbf{K}_2^{\sigma}$ (voir [9]). Tous les théorèmes précités d'analyse harmonique deviennent alors des cas particuliers de ce résultat général.

Comme Walter [11] nous utilisons les résultats classiques de R. V. Kadison concernant les isométries des algèbres de von Neumann [7]. Les techniques sont toutefois différentes: nous ramenons le cas des algèbres de Fourier-Stieltjes à celui des algèbres de Fourier, là où Walter donne deux démonstrations semblables mais indépendantes.

Nous remercions A. Van Daele pour de très utiles conversations pendant son bref séjour à Paris.

Nous utilisons les constructions et notations de [4], [8], [9], [2] et [3]. En particulier dans ce qui suit, $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ désigne une algèbre de Kac, $\hat{\mathbf{K}} = (\hat{M}, \hat{\Gamma}, \hat{\varkappa}, \hat{\varphi})$ l'algèbre de Kac duale, λ la représentation de Fourier de $\mathbf{K}$, W l'unitaire fondamental associé à $\mathbf{K}$, π la représentation universelle de M_* dans son algèbre de von Neumann enveloppante $W^*(\mathbf{K})$, et $\varkappa\pi_*$ la représentation de Fourier de $B(\mathbf{K})$. Rappelons encore, en vue du paragraphe 3 ci-dessous, que $W^*(\mathbf{K})$ se munit d'une structure d'algèbre de Hopf-von Neumann involutive à l'aide du coproduit $\sigma s_{\pi \times \pi}$ et de l'involution $s_{\overset{\vee}{\pi}}$ ([3], 2.15).

Enfin, soit M une algèbre de von Neumann, M_* son prédual; pour a dans M et ω dans M_*, on notera $a \cdot \omega$ l'élément de M_* défini par

$$\langle x, a \cdot \omega \rangle = \langle xa, \omega \rangle$$

pour tout x de M.

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. LEMME. *Soient M une algèbre de von Neumann, P et Q deux projecteurs de M. Si l'on a*

$$P \otimes P + Q \otimes Q \geqslant I \otimes I$$

(où I désigne l'unité de M), l'un au moins des projecteurs P et Q est égal à I.

Démonstration. De l'hypothèse, on déduit immédiatement

$$(I - P) \otimes (I - Q) \leqslant$$

$$\leqslant [(I - P) \otimes (I - Q)] (P \otimes P + Q \otimes Q) [(I - P) \otimes (I - Q)] = 0$$

d'où le résultat.

1.2. LEMME. *Soient M_1, M_2 des algèbres de von Neumann, P_1, P_2 et Q des projecteurs de M_1, M_2 et $M_1 \otimes M_2$, respectivement. Si*

$$\langle Q, \omega_1 \otimes \omega_2 \rangle \leqslant \langle P_1 \otimes P_2, \omega_1 \otimes \omega_2 \rangle$$

pour tous $\omega_1 \in (M_1)_*^+$ et $\omega_2 \in (M_2)_*^+$, on a

$$Q \leqslant P_1 \otimes P_2.$$

Démonstration. On suppose que M_1 et M_2 opèrent dans des espaces hilbertiens $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$, respectivement. Soient $\xi \in \mathscr{H}_1$ et $\eta \in \mathscr{H}_2$. En posant $\omega_1 = \omega_\xi$ et $\omega_2 = \omega_\eta$, l'hypothèse implique

$$(*) \qquad (P_1 \otimes P_2)(\xi \otimes \eta) = 0 \Rightarrow Q(\xi \otimes \eta) = 0.$$

Soit $\zeta \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ tel que $(P_1 \otimes P_2)\,\zeta = 0$. Etant donné que

$$(P_1\mathscr{H}_1 \otimes P_2\mathscr{H}_2)^\perp = [P_1\mathscr{H}_1 \otimes (I - P_2)\,\mathscr{H}_2] \oplus [(I - P_1)\mathscr{H}_1 \otimes P_2\mathscr{H}_2] \oplus$$
$$\oplus\ [(1 - P_1)\mathscr{H}_1 \otimes (I - P_2)\mathscr{H}_2],$$

ζ est la limite d'une suite convergente d'élément de la forme $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i$, où $(P_1 \otimes P_2)(\xi_i \otimes \eta_i) = 0$ pour tout i. En utilisant $(*)$, on trouve $Q\zeta = 0$.

Par conséquent, on a

$$(P_1\mathscr{H}_1 \otimes P_2\mathscr{H}_2)^\perp \subset [Q(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)]^\perp,$$

ce qui achève la démonstration.

1.3. LEMME. *Soient* **K** *une algèbre de Kac, P et Q deux projecteurs du centre de M tels que*

$$P + Q \geqslant I$$

$$\Gamma(P) \geqslant P \otimes P, \quad P = \varkappa(P)$$

$$\Gamma(Q) \geqslant Q \otimes Q, \quad Q = \varkappa(Q).$$

Alors l'un au moins des projecteurs P et Q est égal à I.

Démonstration. D'après [4], 5.1.5, on sait que

$$\Gamma(P)\,(I \otimes P) = P \otimes P,$$

d'où

$$\Gamma(P)\,[(I - P) \otimes P] = 0$$

et, a fortiori, comme $I - Q \leqslant P$ par hypothèse,

$$\Gamma(P)[(I - P) \otimes (I - Q)] = 0.$$

De même, par [4], 5.1.5, on a

$$\Gamma(Q)\,(Q \otimes I) = Q \otimes Q$$

et, par un calcul analogue, on trouvera

$$\Gamma(Q)[(I - P) \otimes (I - Q)] = 0.$$

En additionnant ces deux égalités, comme

$$\Gamma(P) + \Gamma(Q) \geqslant I \otimes I,$$

on trouve

$$(I - P) \otimes (I - Q) = 0,$$

d'où le résultat.

1.4. LEMME. *Soient* **K** *une algèbre de Kac et* P *un projecteur du centre de* M *tel que* $\Gamma(P) \leqslant P \otimes I$ (resp. $\Gamma(P) \leqslant I \otimes P$). *Alors* P *est égal à* 0 *ou* I.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} W[(I - P)\otimes P]W^* &= W(I \otimes P)W^* - W(P \otimes P)W^* = \\ &= W(I \otimes P)W^* - (P\otimes I)W(I\otimes P)W^* = && \text{d'après [4] 2.1.5 (b)} \\ &= \Gamma(P) - (P \otimes I)\Gamma(P) = && \text{d'après [4] 2.2.5 (b)} \\ &= 0 && \text{par hypothèse.} \end{aligned}$$

Comme W est unitaire, la première partie du lemme en résulte; il suffit d'appliquer ce résultat à $\mathbf{K}^\sigma$ ([9], II.6) pour obtenir la deuxième partie.

1.5. DÉFINITIONS. Soient M_1 et M_2 deux algèbres de von Neumann, et l une bijection linéaire isométrique de M_1 sur M_2. Pour tout projecteur P du centre de M_2, on définit une application linéaire l_P de M_1 dans M_2 en posant, pour tout x de M_1:

$$l_P(x) = l(x)l(I)^*P.$$

(En particulier, on posera

$$l_I(x) = l(x)l(I)^*.)$$

On note

$\mathscr{P}_h = \{P;\ P$ projecteur du centre de M_2 tel que l_P soit un homomorphisme d'algèbres de M_1 dans $M_2\}$,
$\mathscr{P}_a = \{P;\ P$ projecteur du centre de M_2 tel que l_P soit un antihomomorphisme d'algèbres de M_1 dans $M_2\}$.

1.6. THÉORÈME. (Kadison [7]; Størmer [10]). *Avec les notations ci-dessus, on a*

(i) *$l(I)$ est unitaire.*
(ii) *l_I est un isomorphisme de Jordan de M_1 sur M_2.*
(iii) *il existe un projecteur R tel que $R \in \mathscr{P}_h$ et $I - R \in \mathscr{P}_a$.*

Démonstration. D'après le théorème 7 de [7], on a (i), et l'application $\tilde{l}$ de M_1 dans M_2 définie par

$$\tilde{l}(x) = l(I)^* l(x)$$

pour tout $x \in M_1$, est un isomorphisme de Jordan. En utilisant (i), on en déduit (*ii*). L'assertion (*iii*) résulte alors du Théorème 3.3 de [10].

Remarquons que pour tout P de $\mathscr{P}_h$((resp. $\mathscr{P}_a$), l_P est un homomorphisme (resp. antihomomorphisme) involutif, puisque tout isomorphisme de Jordan est involutif par définition.

1.7. LEMME. *Soient P dans $\mathscr{P}_h$ (resp. $\mathscr{P}_a$) et Q un projecteur central de M_2 tel que $Q \leqslant P$. Alors Q appartient à $\mathscr{P}_h$(resp. $\mathscr{P}_a$).*

Démonstration. Cela résulte trivialement du fait que pour tout x de M_1, on a

$$l_Q(x) = l_P(x) Q.$$

1.8. LEMME. *L'ensemble $\mathscr{P}_h$ (resp. $\mathscr{P}_a$) est réticulé.*

Démonstration. Il suffit de prouver que si P et Q appartiennent à $\mathscr{P}_h$, le projecteur $P + Q - PQ$ appartient à $\mathscr{P}_h$.

