J. OPERATOR THEORY
7(1982), 193–200

DIE ALGEBRA DER IDEALOPERATOREN EINES ARCHIMEDISCHEN, GLEICHMÄßIG VOLLSTÄNDIGEN VEKTORVERBANDES

EGON SCHEFFOLD

EINLEITUNG

Es sei E ein archimedischer, gleichmäßig vollständiger Vektorverband. Gleichmäßige Vollständigkeit bedeutet, daß für jedes positive Element u von E das Hauptideal $E_u\left(=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} n[-u, u]\right)$, versehen mit der Ordnungseinheitsnorm $p_u(p_u(x) := := \inf\{\lambda > 0 : |x| \leqslant \lambda u)$ für alle $x \in E_u)$, vollständig ist. Beispiele für archimedische, gleichmäßig vollständige Vektorverbände sind alle Banachverbände und alle Dedekind-vollständigen Vektorverbände. Die Algebra der Endomorphismen von E bezeichnen wir mit $L(E)$.

DEFINITION. Wir nennen einen Endomorphismus $S \in L(E)$ einen *Idealoperator*, wenn S jedes Ideal von E in sich abbildet.

Wir bezeichnen die Menge aller Idealoperatoren auf E mit $M(E)$. Es ist leicht einzusehen, daß $M(E)$ eine Subalgebra von $L(E)$ ist und daß $M(E)$, versehen mit der Ordnungsstruktur, welche von der kanonischen Ordnung von $L(E)$ induziert wird, ein geordneter Vektorraum ist. In dieser Arbeit stellen wir die Algebra $M(E)$ als Funktionenalgebra aller reellwertigen, stetigen Funktionen auf einem gewissen topologischen Raum dar und wir zeigen, daß die Wirkung eines Idealoperators auf E in einem gewissen Sinne als Multiplikation mit einer Funktion beschrieben werden kann.

Aus der erwähnten Darstellung der Idealoperatoren folgt, daß jeder Idealoperator ordnungsbeschränkt ist. Dies bedeutet, daß unsere Idealoperatoren mit den „Kontraktoren" von Bigard-Keimel [1] übereinstimmen und daher Orthomorphismen sind. Darstellungen der Orthomorphismen als stetige, numerische Funktionen sind bekannt und befinden sich in den Arbeiten Bigard-Keimel [1], Conrad-Diem [2], Meyer [7] und Portenier [8]. Alle diese Darstellungen beruhen wiederum auf Darstellungen der betrachteten Vektorverbände als Verbände stetiger, numerischer Funktionen.

Das Zentrum $Z(E)$ von E ist als die Menge aller Endomorphismen $T \in L(E)$ definiert, welche die Eigenschaft besitzen, daß es eine natürliche Zahl m gibt, welche von T abhängen darf, so daß $|Tx| \leqslant m|x|$ für alle $x \in E$ gilt. Das Zentrum $Z(E)$ von E ist offensichtlich eine Subalgebra der Algebra $M(E)$. Darstellungen des Zentrums enthalten die Arbeiten Flösser-Gierz-Keimel [4], Flösser [5], Wickstead [13] und Hackenbroch [5].

Unsere Methode unterscheidet sich sehr wesentlich von den Darstellungsmethoden der genannten Arbeiten. Sie beruht auf einer neuen Hauptidealdarstellung, in welcher nur die Hauptideale von E als Funktionenverbände dargestellt werden. Da Idealoperatoren alle Hauptideale von E invariant lassen, erweist sich diese „lokale" Darstellung als sehr nützlich für die Darstellung und Beschreibung der Wirkung von Idealoperatoren auf E.

1. EINE HAUPTIDEALDARSTELLUNG AUF DEM RAUM DER QUASIMAXIMALEN IDEALE

Es sei Q die Menge der quasimaximalen Ideale von E (s. Luxemburg-Zaanen [6], S. 205) und $\mathfrak{H}$ die Menge aller Hauptideale von E. Ein Ideal von E ist quasimaximal, falls es bezüglich der Eigenschaft, ein bestimmtes Element nicht zu enthalten, maximal ist. Zum Beispiel ist jedes maximale Ideal quasimaximal.