Soient x et y dans M_1. On a

$$l_{P+Q-PQ}(x) l_{P+Q-PQ}(y) = [l_P(x) + l_{Q-PQ}(x)]\,[l_P(y) + l_{Q-PQ}(y)] =$$

$$= l_P(x) l_P(y) + l_{Q-PQ}(x) l_{Q-PQ}(y) =$$

$$= l_P(xy) + l_{Q-PQ}(xy)$$

car P appartient à $\mathscr{P}_h$, par hypothèse, et $Q - PQ$ appartient à $\mathscr{P}_h$ en utilisant 1.7. Finalement, on a

$$l_{P+Q-PQ}(x) l_{P+Q-PQ}(y) = l_{P+Q-PQ}(xy),$$

et donc $P + Q - PQ$ appartient à $\mathscr{P}_h$.

Le cas de $\mathscr{P}_a$ est identique.

1.9. LEMME. *L'ensemble $\mathscr{P}_h$ (resp. $\mathscr{P}_a$) possède un plus grand élément.*

Démonstration. D'après 1.8, l'ensemble $\mathscr{P}_h$ est filtrant croissant et possède donc une borne supérieure S_h qui est faiblement adhérente à $\mathscr{P}_h$. On va montrer que S_h appartient à $\mathscr{P}_h$.

Soient x et y dans M_1. On a

$$
\begin{aligned}
l_{S_h}(xy) &= l(xy)l(I)^*S_h = \\
&= \lim_{P\in\mathscr{P}_h} l(xy)l(I)^*P = \\
&= \lim_{P\in\mathscr{P}_h} l(x)l(I)^*Pl(y)l(I)^*P = \\
&= \lim_{P\in\mathscr{P}_h} l(x)l(I)^*l(y)l(I)^*P = \\
&= l(x)l(I)^*l(y)l(I)^*S_h = l_{S_h}(x)l_{S_h}(y),
\end{aligned}
$$

d'où le résultat.

La démonstration est identique pour $\mathscr{P}_a$.

1.10. DÉFINITION. On posera

$$S_h = \max \mathscr{P}_h$$

$$S_a = \max \mathscr{P}_a.$$

Remarquons que le théorème 1.6 (iii) entraîne

$$S_h + S_a \geqslant I.$$

2. ISOMÉTRIES DES PRÉDUAUX DES ALGÈBRES DE KAC

Soient $\mathbf{K}_1$ et $\mathbf{K}_2$ deux algèbres de Kac. On considère dans ce qui suit une bijection linéaire isométrique multiplicative T de M_{2*} sur M_{1*}. On notera l sa transposé qui est donc une bijection linéaire isométrique et ultrafaiblement continue de M_1 sur M_2.

2.1. LEMME. *L'opérateur $l(I)$ appartient au groupe intrinsèque de* $\mathbf{K}_2$ (cf. [8], I.10).

Démonstration. Soient ω et ω' dans M_{2*}. On a, successivement:

$$
\begin{aligned}
\langle \Gamma_2(l(I)),\ \omega \otimes \omega' \rangle &= \langle l(I), \omega * \mathring{\omega}' \rangle = \\
&= \langle I, T(\omega * \omega') \rangle = \\
&= \langle I, T(\omega) * T(\omega') \rangle = && \text{par hypothèse} \\
&= \langle \Gamma_1(I),\ T(\omega) \otimes T(\omega') \rangle =
\end{aligned}
$$

$$= \langle I \otimes I,\ T(\omega) \otimes T(\omega')\rangle =$$
$$= \langle I, T(\omega)\rangle \langle I, T(\omega')\rangle = \langle l(I),\omega\rangle \langle l(I),\ \omega'\rangle =$$
$$= \langle l(I) \otimes l(I),\ \omega \otimes \omega'\rangle$$

d'où par linéarité, densité et continuité

$$\Gamma_2(l(I)) = l(I) \otimes l(I).$$

D'après 1.6 (i), $l(I) \neq 0$, d'où le résultat.

2.2. LEMME. *Avec les notations de* 1.5, *on a, pour tout projecteur P du centre de M_2*

$$(l_P)_*(\omega) = T(l(I)^*P \cdot \omega),\quad \omega \in M_{2*}$$

(l_P étant ultrafaiblement continue, on peut considérer sa transposée

$$(l_P)_*\colon M_{2*} \to M_{1*}).$$

Démonstration. On a, pour tout x de M_1,

$$\langle x,(l_P)_*(\omega)\rangle = \langle l_P(x), \omega\rangle =$$
$$= \langle l(x)l(I)^*P,\ \omega\rangle = \qquad \text{d'après 1.5}$$
$$= \langle l(x),\ l(I)^*P \cdot \omega\rangle =$$
$$= \langle x,\ T(l(I)^*P\cdot\omega)\rangle$$

d'où le résultat.

2.3. LEMME. *Avec les notations de* 1.10, *on a, pour tout x de M_{1*}*

(i) $(l_{S_h} \otimes l_{S_h})(\Gamma_1(x)) = \Gamma_2(l_I(x))(S_h \otimes S_h)$

(ii) $(l_{S_a} \otimes l_{S_a})(\Gamma_1(x)) = \Gamma_2(l_I(x))(S_a \otimes S_a)$.

Démonstration. Soient ω et ω' dans M_{2*}. On a

$$\langle (l_{S_h}\otimes l_{S_h})(\Gamma_1(x)), \omega\otimes\omega'\rangle = \langle \Gamma_1(x), (l_{S_h})_*(\omega) \otimes (l_{S_h})_*(\omega')\rangle =$$
$$= \langle \Gamma_1(x),\ T(l(I)^*S_h\cdot\omega)\otimes T(l(I)^*S_h\cdot\omega')\rangle = \qquad \text{d'après 2.2}$$
$$= \langle x, T(l(I)^*S_h\cdot\omega)*T(l(I)^*S_h\cdot\omega')\rangle =$$
$$= \langle x, T((l(I)^*S_h\cdot\omega)*(l(I)^*S_h\cdot\omega'))\rangle = \qquad \text{par hypothèse}$$
$$= \langle l(x), (l(I)^*S_h\cdot\omega)*(l(I)^*S_h\cdot\omega')\rangle =$$
$$= \langle \Gamma_2(l(x)), (l(I)^*S_h\cdot\omega) \otimes (l(I)^*S_h\cdot\omega')\rangle =$$
$$= \langle \Gamma_2(l(x)), (l(I)^*S_h \otimes l(I)^*S_h)\cdot(\omega \otimes \omega')\rangle =$$
$$= \langle \Gamma_2(l(x))(l(I)^*S_h \otimes l(I)^*\ S_h),\ \omega \otimes \omega'\rangle =$$
$$= \langle \Gamma_2(l(x)l(I)^*)(S_h \otimes S_h), \omega \otimes \omega'\rangle = \qquad \text{d'après 2.1}$$
$$= \langle \Gamma_2(l_I(x))(S_h \otimes S_h),\ \omega \otimes \omega'\rangle \qquad \text{d'après 1.5.}$$

On en déduit (i) par linéarité, continuité et densité.

La démonstration de (ii) est identique.

2.4. COROLLAIRE. *Avec les notations de* 1.10, *on a*

(i) $\Gamma_2(S_h) \geqslant S_h \otimes S_h$

(ii) $\Gamma_2(S_a) \geqslant S_a \otimes S_a$.

Démonstration. Soit Q le projecteur du centre de M_2 tel que $\Gamma_2(Q)$ soit le support central de $S_h \otimes S_h$ dans le commutant de $\Gamma_2(M_2)$. (On a en effet $S_h \otimes S_h \in \in M_2' \otimes M_2' \subset (\Gamma_2(M_2))'$.) On notera Φ l'isomorphisme entre les algèbres involutives $\Gamma_2(M_2)(S_h \otimes S_h)$ et $\Gamma_2(M_2 Q)$.

Pour tout x de M_1, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(l_Q(x)) &= \Gamma_2(l(x)l(I)^*Q) = && \text{d'après 1.5}\\
&= \Gamma_2(l_I(x)Q) = && \text{d'après 1.5}\\
&= \Gamma_2(l_I(x))\,\Gamma_2(Q) = &&\\
&= \Phi[\Gamma_2(l_I(x))(S_h \otimes S_h)] = &&\\
&= \Phi[(l_{S_h} \otimes l_{S_h})(\Gamma_1(x))] && \text{d'après 2.3.}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'application $\Gamma_2 l_Q$ est multiplicative; comme Γ_2 est injective, l_Q est multiplicative, d'où $Q \leqslant S_h$ d'après 1.10. On a alors

$$\Gamma_2(S_h) \geqslant \Gamma_2(Q) \geqslant S_h \otimes S_h$$

par définition de Q, d'où (i). L'assertion (ii) se démontre de façon identique.

2.5. LEMME. *Soit R un projecteur vérifiant* 1.6. (iii). *Alors l'opérateur*

$$U = [(l_R \otimes i)(W_1^*) + (l_{I-R}\varkappa_1 \otimes i)(W_1)](l(I) \otimes I)$$

est un unitaire de $M_2 \otimes \widehat{M}_1$, et, pour tous ω de M_{2*} et θ de $\widehat{M}_{1*}$, on a

$$\langle U, \omega \otimes \theta \rangle = \langle \lambda_1(T\omega), \theta \rangle.$$

(*Remarquons que* l_R et $l_{I-R}\varkappa_1$ *sont des homomorphismes normaux de* M_1 *dans* M_2.)

Démonstration. On a

$$U^* = (l(I)^* \otimes I)\,[(l_R \otimes i)\,(W_1) + (l_{I-R}\varkappa_1 \otimes i)\,(W_1^*)]$$

et donc

$$\begin{aligned}
U^*U &= (l(I)^* \otimes I)\,[(l_R \otimes i)(W_1 W_1^*) + (l_{I-R}\varkappa_1 \otimes i)(W_1^* W_1)]\,(l(I) \otimes I) =\\
&= (l(I)^* \otimes I)\,[(l_R \otimes i)(I \otimes I) + (l_{I-R}\varkappa_1 \otimes i)(I \otimes I)]\,(l(I) \otimes I) =\\
&= (l(I)^* \otimes I)(R \otimes I + (I - R) \otimes I)(l(I) \otimes I) = \quad \text{d'après 1.5 et 1.6(i)}\\
&= I \otimes I \quad \text{d'après 1.6(i).}
\end{aligned}$$

On montrerait de même que $UU^* = I \otimes I$. Enfin, comme $W_1 \in M_1 \otimes \widehat{M}_1$, il est clair que U appartient à $M_2 \otimes \widehat{M}_1$.

On a ensuite

$$\langle U, \omega \otimes \theta \rangle = \langle (l_R \otimes i)(W_1^*),\ l(I) \cdot \omega \otimes \theta \rangle + \langle (l_{I-R} \varkappa_1 \otimes i)(W_1),\ l(I) \cdot \omega \otimes \theta \rangle =$$

$$= \langle W_1^*,\ (l_R)_*(l(I) \cdot \omega) \otimes \theta \rangle + \langle W_1,\ (l_{I-R})_*(l(I) \cdot \omega) \circ \varkappa_1 \otimes \theta \rangle =$$

$$= \langle W_1^*, (l_R)_*(l(I) \cdot \omega) \otimes \theta \rangle + \langle W_1^*, (l_{I-R})_*(l(I) \cdot \omega) \otimes \theta \rangle = \quad \text{d'après [8], II.13}$$

$$= \langle W_1^*,\ T(R \cdot \omega) \otimes \theta + T((I - R) \cdot \omega) \otimes \theta \rangle = \quad \text{d'après 2.2}$$

$$= \langle W_1^*,\ T(\omega) \otimes \theta \rangle =$$

$$= \langle \lambda_1(T(\omega)),\ \theta \rangle \quad \text{d'après [8], II.5,}$$

ce qui achève la démonstration.

2.6. COROLLAIRE. *L'application T est involutive.*

Démonstration. Avec les notations de 2.5, on a

$$\lambda_1(T(\omega)) = (\omega \otimes i)(U) =$$
$$= (i \otimes \omega)(\sigma U).$$

L'opérateur σU étant unitaire dans $\widehat{M}_1 \otimes M_2$, et l'application $\lambda_1 T$ étant multiplicative, il résulte de [3], 2.9. (i) que σU est un $1_{K_2}^{\widehat{M}_1}$-cocycle. En appliquant [3], 2.10, on obtient alors que $\lambda_1 T$ est une représentation (involutive) de M_{2*}; comme λ_1 est involutive et injective, on en déduit le corollaire.

2.7. LEMME. *Soit ω dans M_{2*}. On a*

$$l(I)^* \cdot \omega^\circ = (l(I)^* \cdot \omega)^\circ.$$

Démonstration. Soit x dans M_2. On a

$$\langle x,\ l(I)^* \cdot \omega^\circ \rangle = \langle x l(I)^*, \omega^\circ \rangle =$$

$$= \langle \varkappa_2(x l(I)^*)^*,\ \omega \rangle^- =$$

$$= \langle \varkappa_2(x^*) \varkappa_2(l(I)),\ \omega \rangle^- =$$

$$= \langle \varkappa_2(x^*) l(I)^*,\ \omega \rangle^- = \quad \text{d'après 2.1 et [8], I.10}$$

$$= \langle \varkappa_2(x^*),\ l(I)^* \cdot \omega \rangle^- =$$

$$= \langle x,\ (l(I)^* \cdot \omega)^\circ \rangle,$$

d'où le résultat.

2.8. COROLLAIRE. *On a, avec les notations de* 1.5 *et* 1.10:

(i) $\varkappa_2 l_I = l_I \varkappa_1$

(ii) $\varkappa_2(S_{\mathrm{h}}) = S_{\mathrm{h}}$

(iii) $\varkappa_2(S_{\mathrm{a}}) = S_{\mathrm{a}}$.

Démonstration. Soient x dans M_1 et ω dans M_{2*}. On a

$$\langle \varkappa_2 l_I(x), \omega\rangle = \langle \varkappa_2 l_I(x^*)^*, \omega\rangle = \qquad \text{d'après 1.6(ii)}$$
$$= \langle l_I(x^*), \omega^\circ\rangle^- =$$
$$= \langle x^*, (l_I)_*(\omega^\circ)\rangle^- =$$
$$= \langle x^*, T(l(I)^* \cdot \omega^\circ)\rangle^- = \qquad \text{d'après 2.2}$$
$$= \langle x^*, T[(l(I)^* \cdot \omega)^\circ]\rangle^- = \qquad \text{d'après 2.7}$$
$$= \langle x^*, T(l(I)^* \cdot \omega)^\circ\rangle^- = \qquad \text{d'après 2.6}$$
$$= \langle \varkappa_1(x), T(l(I)^* \cdot \omega)\rangle =$$
$$= \langle \varkappa_1(x), (l_I)_*(\omega)\rangle = \qquad \text{d'après 2.2}$$
$$= \langle l_I \varkappa_1(x), \omega\rangle$$

d'où (i).

Soient P dans $\mathscr{P}_{\mathrm{h}}$, x et y dans M_1. On a

$$l_{\varkappa_2(P)}(xy) = l(xy)l(I)^*\varkappa_2(P) = \qquad \text{d'après 1.5}$$
$$= l_I(xy)\varkappa_2(P) = \qquad \text{d'après 1.5}$$
$$= \varkappa_2(l_I\varkappa_1(xy)P) = \qquad \text{d'après (i)}$$
$$= \varkappa_2(l_P\varkappa_1(xy)) = \qquad \text{d'après 1.5}$$
$$= \varkappa_2[l_P(\varkappa_1(y)\varkappa_1(x))] =$$
$$= \varkappa_2(l_P\varkappa_1(y)l_P\varkappa_1(x)) = \qquad \text{par hypothèse}$$
$$= (\varkappa_2 l_P\varkappa_1(x))(\varkappa_2 l_P\varkappa_1(y)) =$$
$$= \varkappa_2(l_I\varkappa_1(x)P)\varkappa_2(l_I\varkappa_1(y)P) = \qquad \text{d'après 1.5}$$
$$= (\varkappa_2 l_I\varkappa_1(x))\varkappa_2(P)(\varkappa_2 l_I\varkappa_1(y))\varkappa_2(P) =$$
$$= l_I(x)\varkappa_2(P)l_I(y)\varkappa_2(P) = \qquad \text{d'après (i)}$$
$$= l_{\varkappa_2(P)}(x)l_{\varkappa_2(P)}(y) \qquad \text{d'après 1.5.}$$

Ainsi $\varkappa_2(P)$ appartient à $\mathscr{P}_h$. Donc, d'après 1.10, on a

$$\varkappa_2(S_h) \leqslant S_h$$

et, comme $\varkappa_2$ est involutif, on obtient (ii).

L'assertion (iii) se démontre de la même manière.

2.9. THÉORÈME. *Soient* $\mathbf{K}_1$ *et* $\mathbf{K}_2$ *deux algèbres de Kac. On suppose qu'il existe une bijection linéaire isométrique multiplicative* T *de l'algèbre de Banach* M_{2*} *sur l'algèbre de Banach* M_{1*}. *Alors* $\mathbf{K}_1$ *est isomorphe à* $\mathbf{K}_2$ *ou* $\mathbf{K}_2'$ (cf. [9], II.4). *Plus précisément, si* l *désigne la transposée de* T, *on a:*

(i) $l(I)$ *appartient au groupe intrinsèque de* $\mathbf{K}_2$.