Wir wählen ein festes Hauptideal H und eine Ordnungseinheit a von H. Es bezeichne $\mathfrak{M}_H$ den Raum aller maximalen Ideale des Hauptideals H und Q_H den Raum aller quasimaximalen Ideale von E, welche bezüglich der Eigenschaft, das Element a nicht zu enthalten, maximal sind, jeweils versehen mit den entsprechenden Hülle-Kern-Topologien. Die Menge Q_H ist unabhängig von der Wahl der Ordnungseinheit a in H. Bekanntlich ist die Abbildung $\varphi_H : Q \to Q \cap H$ eine Homöomorphie zwischen den Räumen Q_H und $\mathfrak{M}_H$. Mit Hilfe der Räume $Q_K (K \in \mathfrak{H})$ versehen wir die Menge Q der quasimaximalen Ideale mit der folgenden Topologie: Eine Teilmenge O von Q ist genau dann offen, wenn $O \cap Q_K$ offen in Q_K für alle $K \in \mathfrak{H}$ ist. Unter dem Raum der quasimaximalen Ideale von E verstehen wir im folgenden die Menge Q, versehen mit dieser Topologie.

Es sei H wieder ein festes Hauptideal und u eine Ordnungseinheit von H (also $H = E_u$). Da E gleichmäßig vollständig ist, ist der Vektorverband E_u, versehen mit der Ordnungseinheitsnorm p_u, ein AM-Raum mit Einheit. Es bezeichne X_u die schwach*-kompakte Menge aller reellen Verbandshomomorphismen mit Norm 1 auf dem Banachverband (E_u, p_u). Dann ist die Auswertungsabbildung $x \to \hat{x}(\hat{x}(f) := f(x)$ für alle $f \in X_u)$ ein Verbandsisomorphismus von E_u auf den Vektorverband $C(X_u)$ der reellwertigen, stetigen Funktionen auf dem kompakten Hausdorffraum X_u.

Ferner ist die Abbildung $\rho: X_u \to \mathfrak{M}_H$, definiert durch $\rho(f) := f^{-1}(\{0\}) \in \mathfrak{M}_H$ für alle $f \in X_u$, eine Homöomorphie zwischen den Räumen X_u und $\mathfrak{M}_H$ (s. [6], S. 311). Wenn wir die Menge Q_H mit der Menge X_u identifizieren, dann erhalten wir mit Hilfe der Homöomorphien φ_H und ρ^{-1}, daß das Hauptideal H verbandsisomorph zum Vektorverband $C(Q_H)$ ist, wobei der Einsfunktion auf Q_H die Ordnungseinheit u entspricht. Wir können daher das Hauptideal H mit dem Vektorverband $C(Q_H)$ identifizieren.

Wenn wir in jedem Hauptideal $K \in \mathfrak{H}$ eine Ordnungseinheit u_K wählen, dann kann nach dem Vorhergehenden das Hauptideal K mit dem Vektorverband $C(Q_K)$ identifiziert werden. Im folgenden nennen wir eine solche „lokale" Darstellung von E eine Hauptidealdarstellung von E auf dem Raum der quasimaximalen Ideale von E und bezeichnen sie mit $(Q, \mathfrak{H}, (u_K)_{K \in \mathfrak{H}})$. Diese Darstellung ist bis auf die Wahl der Ordnungseinheiten u_K eindeutig bestimmt.

2. DIE ALGEBRA DER IDEALOPERATOREN

Mit Hilfe einer Hauptidealdarstellung von E können wir für die Algebra der Idealoperatoren den folgenden Darstellungssatz beweisen.

THEOREM. *Es sei E ein archimedischer, gleichmäßig vollständiger Vektorverband. Dann ist die Algebra $M(E)$ der Idealoperatoren auf E algebraisch — und verbandsisomorph zum Vektorraum $C(Q)$ der reellwertigen, stetigen Funktionen auf dem Raum Q der quasimaximalen Ideale von E, versehen mit der kanonischen Algebra— und Ordnungsstruktur.*

Es sei $T \in M(E)$ und f_T diejenige Funktion in $C(Q)$, welche dem Operator T bei der erwähnten Isomorphie entspricht. Ferner sei $(Q, \mathfrak{H}, (u_K)_{K \in \mathfrak{H}})$ eine Hauptidealdarstellung von E, H ein Hauptideal von E, $x \in H$, $f_x \in C(Q_H)$ die dem Element x entsprechende Funktion und $f_{T|Q_H}$ die Einschränkung von f_T auf Q_H. Dann entspricht dem Element Tx die Funktion $f_{T|Q_H} \cdot f_x \in C(Q_H)$; dies bedeutet, die Wirkung von T kann als Multiplikation mit einer stetigen Funktion beschrieben werden.