(ii) *l'une au moins des deux assertions suivantes est vraie:*

1) *l'application* l_I *de* M_1 *sur* M_2 *définie par*

$$x \mapsto l(x)l(I)^* \qquad (x \in M_1)$$

est un isomorphisme d'algèbres de Kac de $\mathbf{K}_1$ *sur* $\mathbf{K}_2$ *(en particulier,* l_I *est un homomorphisme d'algèbres de von Neumann).*

2) l_I *est un antihomomorphisme d'algèbres de von Neumann et l'application de* M_1 *sur* M_2' *définie par*

$$x \mapsto J_2 l(I)l(x)^* J_2 \qquad (x \in M_1)$$

est un isomorphisme d'algèbres de Kac de $\mathbf{K}_1$ *sur* $\mathbf{K}_2'$.

Démonstration. D'après 1.10, 2.4.(i) et (ii), 2.8.(ii) et (iii), le couple de projecteurs (S_h, S_a) définis en 1.10 vérifie les hypothèses du Lemme 1.3 appliqué à $\mathbf{K}_2$. L'un des deux projecteurs S_h et S_a vaut donc I.

Supposons $S_h = I$. Alors l'application l_I est multiplicative, involutive d'après 1.6.(ii), bijective et normale par construction; elle vérifie

$$l_I(I) = I \qquad \text{d'après 1.6.(i),}$$

et aussi

$$\Gamma_2 l_I = (l_I \otimes l_I)\Gamma_1 \qquad \text{d'après 2.3.(i)}$$

$$\varkappa_2 l_I = l_I \varkappa_1 \qquad \text{d'après 2.8.(i).}$$

D'après [8], IV. 4, l_I est un isomorphisme d'algèbres de Kac de $\mathbf{K}_1$ sur $\mathbf{K}_2$.

Supposons $S_a = I$. Alors l'application l_I' définie pour tout x de M_1 par

$$l_I'(x) = J_2 l_I(x)^* J_2$$

est linéaire, multiplicative, involutive d'après 1.6. (ii), bijective et normale de M_1 sur M_2' par construction. Enfin, elle vérifie

$$l_I'(I) = I \qquad \text{d'après 1.6.(i)}$$

$$\Gamma_2' l_I' = (l_I' \otimes l_I')\Gamma_1 \qquad \text{d'après 2.3.(i) et [9], II.4}$$

$$\varkappa_2' l_I' = l_I' \varkappa_1 \qquad \text{d'après 2.8.(i) et [9], II.4.}$$

D'après [8], IV.4, l'_I est un isomorphisme d'algèbres de Kac de $\mathbb{K}_1$ sur $\mathbb{K}_2'$.

Ainsi (ii) est démontré; (i) a été démontré en 2.1.

2.10. LEMME. *Soit* $\mathbb{K}$ *une algèbre de Kac, et* $\mathbb{K}'$ *l'algèbre de Kac commutante* ([9], II.4). *Soit* ω *dans* M_*; *on note* ω' *l'élément de* M'_* *défini par*

$$\langle x, \omega' \rangle = \langle Jx^*J, \omega \rangle \qquad (x \in M').$$

En notant λ' *la représentation de Fourier du prédual* M'_*, *on a*

$$\lambda'(\omega') = \lambda(\omega).$$

Démonstration. Soient α et γ dans $\mathscr{H}$. Pour tout x de M', on a

$$\langle x, (\omega_{\gamma,\alpha})' \rangle = \langle Jx^*J, \omega_{\gamma,\alpha} \rangle = (Jx^*J\gamma | \alpha) = (xJ\alpha | J\gamma).$$

Soient également β et δ dans $\mathscr{H}$. On a

$$(\beta | \lambda'((\omega_{\gamma,\alpha})')\delta) = (W'(J\gamma \otimes \beta) | J\alpha \otimes \delta) = \qquad \text{d'après [4], 2.1.5.(a), et ce qui précède}$$

$$= ((J \otimes J)W(J \otimes J)(J\gamma \otimes \beta) | J\alpha \otimes \delta) = \qquad \text{d'après [9], II.10}$$

$$= (W(\gamma \otimes J\beta) | \alpha \otimes J\delta)^- =$$

$$= (J\beta | \lambda(\omega_{\alpha,\gamma})J\delta)^- = \qquad \text{d'après [4], 2.1.5.(a),}$$

$$= (\beta | J\lambda(\omega_{\alpha,\gamma})J\delta) =$$

$$= (\beta | \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\delta) \qquad \text{d'après [4], 2.2.3,}$$

d'où le résultat.

2.11. LEMME. *On se place dans le deuxième cas du* (ii) *du Théorème* 2.9. *On note* l_I' *l'isomorphisme de* $\mathbb{K}_1$ *sur* $\mathbb{K}_2'$ *qui y est défini. Pour tout* ω *de* M_{2*}, *on a, avec les notations de* 2.10,

$$(l_I')_*(\omega') = T(l(I)^* \cdot \omega).$$

Démonstration. Soit x dans M_1; on a

$$(x, (l'_I)_*(\omega')\rangle = \langle l'_I(x), \omega'\rangle = \langle l_I(x), \omega\rangle = \langle x, (l_I)_*(\omega)\rangle = \langle x, T(l(I)^* \cdot \omega)\rangle$$

d'après 2.2, d'où le résultat.

2.12. COROLLAIRE. *Soient $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ deux algèbres de Kac. On suppose qu'il existe une bijection linéaire isométrique multiplicative T de l'algèbre de Banach M_{2*} sur l'algèbre de Banach M_{1*}. Alors $\hat{\mathbb{K}}_2$ est isomorphe à $\hat{\mathbb{K}}_1$ ou à $\hat{\mathbb{K}}_1^\sigma$* (cf. [9], II.6). *Plus précisément, si l désigne la transposée de T, on a:*

(i) *$l(I)$ appartient au groupe intrinsèque de $\mathbb{K}_2$.*

(ii) *il existe un isomorphisme d'algèbres de Kac Φ de $\hat{\mathbb{K}}_2$ sur $\hat{\mathbb{K}}_1$ ou $\hat{\mathbb{K}}_1^\sigma$ (dans le premier cas l_I est un homomorphisme d'algèbres de von Neumann de M_1 sur M_2, dans le second cas c'est un antihomomorphisme) tel que, pour tout ω de M_{2*}, on ait*

$$\Phi(\hat{\beta}_{l(I)}(\lambda_2(\omega))) = \lambda_1(T\omega)$$

(où $\hat{\beta}_{l(I)}$ désigne l'automorphisme de $\hat{M}_2$ implémenté par $l(I)$ — cf. [8] I.9 et [2], § 2).

Démonstration. Plaçons-nous dans le premier cas de 2.9(ii). Alors l_I est un isomorphisme de $\mathbf{K}_1$ sur $\mathbf{K}_2$. L'isomorphisme dual $\hat{l}_I$ de $\hat{\mathbb{K}}_2$ sur $\hat{\mathbb{K}}_1$ est défini, pour tout ω de M_{2*}, par

$$\hat{l}_I(\lambda_2(\omega)) = \lambda_1((l_I)_*(\omega)) = \qquad \text{d'après [4], 6.2.2}$$

$$= \lambda_1(T(l(I)^* \cdot \omega)) \qquad \text{d'après 2.2.}$$

Or, d'après [1], 2.6(b), on a

$$\hat{l}_I(\hat{\beta}_{l(I)}(\lambda_2(\omega))) = \hat{l}_I(\lambda_2(l(I) \cdot \omega)) = \lambda_1(T(\omega))$$

d'après 1.6(i) et ce qui précède. Le théorème est donc vérifié pour $\Phi = \hat{l}_I$.

Plaçons-nous maintenant dans le deuxième cas de 2.9(ii). Alors l'_I est un isomorphisme de $\mathbf{K}_1$ sur $\mathbf{K}'_2$. L'isomorphisme dual $\hat{l}'_I$ de $\hat{\mathbb{K}}_2^\sigma$ sur $\hat{\mathbb{K}}_1$ (cf. [9], II.5) sera aussi, trivialement, un isomorphisme de $\hat{\mathbb{K}}_2$ sur $\hat{\mathbb{K}}_1^\sigma$. D'après [4], 6.2.2, il est défini pour tout ω' de $(M'_2)_*$ par

$$\hat{l}'_I(\lambda'_2(\omega')) = \lambda_1((l'_I)_*(\omega')) \qquad \text{(notations de 2.10).}$$

En utilisant les Lemmes 2.10 et 2.11, cela s'écrit aussi

$$\hat{l}'_I(\lambda_2(\omega)) = \lambda_1(T(l(I)^* \cdot \omega)).$$

Comme précédemment, on peut en déduire que le théorème est vérifié en prenant $\Phi = \hat{l}'_I$.

2.13. COROLLAIRE. *Soient* $\mathbb{K}_1$ *et* $\mathbb{K}_2$ *deux algèbres de Kac. On suppose qu'il existe une bijection linéaire isométrique multiplicative* T *de l'algèbre de Fourier* $A(\mathbb{K}_1)$ *sur l'algèbre de Fourier* $A(\mathbb{K}_2)$ (cf. [3], 3.2(ii)). *Alors l'algèbre de Kac* $\mathbb{K}_1$ *est isomorphe à* $\mathbb{K}_2$ *ou à* $\mathbb{K}_2^a$. *Plus précisément, si (modulo les isomorphismes canoniques entre* $\hat{M}_{i*}$ *et* $A(\mathbb{K}_i)$ $(i = 1, 2)$, *voir* [3], 3.2.(ii)) l *désigne l'application linéaire de* $\hat{M}_2$ *dans* $\hat{M}_1$ *transposée de* T, *on a*

(i) $l(I)$ *appartient au groupe intrinsèque de* $\mathbb{K}_1$.

(ii) *il existe un isomorphisme d'algèbres de Kac* Φ *de* $\mathbb{K}_1$ *sur* $\mathbb{K}_2$ *ou* $\mathbb{K}_2^a$ *(dans le premier cas* l_I *est un homomorphisme d'algèbres de von Neumann de* $\hat{M}_2$ *dans* $\hat{M}_1$, *dans le second cas c'est un antihomomorphisme) tel que, pour tout* θ *de* $A(\mathbb{K}_1)$, *on ait*

$$\Phi(\beta_{l(I)}(\varkappa_1\pi_{1*}(\theta))) = \varkappa_2\pi_{2*}(T(\theta)).$$

Démonstration. Compte tenu de [3], 3.7(i), ce n'est que le corollaire 2.12 appliqué au couple $(\hat{\mathbb{K}}_2, \hat{\mathbb{K}}_1)$.

2.14. COROLLAIRE. *Soient* $\mathbb{K}_1$ *et* $\mathbb{K}_2$ *deux algèbres de Kac. Soit* Ψ *un isomorphisme normal de* M_1 *sur* M_2 *tel que*

$$\Gamma_2\Psi = (\Psi \otimes \Psi)\,\Gamma_1.$$

Alors Ψ *est un isomorphisme d'algèbres de Kac de* $\mathbb{K}_1$ *sur* $\mathbb{K}_2$.

Démonstration. Appliquons 2.9 à l'application transposée $\Psi_*: M_{2*} \to M_{1*}$, qui vérifie les hypothèses de ce théorème. Mais, de plus, comme Ψ est multiplicatif, on est dans le premier cas de 2.9(ii); enfin, comme on a nécessairement $\Psi(I) = I$, on obtient le résultat.

2.15. COROLLAIRE. *Soit* $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ *une algèbre de Kac. Si* $(M, \Gamma, \tilde{\varkappa}, \tilde{\varphi})$ *est une algèbre de Kac, on a* $\tilde{\varkappa} = \varkappa$ *et* $\tilde{\varphi}$ *est proportionnel à* φ.

Démonstration. On applique 2.14 à l'application identique de M. Ce résultat provient alors de [4], 5.1.2.

Ainsi la donnée du coproduit Γ détermine complètement la structure d'algèbre de Kac.

3. ISOMÉTRIES DES ALGÈBRES DE FOURIER-STIELTJES

Soient $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ deux algèbres de Kac. On considère dans ce qui suit une bijection linéaire isométrique multiplicative T de $B(\mathbb{K}_2)$ sur $B(\mathbb{K}_1)$ (voir [3], 2.15). On notera l sa transposée qui est donc une bijection linéaire isométrique et ultrafaiblement continue de $W^*(\mathbb{K}_1)$ sur $W^*(\mathbb{K}_2)$ (voir [3], 2.15).

3.1. LEMME. *L'opérateur $l(I)$ appartient au groupe intrinsèque de $W^*(\mathbf{K}_2)$.*

Démonstration. La démonstration est en tous points analogue à 2.1: il résulte en effet de 1.6(i) que $l(I)$ est inversible (voir [3], 2.17).

3.2. COROLLAIRE. *L'opérateur $s_{\lambda_2}(l(I))$ appartient au groupe intrinsèque de $\hat{\mathbf{K}}_2$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer [3], 2.21(ii).

3.3. LEMME. *Soit* $\mathbf{K}$ *une algèbre de Kac. En utilisant les notations introduites au paragraphe* 2 *de* [3], *on pose:*

$$\mathcal{Q} = \{Q;\, Q \text{ projecteur de } W^*(\mathbf{K}),\ Q \neq I,\ s_{\pi\times\pi}(Q) \leqslant Q \otimes Q\}.$$

Alors $\mathcal{Q}$ possède un plus grand élément, et $\max \mathcal{Q} = I - \operatorname{supp} s_\lambda$.

Démonstration. Il est clair que le projecteur $I - \operatorname{supp} s_\lambda$ est différent de I (sans quoi on aurait $\lambda = 0$). De plus, on a

$$(s_\lambda \otimes i)\, s_{\pi\times\pi}(I - \operatorname{supp} s_\lambda) = s_{\lambda\times\pi}(I - \operatorname{supp} s_\lambda) = \qquad \text{d'après [3], 2.2(i)}$$

$$= \sigma\hat{\beta}_\pi s_\lambda(I - \operatorname{supp} s_\lambda) = 0. \qquad \text{d'après [3], 2.14(iii)}$$

Donc

$$s_{\pi\times\pi}(I - \operatorname{supp} s_\lambda) \in \operatorname{Ker}(s_\lambda \otimes i)$$

d'où

(*) $$s_{\pi\times\pi}(I - \operatorname{supp} s_\lambda) \leqslant (I - \operatorname{supp} s_\lambda) \otimes I.$$

De plus, on a

$$s_\lambda s_{\check{\pi}}(I - \operatorname{supp} s_\lambda) = \hat{\varkappa} s_\lambda(I - \operatorname{supp} s_\lambda) = 0 \qquad \text{d'après [3], 2.16}$$

donc

$$s_{\check{\pi}}(I - \operatorname{supp} s_\lambda) \leqslant I - \operatorname{supp} s_\lambda$$

et, comme $s_{\check{\pi}}$ est involutif, on en déduit

(**) $$s_{\check{\pi}}(I - \operatorname{supp} s_\lambda) = I - \operatorname{supp} s_\lambda.$$

On peut alors écrire

$$s_{\pi\times\pi}(I - \operatorname{supp} s_\lambda) = s_{\pi\times\pi}(s_{\check{\pi}}(I - \operatorname{supp} s_\lambda)) =$$

$$= \sigma(s_{\check{\pi}} \otimes s_{\check{\pi}})\, s_{\pi\times\pi}(I - \operatorname{supp} s_\lambda) \leqslant \qquad \text{d'après [3], 2.4(ii)}$$

$$\leqslant \sigma(s_{\check{\pi}}(I - \operatorname{supp} s_\lambda) \otimes I) = \qquad \text{d'après (*)}$$

$$= I \otimes (I - \operatorname{supp} s_\lambda) \qquad \text{d'après (**).}$$

Finalement, en utilisant encore $(*)$, il vient

$$s_{\pi\times\pi}(I - \text{supp}s_\lambda) \leqslant (I - \text{supp}s_\lambda) \otimes (I - \text{supp}s_\lambda)$$

et ainsi $I - \text{supp}s_\lambda \in \mathcal{Q}$.

Soit maintenant $Q \in \mathcal{Q}$. Alors

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}(s_\lambda(Q)) &= \hat{\beta}_\lambda(s_\lambda(Q)) = && \text{d'après [3], 2.14(iv)}\\
&= \sigma s_{\lambda\times\lambda}(Q) = && \text{d'après [3], 2.14(iii)}\\
&= \sigma(s_\lambda \otimes s_\lambda)\, s_{\pi\times\pi}(Q) \leqslant && \text{d'après [3], 2.2(ii)}\\
&\leqslant \sigma(s_\lambda \otimes s_\lambda)\,(Q \otimes Q) = && \text{par hypothèse}\\
&= s_\lambda(Q) \otimes s_\lambda(Q).
\end{aligned}$$

Il résulte donc de 1.4 que $s_\lambda(Q)$ est égal à 0 ou I. Supposons $s_\lambda(Q) = I$; cela équivaut à $Q \geqslant \text{supp}s_\lambda$, ce qui implique

$$Q + (I - \text{supp}s_\lambda) \geqslant I,$$

d'où

$$s_{\pi\times\pi}(Q) + s_{\pi\times\pi}(I - \text{supp}s_\lambda) \geqslant I \otimes I$$

et donc, a fortiori,

$$Q \otimes Q + (I - \text{supp}s_\lambda) \otimes (I - \text{supp}s_\lambda) \geqslant I \otimes I.$$

Comme Q et $I - \text{supp}s_\lambda$ sont différents de I, cela est impossible d'après 1.1. On a donc $s_\lambda(Q) = 0$, soit $Q \leqslant I - \text{supp}s_\lambda$, d'où le lemme.

3.4. LEMME. *Avec les notations de* 1.5, *on a*

$$(l_I)_*(\theta) = T(l(I)^* \cdot \theta) \qquad \textit{pour tout } \theta \textit{ de } B(\mathbf{K}_2)$$

(l_I étant ultrafaiblement continue, on peut considérer sa transposée $(l_I)_*: B(\mathbf{K}_2) \to B(\mathbf{K}_1)$).

De plus, si θ est positif, $T(l(I)^* \cdot \theta)$ l'est aussi.

Démonstration. La démonstration de la première partie du lemme est en tous points identique à celle de 2.2.