Beweis. Es sei $T \in M(E)$. Auf die gleiche Weise wie Flösser-Gierz-Keimel [4] bestimmen wir im nächsten Abschnitt die Funktion $f_T \in C(Q)$.

Das Element $Q \in Q$ sei maximal bezüglich der Eigenschaft, das Element $a \in E$ nicht zu enthalten. Dann ist das von Q und a erzeugte Ideal $\bar{Q}$ das kleinste Ideal, welches Q echt enthält. Es ist daher $\bar{Q}/Q$ eindimensional. Da T alle Ideale invariant läßt, induziert T den folgenden Endomorphismus $\hat{T}$ auf $\bar{Q}/Q$: $\hat{T}(x + Q) := Tx + Q$ für alle x in $\bar{Q}$.

Da $\bar{Q}/Q$ eindimensional ist, existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $f_T(Q)$, so daß $\hat{T}(x + Q) = f_T(Q)(x + Q)$ für alle $x \in \bar{Q}$ gilt.

Nun wählen wir ein festes Hauptideal H und identifizieren es mit dem Vektorverband $C(Q_H)$. Die Einschränkung von T auf H definiert einen Idealoperator auf $C(O_H)$, welchen wir wieder mit T bezeichnen und welcher sich bekanntlich in der Form

(1) $$Tf = Te_{Q_H} \cdot f$$

für alle $f \in C(Q_H)$ darstellen läßt, wobei e_{Q_H} die Einsfunktion auf Q_H bezeichnet.

Sei $Q_0 \in Q_H$ und $\bar{Q}_0$ das von Q_0 und u_H erzeugte Ideal. Dann existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $s(Q_0)$, so daß in dem eindimensionalen Quotientenverband $H/(Q_0 \cap H)$ die Beziehung

(2) $$Tx + Q_0 \cap H = s(Q_0)\,(x + Q_0 \cap H)$$

für alle $x \in H$ gilt.

Da $Q_0 \cap H$ mit dem maximalen Ideal $\{f \in C(Q_H) : f(Q_0) = 0\}$ von $C(Q_H)$ identisch ist, erhalten wir aus (1) und (2) die Gleichung $Te_{Q_H}(Q_0) = s(Q_0)$.

Dies bedeutet insbesondere

(3) $$Tu_H + Q_0 \cap H = Te_{Q_H}(Q_0)\,(u_H + Q_0 \cap H).$$

Nach Definition von f_T gilt in $\bar{Q}_0/Q_0$ die Gleichung

(4) $$Tu_H + Q_0 = f_T(Q_0)\,(u_H + Q_0).$$

Aus den beiden Gleichungen (3) und (4) ergibt sich über eine leichte Rechnung $Te_{Q_H}(Q_0) = f_T(Q_0)$. Wir erhalten somit $f_{T|Q_H} = Te_{Q_H}$. Die Gleichung (1) bedeutet daher, daß sich der Operator T auf den Hauptidealen in der im Theorem angegebenen Form darstellen läßt.

Da für alle $K \in \mathfrak{H}$ die Funktionen Te_{Q_K} auf Q_K stetig sind, ist die Funktion f_T auf dem Raum Q offensichtlich stetig.

Es bezeichne Φ die Abbildung $T \to f_T$ von $M(E)$ nach $C(Q)$. Mit Hilfe der vorher angegebenen Darstellung von T auf den Hauptidealen ist leicht zu zeigen, daß Φ ein injektiver, bipositiver Algebrahomomorphismus von $M(E)$ nach $C(Q)$ ist. Es bleibt nur noch die Surjektivität von Φ nachzuweisen.

Es sei $f \in C(Q)$, $x \in H \in \mathfrak{H}$ und g_x die dem Element x entsprechende Funktion in $C(Q_H)$. Dem Element x ordnen wir das Element

$$T_f x := f_{|Q_H} \cdot g_x \in C(Q_H) \quad (\in H \subseteq E)$$

zu. Wir zeigen, daß diese Zuordnung $x \to T_f x$ nicht von der Wahl von H abhängt, also wohl definiert ist. Es sei K ein Hauptideal mit $x \in H \subseteq K$. Mit $T_f^H x$ bzw. $T_f^K x$

bezeichnen wir die Elemente, die wir unter Benutzung des Ideals H bzw. des Ideals K bei der vorhergehenden Zuordnung erhalten. Es genügt nun zu zeigen, daß $T_f^H x = T_f^K x$ ist.

Es bezeichne φ die Injektionsabbildung von H in K. Wir identifizieren H mit $C(Q_H)$ und K mit $C(Q_K)$. Wir müssen also $\varphi(T_f^H x) = T_f^K \varphi(x)$ zeigen.

Es sei $O_{u_H} := \{Q \in Q_K : \varphi(u_H)(Q) > 0\}$ und $Q_0 \in O_{u_H}$. Dann ist $Q_0 \cap K$ ein maximales Ideal von K. Da $\varphi(u_H)(Q_0) > 0$ ist, ist $u_H \notin Q_0 \cap \mathscr{K}$ und $u_H \notin Q_0$. Da H in K enthalten ist und $Q_0 \cap K$ ein maximales Ideal von K ist, ist $Q_0 \cap H$ auch ein maximales Ideal von H. Es gilt daher $Q_0 \in Q_H$ und somit $O_{u_H} \subseteq Q_H$.

Als Vektorverbandshomomorphismus läßt sich die Abbildung φ bekanntlich folgendermaßen darstellen: Es gibt eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung

$$\psi : O_{u_H} \to Q_H,$$

so daß

$$\varphi(g)(Q) = \begin{cases} \varphi(u_H)(Q)\, g(\psi(Q)) & \text{für } Q \in O_{u_H} \\ 0 & \text{für } Q \in Q_K,\ Q \notin O_{u_H} \end{cases}$$

für alle $g \in C(Q_H)$ gilt.

Da aber $Q \cap H = (Q \cap K) \cap H$ ist, ist die Abbildung ψ die Identität auf O_{u_H}. Es gilt daher

$$\varphi(f_{|Q_H} \cdot g_x)(Q) = \begin{cases} \varphi(u_H)(Q)\,(f(Q)\, g_x(Q)) & \text{für } Q \in O_{u_H} \\ 0 & \text{für } Q \in Q_K,\ Q \notin O_{u_H} \end{cases}$$

und

$$(f_{|Q_K} \cdot \varphi(g_x))(Q) = \begin{cases} f(Q)\, \varphi(u_H)(Q)\, g_x(Q) & \text{für } Q \in O_{u_H} \\ 0 & \text{für } Q \in Q_K,\ Q \notin O_{u_H}. \end{cases}$$

Es ist also $\varphi(f_{|Q_H} \cdot g_x) = f_{|Q_K} \cdot \varphi(g_x)$. Dies bedeutet $\varphi(T_f^H x) = T_f^K \varphi(x)$.

Mit Hilfe der Hauptidealdarstellung ist leicht zu verifizieren, daß $T_f \in M(E)$ und $\Phi T_f = f$ gilt. Es ist also Φ surjektiv. Q.E.D.

Es sei A eine kofinale Teilmenge des positiven Kegels E_+ von E, d.h., $a > 0$ für alle $a \in A$ und zu jedem Element $x \in E_+$ gibt es ein $a \in A$ mit $x \leqslant a$. Ferner sei $\mathfrak{H}^* := \{H \in \mathfrak{H} : H = E_a$ für ein Element $a \in A\}$, $Q^* := \bigcup_{H \in \mathfrak{H}^*} Q_H$ und

$$\mathscr{T}^* := \{O \subseteq Q^* : O \cap Q_H \text{ ist offen in } Q_H \text{ für alle } H \in \mathfrak{H}^*\}.$$