Supposons θ positif, et x positif dans $W^*(\mathbf{K}_1)$. Alors

$$\langle x, (l_I)_*(\theta)\rangle = \langle l_I(x), \theta\rangle \geqslant 0$$

car l_I est un isomorphisme de Jordan d'après 1.6(ii).

3.5. LEMME. *Avec les constructions et notations de 3.3 associées aux deux algèbres de Kac* $\mathbf{K}_1$ *et* $\mathbf{K}_2$, *on a*

$$l_I(Q_1) = Q_2.$$

Démonstration. Soit $Q \in Q_1$. Comme l_I est un isomorphisme de Jordan, $l_I(Q)$ est un projecteur de $W^*(\mathbf{K}_2)$; de plus, il est différent de I car on a clairement que $l_I(Q) = I$ équivaut à $Q = I$.

Soient θ et θ' positifs dans $B(\mathbf{K}_2)$. On a

$$\langle s_{\pi_2\times\pi_2}(l_I(Q)), \theta\otimes\theta'\rangle = \langle s_{\pi_2\times\pi_2}(l(Q)\,l(I)^*), \theta\otimes\theta'\rangle = \qquad \text{d'après 1.5}$$

$$= \langle s_{\pi_2\times\pi_2}(l(Q))(l(I)^*\otimes l(I)^*), \theta\otimes\theta'\rangle = \qquad \text{d'après 3.1}$$

$$= \langle s_{\pi_2\times\pi_2}(l(Q)), l(I)^*\cdot\theta\otimes l(I)^*\cdot\theta'\rangle =$$

$$= \langle l(Q), (l(I)^*\cdot\theta')*(l(I)^*\cdot\theta)\rangle =$$

$$= \langle Q, T((l(I)^*\cdot\theta')*(l(I)^*\cdot\theta))\rangle =$$

$$= \langle Q, T(l(I)^*\cdot\theta')*T(l(I)^*\cdot\theta)\rangle = \qquad \text{par hypothèse}$$

$$= \langle s_{\pi_1\times\pi_1}(Q), T(l(I)^*\cdot\theta)\otimes T(l(I)^*\cdot\theta')\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \langle Q\otimes Q, T(l(I)^*\cdot\theta)\otimes T(l(I)^*\cdot\theta')\rangle = \qquad \text{d'après 3.4}$$

$$= \langle Q, T(l(I)^*\cdot\theta)\rangle\langle Q, T(l(I)^*\cdot\theta')\rangle =$$

$$= \langle Q, (l_I)_*(\theta)\rangle\langle Q, (l_I)_*(\theta')\rangle = \qquad \text{d'après 3.4}$$

$$= \langle l_I(Q), \theta\rangle\langle l_I(Q), \theta'\rangle =$$

$$= \langle l_I(Q)\otimes l_I(Q), \theta\otimes\theta'\rangle.$$

En utilisant le Lemme 1.2, on en déduit

$$s_{\pi_2\times\pi_2}(l_I(Q)) \leqslant l_I(Q)\otimes l_I(Q)$$

et donc $l_I(Q)$ appartient à Q_2.

On a ainsi $l_I(Q_1) \subset Q_2$. Comme l_I est bijective, on montrerait de même $l_I^{-1}(Q_2) \subset Q_1$, d'où le résultat.

3.6. COROLLAIRE. *On a* $l_I(I - \operatorname{supp} s_{\lambda_1}) = I - \operatorname{supp} s_{\lambda_2}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer 3.3 en considérant que l_I respecte l'ordre.

3.7. LEMME. *Soit* $\mathbf{K}$ *une algèbre de Kac; un élément* θ *de* $B(\mathbf{K})$ *appartient à* $A(\mathbf{K})$ *si est seulement s'il s'annule sur* Ker s_λ.

Démonstration. Soit ω dans $\hat{M}_*$. Pour tout x dans $\operatorname{Ker} s_\lambda$ on a

$$\langle x, (s_\lambda)_*(\omega)\rangle = \langle s_\lambda(x), \omega\rangle = 0.$$

Ainsi tout élément de $A(\mathbf{K})$ s'annule sur $\operatorname{Ker} s_\lambda$ (voir [3], 3.2(ii)). Réciproquement, soit $\theta \in B(\mathbf{K})$ tel que $\langle x, \theta\rangle = 0$ pour tout x de $\operatorname{Ker} s_\lambda$. On peut alors définir une application linéaire ω sur $\hat{M}$ en posant:

$$\langle s_\lambda(z), \omega\rangle = \langle z, \theta\rangle \qquad \text{pour tout } z \text{ de } W^*(\mathbf{K}).$$

En fait, ω apparaît comme la composée de la restriction de θ à l'algèbre réduite $W^*(\mathbf{K})_{\operatorname{supp} s_\lambda}$, par l'isomorphisme canonique entre $W^*(\mathbf{K})_{\operatorname{supp} s_\lambda}$ et $\hat{M}$; ω est donc ultrafaiblement continue, et appartient ainsi à $\hat{M}_*$. On trouve alors facilement $\theta = (s_\lambda)_*(\omega)$, ce qui achève la démonstration.

3.8. LEMME. *On a* $l(\operatorname{Ker} s_{\lambda_1}) = \operatorname{Ker} s_{\lambda_2}$.

Démonstration. L'idéal $\operatorname{Ker} s_{\lambda_1}$ est engendré par le projecteur $I - \operatorname{supp} s_{\lambda_1}$. Soit x dans $W^*(\mathbf{K}_1)$. Comme l_I est un isomorphisme de Jordan (1.6(ii)), on a

$$l_I(x(I - \operatorname{supp} s_{\lambda_1})) = \frac{1}{2}[l_I(x)\, l_I(I - \operatorname{supp} s_{\lambda_1}) + l_I(I - \operatorname{supp} s_{\lambda_1})\, l_I(x)] =$$
$$= l_I(x)(I - \operatorname{supp} s_{\lambda_2}),$$

d'après 3.6. Comme l_I est bijectif, on a donc

$$l_I(\operatorname{Ker} s_{\lambda_1}) = \operatorname{Ker} s_{\lambda_2}.$$

Comme $l(I)$ est unitaire et $\operatorname{Ker} s_{\lambda_2}$ est un idéal bilatère, le lemme s'en déduit.

3.9. COROLLAIRE. *On a* $T(A(\mathbf{K}_2)) = A(\mathbf{K}_1)$.

Démonstration. Soit θ dans $B(\mathbf{K}_2)$; $T(\theta)$ s'annule sur $\operatorname{Ker} s_{\lambda_1}$ si et seulement si θ s'annule sur $l(\operatorname{Ker} s_{\lambda_1}) = \operatorname{Ker} s_{\lambda_2}$ (d'après 3.8). D'où le résultat, grâce à 3.7.

3.10. DÉFINITION. La restriction de T à $A(\mathbf{K}_2)$ vérifie les hypothèses de 2.13. Il existe donc un élément u du groupe intrinsèque de $\hat{\mathbf{K}}_2$, et un isomorphisme d'algèbres de Kac Φ de $\mathbf{K}_2$ sur $\mathbf{K}_1$ (ou $\mathbf{K}_1^\sigma$) tels que, pour tout θ de $A(\mathbf{K}_2)$, on ait

$$\Phi(\beta_u(\varkappa_2\pi_{2*}(\theta))) = \varkappa_1\pi_{1*}(T\theta).$$

Déterminons u plus précisément:
L'application $(s_{\lambda_1})_*^{-1}T(s_{\lambda_2})_*$ est une bijection linéaire isométrique de $\hat{M}_{2*}$ sur $\hat{M}_{1*}$ qu'on notera $\tilde{T}$. Soit $\tilde{l}$: $\hat{M}_1 \to \hat{M}_2$ sa transposée. Par 2.13, on a $u = \tilde{l}(I)$. En transposant la relation $T(s_{\lambda_2})_* = (s_{\lambda_1})_* \tilde{T}$ qui définit $\tilde{T}$, on obtient

$$s_{\lambda_2} l = \tilde{l} s_{\lambda_1},$$

par définitions de l et $\tilde{l}$. On a ainsi

$$u = \tilde{l}(I) = s_{\lambda_2}(l(I)).$$

3.11. Lemme. *Avec les notations de* 3.10, *on a*

$$\Phi(\beta_{s_{\lambda_2}(I)}(\varkappa_2\pi_{2*}(\theta))) = \varkappa_1\pi_{1*}(T(\theta))$$

pour tout θ de $B(\mathbf{K}_2)$.