Dann ist $\mathscr{T}^*$ eine Topologie auf Q^*. Wie im 1. Kapitel kann auch hier jedes Hauptideal $H \in \mathfrak{H}^*$ mit dem Vektorverband $C(Q_H)$ identifiziert werden. Eine nachträgliche Betrachtung des vorhergehenden Beweises zeigt, daß man den Raum Q

durch den topologischen Raum Q^*, versehen mit der Topologie $\mathscr{T}^*$, ersetzen kann. Dies bedeutet, daß die im Theorem über $C(Q)$ gemachten Aussagen sinngemäß auch für $C(Q^*)$ gelten. Es ist also $M(E)$ auch algebraisch—und verbandsisomorph zu $C(Q^*)$.

Aus diesem Grunde braucht man z.B. bei den Vektorverbänden $C(K)$ in diesem Zusammenhang nur die Menge der maximalen Ideale zu betrachten, und nicht die Unmenge der quasimaximalen Ideale.

In Wickstead [14] wird bewiesen, daß für Banachverbände E, $M(E) = Z(E)$ gilt. Mit dem folgenden neuen Beweis können wir zeigen, daß diese Aussage sogar für Fréchetverbände wahr ist.

SATZ. *Es sei E ein Fréchetverband. Dann gilt $M(E) = Z(E)$.*

Beweis. Da jeder Idealoperator ordnungsbeschränkt ist, ist er Differenz zweier positiver Operatoren. Es genügt daher zu zeigen, daß jeder positive Idealoperator zum Zentrum gehört.

Es sei $T \in M(E)$ und $T \geqslant 0$. Dann ist T ein stetiger Endomorphismus von E (s. Schaefer [9], Kap. V, 5.5 und 5.6).

Für jede natürliche Zahl n sei $A_n := \{x \in E_+ : Tx \leqslant nx\}$. Dann ist jedes A_n abgeschlossen. Ferner gilt $E_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, und E_+ ist ein vollständiger metrischer Raum. Nach dem Satz von Baire gibt es eine natürliche Zahl n_0, ein Element $x_0 \in A_{n_0}$ und eine reelle Zahl $r > 0$, so daß A_{n_0} die Kugel $S := \{x \in E_+ : \mathrm{d}(x, x_0) \leqslant r\}$ von E_+ enthält, wobei $\mathrm{d}(\cdot,\cdot)$ die Metrik auf E bezeichnet. Es sei $y \in E_+$. Dann existiert eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ mit $z := \varepsilon y + x_0 \in S$. Hieraus folgt $Tz \leqslant n_0 z$. Da die Einschränkung von T auf das Hauptideal E_z ein Idealoperator von E_z ist und da $0 \leqslant \varepsilon y \leqslant z$ ist, gilt $T(\varepsilon y) \leqslant n_0(\varepsilon y)$ und somit $Ty \leqslant n_0 y$. Es ist daher $Tx \leqslant n_0 x$ für alle $x \in E_+$. Dies bedeutet, daß T zum Zentrum gehört. Q.E.D.

Topologische Räume mit der Eigenschaft, daß auf ihnen reellwertige, stetige Funktionen stets beschränkt sind, nennt man pseudokompakt.

FOLGERUNG. *Der Raum Q der quasimaximalen Ideale eines Fréchetverbandes E ist pseudokompakt.*

Beweis. Angenommen, Q sei nicht pseudokompakt. Dann gibt es eine unbeschränkte, nichtnegative, stetige Funktion f auf Q. Der der Funktion f entsprechende Idealoperator T_f liegt im Zentrum. Es existiert daher eine natürliche Zahl m mit $0 \leqslant T_f \leqslant mI$, wobei I die Identität auf E bezeichnet. Hieraus folgt $0 \leqslant f \leqslant me_Q$, was ein Widerspruch ist.

Zum Schluß wollen wir noch eine Anwendung des Theorems für Verbandshomomorphismen erwähnen.

ANWENDUNG. Es seien E und F archimedische, gleichmäßig vollständige Vektorverbände. Ferner sei T ein Vektorverbandshomomorphismus von E nach F mit der Eigenschaft, daß das vom Wertevorrat $T(E)$ erzeugte Ideal ganz F ist. Es bezeichne Q^E bzw. Q^F den Raum der quasimaximalen Ideale von E bzw. von F.