Démonstration. Pour simplifier, on posera $\beta = \beta_{s_{\lambda_2}(I)}$. D'après 3.10, la relation est démontrée pour les éléments de $A(\mathbf{K}_2)$. Soit ω dans $\hat{M}_{2*}$. Rappelons que $(s_{\lambda_2})_*(\omega)$ est l'élément générique de $A(\mathbf{K}_2)$, et que $A(\mathbf{K}_2)$ est un idéal bilatère de $B(\mathbf{K}_2)$ ([3], 3.6). En appliquant 3.10, on trouve donc

$$\Phi(\beta(\varkappa_2\pi_{2*}(\theta*(s_{\lambda_2})_*(\omega)))) = \varkappa_1\pi_{1*}(T(\theta*(s_{\lambda_2})_*(\omega)))$$

soit

$$\Phi\beta\varkappa_2\pi_{2*}(\theta)\Phi\beta\varkappa_2\pi_{2*}(s_{\lambda_2})_*(\omega) = \varkappa_1\pi_{1*}T(\theta)\varkappa_1\pi_{1*}T(s_{\lambda_2})_*(\omega)$$

puis, en utilisant à nouveau 3.10

$$\Phi\beta\varkappa_2\pi_{2*}(\theta)\Phi\beta\varkappa_2\pi_{2*}(s_{\lambda_2})_*(\omega) = \varkappa_1\pi_{1*}T(\theta)\Phi\beta\varkappa_2\pi_{2*}(s_{\lambda_2})_*(\omega)$$

se qui s'écrit encore, grâce à [3], 3.7(i)

$$\Phi\beta\varkappa_2\pi_2(\theta)\Phi\beta\hat{\lambda}_2(\omega) = \varkappa_1\pi_{1*}T(\theta)\ \Phi\beta\hat{\lambda}_2(\omega).$$

On obtient alors le résultat en faisant tendre $\hat{\lambda}_2(\omega)$ vers I.

3.12. Théorème. *Soient* $\mathbf{K}_1$ *et* $\mathbf{K}_2$ *deux algèbres de Kac. On suppose qu'il existe une bijection linéaire isométrique multiplicative* T *de l'algèbre de Fourier-Stieltjes* $B(\mathbf{K}_2)$ *sur* $B(\mathbf{K}_1)$. *Alors l'algèbre de Kac* $\mathbf{K}_2$ *est isomorphe à* $\mathbf{K}_1$ *ou* $\mathbf{K}_1^\sigma$. *Plus précisèment, si* l *désigne la transposée de* T, *on a:*

(i) $s_{\lambda_2}(l(I))$ *appartient au groupe intrinsèque de* $\hat{\mathbf{K}}_2$.

(ii) *il existe un isomorphisme d'algèbres de Kac* Φ *de* $\mathbf{K}_2$ *sur* $\mathbf{K}_1$ *ou* $\mathbf{K}_1^\sigma$ *(dans le premier cas* l_I *est un homomorphisme d'algèbres de von Neumann de* $W^*(\mathbf{K}_1)$ *sur* $W^*(\mathbf{K}_2)$, *dans le second c'est un antihomomorphisme) tel que, pour tout* θ *de* $B(\mathbf{K}_2)$, *on ait*

$$\Phi(\beta_{s_{\lambda_2}}(l(I))(\varkappa_2\pi_{2*}(\theta))) = \varkappa_1\pi_{1*}(T(\theta)).$$

Démonstration. Il suffit de rassembler 3.2 et 3.11.

3.13. COROLLAIRE. *Soient* $\mathbf{K}_1$ *et* $\mathbf{K}_2$ *deux algèbres de Kac. Soit* Ψ *un isomorphisme normal de* $W^*(\mathbf{K}_1)$ *sur* $W^*(\mathbf{K}_2)$ *tel que*

$$s_{\pi_2\times\pi_2}\Psi = (\Psi\otimes\Psi)s_{\pi_1\times\pi_1}$$

(autrement dit, Ψ *respecte les coproduits canoniques sur* $W^*(\mathbf{K}_1)$ *et* $W^*(\mathbf{K}_2)$*). Alors, il existe un isomorphisme d'algèbres de Kac* Φ *de* $\mathbf{K}_2$ *sur* $\mathbf{K}_1$ *tel que, pour tout* ω *de* M_{1*},

$$\Psi(\pi_1(\omega)) = \pi_2(\omega\circ\Phi).$$

On en déduit que

$$s_{\check{\pi}_2}\Psi = \Psi s_{\check{\pi}_1}.$$

Démonstration. On applique 3.12 à l'application transposée $\Psi_*: B(\mathbf{K}_2)\to B(\mathbf{K}_1)$. Comme Ψ est multiplicative, on se trouve dans le premier cas; de plus comme $\Psi(I)=I$, il existe un isomorphisme Φ de $\mathbf{K}_2$ sur $\mathbf{K}_1$ tel que pour tout θ de $B(\mathbf{K}_2)$ on ait

$$\Phi(\varkappa_2\pi_{2*}(\theta)) = \varkappa_1\pi_{1*}(\Psi_*(\theta)).$$

Comme $\Phi\circ\varkappa_2 = \varkappa_1\circ\Phi$, cela s'écrit aussi

$$\Phi(\pi_{2*}(\theta)) = \pi_{1*}(\Psi_*(\theta)).$$

On a donc, pour tout ω de M_{1*}:

$$\begin{aligned}\langle\Psi(\pi_1(\omega)),\theta\rangle &= \langle\omega,\pi_{1*}\Psi_*(\theta)\rangle = \\ &= \langle\omega,\Phi\pi_{2*}(\theta)\rangle = \\ &= \langle\omega\circ\Phi,\pi_{2*}(\theta)\rangle = \\ &= \langle\pi_2(\omega\circ\Phi),\theta\rangle\end{aligned}$$

d'où le premier résultat.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}s_{\check{\pi}_2}\Psi\pi_1(\omega) &= s_{\check{\pi}_2}\pi_2(\omega\circ\Phi) = \\ &= \check{\pi}_2(\omega\circ\Phi) = \\ &= \pi_2(\omega\circ\Phi\circ\varkappa_2) = \\ &= \pi_2(\omega\circ\varkappa_1\circ\Phi) = \\ &= \Psi\pi_1(\omega\circ\varkappa_1) = \\ &= \Psi\check{\pi}_1(\omega) = \\ &= \Psi s_{\check{\pi}_1}\pi_1(\omega),\end{aligned}$$

d'où le deuxième résultat, par densité ultrafaible de $\pi_1(M_{1*})$ dans $W^*(\mathbf{K}_1)$.

4. APPLICATIONS

Dans ce qui suit, G, G_1 et G_2 désignent des groupes localement compacts.

4.1. PROPOSITION. *Soit G un groupe localement compact. La représentation régulière gauche λ_G réalise un isomorphisme bicontinu de G sur $G(KS(G))$.*

Démonstration. Notons $\hat{\lambda}$ la représentation de Fourier de $\mathscr{M}(G)_*$. Soit u dans le groupe intrinsèque de $KS(G)$. La forme linéaire sur $A(G)$ définie par

$$\hat{\lambda}(\theta) \mapsto \langle u, \theta\rangle \qquad \text{pour } \theta \text{ dans } \mathscr{M}(G)_*$$

est un caractère sur $A(G)$, non nul. Donc, d'après [5], Th. 3.34, il existe s dans G tel que

$$\langle u, \theta\rangle = \hat{\lambda}(\theta)(s) = \langle \lambda_G(s^{-1}), \theta\rangle$$

pour tout θ de $\mathscr{M}(G)_*$, et donc $u = \lambda_G(s^{-1})$. De plus, l'application $s \mapsto \lambda_G(s^{-1})$ ainsi définie de G sur le spectre de $\mathscr{M}(G)_*$ (ou de $A(G)$) est bicontinue d'après ce même résultat, d'où la proposition.

4.2. PROPOSITION. *Soit Φ un isomorphisme d'algèbres de Kac de $KS(G_1)$ sur $KS(G_2)$ (resp. de $KA(G_2)$ sur $KA(G_1)$). Alors, en utilisant les notations de* [4], 8.1.3(b) *(resp.* 8.1.1(b)*), il existe un unique isomorphisme bicontinu α de G_1 sur G_2 tel que $\Phi = KS(\alpha)$ (resp. $\Phi = KA(\alpha)$).*

Démonstration. Soit Φ un isomorphisme entre deux algèbres de Kac $\mathbf{K}_1$ et $\mathbf{K}_2$; il est clair que la restriction de Φ à $G(\mathbf{K}_1)$ est un isomorphisme bicontinu de $G(\mathbf{K}_1)$ sur $G(\mathbf{K}_2)$.

Dans le cas où Φ est un isomorphisme de $KS(G_1)$ sur $KS(G_2)$, notons α la transmuée par λ_{G_1} et λ_{G_2} de cette restriction. Alors, d'après 4.1, α est un isomorphisme bicontinu de G_1 sur G_2, tel que, pour tout s de G_1,

$$\Phi(\lambda_{G_1}(s)) = \lambda_{G_2}(\alpha(s)).$$

Autrement dit, on a $\Phi = KS(\alpha)$.

Dans le cas où Φ est un isomorphisme de $KA(G_2)$ sur $KA(G_1)$, l'isomorphisme dual $\hat{\Phi}$ est un isomorphisme de $KS(G_1)$ sur $KS(G_2)$. D'après ce qui précède, il existe un isomorphisme bicontinu α de G_1 sur G_2 tel que $\hat{\Phi} = KS(\alpha)$, d'où le résultat, par dualité ([4], 8.1.4(c)).