Es sei $\mathfrak{H}^* := \{F_v : v \in T(E_+)\setminus\{0\}\}$ und $Q_T^* := \bigcup_{H \in \mathfrak{H}^*} Q_H^F$, versehen mit der Topologie $\mathscr{T}^*$. Der Operator T induziert die folgende stetige Abbildung φ_T von Q_T^* nach Q^E:

$$Q \to \varphi_T(Q) := T^{-1}(Q)$$

für alle $Q \in Q_T^*$. Mit Hilfe von φ_T definieren wir die Abbildung $T^c : C(Q^E) \to C(Q_T^*)$ durch $T^c f := f \circ \varphi_T$ für alle $f \in C(Q^E)$. Da die Menge $T(E_+)\setminus\{0\}$ kofinal im positiven Kegel von F ist, können wir die Algebra $M(E)$ mit $C(Q^E)$ und die Algebra $M(F)$ mit $C(Q_T^*)$ identifizieren. Dies bedeutet, T^c kann als eine Abbildung von $M(E)$ nach $M(F)$ betrachtet werden. Damit können wir nun ein Ergebnis von Wickstead [12] über Verbandshomomorphismen und Zentren von Banachverbänden wie folgt verallgemeinern:

Die Abbildung T^c ist ein Algebra—und Verbandshomomorphismus von der Algebra $M(E)$ in die Algebra $M(F)$.

Ferner gilt $T^c I_E = I_F$ und

$$T \circ S = T^c S \circ T \quad \text{für alle } S \in M(E).$$

LITERATUR

1. BIGARD, A.; KEIMEL, K., Sur les endomorphismes conservant les polaires d'un groupe réticulé archimédien, *Bull. Soc. Math. France*, **97**(1969), 381—398.
2. CONRAD, P. F.; DIEM, J. E., The ring of polar preserving endomorphisms of an abelian lattice-ordered group, *Illinois J. Math.*, **15**(1971), 222—240.
3. FLÖSSER, H. O., Das Zentrum archimedischer Vektorverbände, *Mitteilungen aus dem Math. Seminar Gießen*, **137**(1979).
4. FLÖSSER, H. O.; GIERZ, G.; KEIMEL, K., Structure spaces and the center of vector lattices, *Quart. J. Math. Oxford*, **29**(1978), 415—426.
5. HACKENBROCH, W., Representation of vector lattices by spaces of real functions, in *Functional analysis: surveys and recent results* (K.-D. Bierstedt, B. Fuchsteiner eds.), 51—72, North-Holland Publishing Company, 1977.
6. LUXEMBURG, W. A. J.; ZAANEN, A. C., *Riesz spaces*. I, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1971.
7. MEYER, M., Le stabilisateur d'un espace vectoriel réticulé, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A.*, **283**(1976), 249—250.
8. PORTENIER, C., Représentation des espaces de Riesz archimédiens et de leurs centres, Tagungsbericht 25/1977 von der Tagung *Riesz spaces and order bounded operators* in Oberwolfach (19.6. — 25.6.1977).

9. SCHAEFER, H. H., *Topological vector spaces*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
10. SCHAEFER, H. H., *Banach lattices and positive operators*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
11. TELEMAN, S., La représentation des automorphismes des réseaux vectoriels, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **13**(1968), 95–105.
12. WICKSTEAD, A. W., The ideal centre of a Banach lattice, *Proc. Royal Irish Acad. Sect. A.*, **76**(1976), 15–23.
13. WICKSTEAD, A. W., The structure space of a Banach lattice, *J. Math. Pures Appl.*, **56**(1977), 39–54.
14. WICKSTEAD, A. W., Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces, *Compositio Math.*, **35**(1977), 225–238.
15. ZAANEN, A. C., Examples of orthomorphisms, *J. Approximation Theory*, **13**(1975), 192–204.

EGON SCHEFFOLD
Fachbereich Mathematik
der Technischen Hochschule Darmstadt,
Schlossgartenstrasse 7, 6100 Darmstadt,
W. Germany.

Received August 25, 1980; revised April 28, 1981.