Enfin, l'unicité résulte de [4], 8.1.6.

4.3. REMARQUE. Les deux résultats précédents figurent déjà dans [4] (8.2.9(b) et 8.3.1(b)); mais ils y sont prouvés en utilisant le théorème de Wendel. Les démonstrations ci-dessus, beaucoup plus simples, sont indépendantes à la fois de [12] et des Chapitres 1 à 3. Les théorèmes suivants (4.4 et 4.5) d'analyse harmonique apparaissent donc comme des corollaires des deux propositions ci-dessus et des résultats des Chapitres 2 et 3.

4.4. COROLLAIRE. (Wendel [12] (resp. Johnson [6])). *Soit T une bijection linéaire isométrique multiplicative de $L^1(G_1)$ sur $L^1(G_2)$ (resp. de $M^1(G_1)$ sur $M^1(G_2)$). Alors, il existe*

(i) *un caractère χ sur G_2*

(ii) *un isomorphisme bicontinu α de G_2 sur G_1 tels que, pour tout f de $L^1(G_1)$ et presque tout s de G_2*

$$(Tf)(s) = \chi(s)f(\alpha(s))$$

(resp. pour toute mesure μ de $M^1(G_1)$

$$T\mu = \chi\alpha^{-1}(\mu)).$$

(Dans le premier cas, on suppose les mesures de Haar sur G_1 et G_2 convenablement normalisées.)

Démonstration. L'algèbre $L^1(G_i)$ est le prédual de l'algèbre de Kac $KA(G_i)$ (resp. $M^1(G_i)$ est l'algèbre de Fourier-Stieltjes associée à l'algèbre de Kac $KS(G_i)$, d'après [3], 4.7) ($i = 1, 2$). Rappelons d'autre part que le groupe intrinsèque de $KA(G_1)$ se compose des caractères sur G_1 ([2], 3.1).

Donc, en appliquant 2.12 (resp. 3.12) on voit qu'il existe un caractère χ' sur G_1, et un isomorphisme d'algèbres de Kac Φ de $KS(G_1)$ sur $KS(G_2)$ (car $KS(G_2)^\sigma = KS(G_2)$) tels que, pour tout f dans $L^1(G_1)$,

$$\lambda_{G_2}(Tf) = \Phi(\beta_{\chi'}\lambda_{G_1}(f)) \tag{*}$$

(resp. pour tout μ dans $M^1(G_1)$

$$\lambda_{G_2}(T\mu) = \Phi(\beta_{\chi'}\lambda_{G_1}(\mu)))$$

où λ_{G_i} désigne la représentation régulière gauche du groupe G_i, voir [4], 8.1.7 (resp. [3], 4.7).

On calcule aisément que, pour tout f dans $L^1(G_1)$ (resp. pour tout μ dans $M^1(G_1)$)

$$\beta_{\chi'}(\lambda_{G_1}(f)) = \lambda_{G_1}(\chi' f) \tag{**}$$

(resp. $\beta_{\chi'}(\lambda_{G_1}(\mu)) = \lambda_{G_1}(\chi'\mu)$).

D'autre part, d'après 4.2, il existe un isomorphisme bicontinu

$$\alpha' = G_1 \to G_2$$

tel que $\Phi = KS(\alpha')$, c'est-à-dire $\Phi(\lambda_{G_1}(s)) = \lambda_{G_2}(\alpha'(s))$ pour tout s de G_1. En intégrant, on trouve, les mesures de Haar ayant été convenablement normalisées, pour tout f de $L^1(G_1)$ (resp. pour tout μ de $M^1(G_1)$)

$$(***) \qquad \Phi(\lambda_{G_1}(f)) = \lambda_{G_2}(f \circ \alpha'^{-1})$$

(resp. $\Phi(\lambda_{G_1}(\mu)) = \lambda_{G_2}(\alpha'(\mu))$.

Finalement, on trouve, en revenant à $(*)$

$$\lambda_{G_2}(Tf) = \Phi(\lambda_{G_1}(\chi' f)) = \qquad \text{d'après } (**)$$

$$= \lambda_{G_2}((\chi' f) \circ \alpha'^{-1}) \qquad \text{d'après } (***)$$

d'où, comme λ_{G_2} est fidèle, pour presque tout s de G_2

$$(Tf)(s) = \chi' \circ \alpha'^{-1}(s) f(\alpha'^{-1}(s))$$

(resp.
$$\lambda_{G_2}(T\mu) = \Phi(\lambda_{G_1}(\chi'\mu)) = \qquad \text{d'après } (**)$$

$$= \lambda_{G_2}(\alpha'(\chi'\mu)) \qquad \text{d'après } (***)$$

et donc

$$T\mu = \alpha'(\chi'\mu) = (\chi' \circ \alpha'^{-1})\alpha'(\mu)).$$

On obtient le résultat en posant

$$\chi = \chi' \circ \alpha'^{-1}, \ \alpha = \alpha'^{-1}.$$

4.5. Corollaire. (Walter [11]). *Soit T une bijection linéaire isométrique multiplicative de $A(G_1)$ sur $A(G_2)$ (resp. de $B(G_1)$ sur $B(G_2)$). Alors, il existe*

(i) *un élément s de G_1*

(ii) *un isomorphisme bicontinu α de G_2 sur G_1 ou G_1^{opp} tels que, pour tous t de G_2 et f de $A(G_1)$ (resp. $B(G_1)$)*

$$(Tf)(t) = f(s^{-1}\alpha(t)).$$

Démonstration. D'après [3], 4.6 (resp. 4.4), aux représentations de Fourier près, on a $A(G_i) = A(KA(G_i))$ (resp. $B(G_i) = B(KA(G_i))$ $(i = 1, 2)$. Donc, en appliquant 2.13 (resp. 3.12), on voit qu'il existe u dans $G(KS(G_1))$, et un isomorphisme Φ de $KA(G_1)$ sur $KA(G_2)$ ou $KA(G_2)^\sigma = KA(G_2^{\text{opp}})$, tels que, pour tout f de $A(G_1)$ (resp. $B(G_1)$),

$$(*) \qquad Tf = \Phi(\beta_u(f)).$$

D'après 4.1, il existe s dans G_1 tel que $u = \lambda_{G_1}(s)$. On a alors, pour tout f de $L^\infty(G_1)$ et t de G_1,

$$(**) \qquad (\beta_{\lambda_{G_1}(s)}(f))(t) = f(s^{-1}t).$$

D'autre part, d'après 4.2, il existe un isomorphisme bicontinu α de G_2 sur G_1 ou G_1^{opp} tel que $\Phi = KA(\alpha)$, c'est-à-dire

$$(***) \qquad \Phi(f) = f \circ \alpha.$$

Finalement, on trouve, en revenant à (*), pour tous t de G_1 et f de $A(G_1)$ (resp. $B(G_1)$)

$$(Tf)(t) = (\beta_{\wedge G_1(s)}(f))(\alpha(t)) = \qquad \text{d'après } (***)$$

$$= f(s^{-1}\alpha(t)) \qquad \text{d'après } (**),$$

d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

1. DE CANNIÈRE, J., Produit croisé d'une algèbre de Kac par un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France*, **107**(1979), 337–372.
2. DE CANNIÈRE, J., On the intrinsic group of a Kac algebra, *Proc. London Math. Soc.*, **40**(1980), 1–20.
3. DE CANNIÈRE, J.; ENOCK, M.; SCHWARTZ, J.-M., Algèbres de Fourier associées à une algèbre de Kac, *Math. Ann.*, **245**(1979), 1–22.
4. ENOCK, M.; SCHWARTZ, J.-M., Une dualité dans les algèbres de von Neumann, *Bull. Soc. Math. France, Suppl. Mém.*, **44**(1975), 1–144.
5. EYMARD, P., L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France*, **92**(1964), 181–236.
6. JOHNSON, B. E., Isometric isomorphisms of measure algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 186–188.
7. KADISON, R. V., Isometries of operator algebras, *Ann. of Math.*, **34**(1951), 325–338.
8. SCHWARTZ, J.-M., Sur la structure des algèbres de Kac, *J. Functional Analysis*, **34**(1979), 370–406.
9. SCHWARTZ, J.-M., Sur la structure des algèbres de Kac. II, *Proc. London Math. Soc.*, **41**(1980), 465–480.
10. STØRMER, E., On the Jordan structure of C^*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120**(1965), 438–447.
11. WALTER, M. E., W^*-algebras and nonabelian harmonic analysis, *J. Functional Analysis*, **11** (1972), 17–38.
12. WENDEL, J. G., On isometric isomorphism of group algebras, *Pacific J. Math.*, **1**(1951), 305–311.

JEAN DE CANNIÈRE
Katholieke Universiteit Leuven,
Departement Wiskunde,
Celestijnenlaan 200B,
B-3030, Leuven,
Belgique.

MICHEL ENOCK et JEAN-MARIE SCHWARTZ
Laboratoire de Mathématiques Fondamentales (CNRS-ERA nº 746),
Université Pierre et Marie Curie,
4 Place Jussieu, F-75230
Paris Cedex 05
France.

Received October 18, 1979.