J. OPERATOR THEORY
9(1983), 237–252

SUR LE PRODUIT TENSORIEL RELATIF D'ESPACES DE HILBERT

JEAN-LUC SAUVAGEOT

INTRODUCTION

Le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert est une procédure qui, à un couple (H, K) d'espaces de Hilbert, munis respectivement d'une structure de N-module à droite et de N-module à gauche (N étant une algèbre de von Neumann fixée), associe un espace de Hilbert $H \otimes_N K$; elle obéit aux deux contraintes suivantes:

1) elle est fonctorielle; c'est-à-dire que si (H', K') est un autre couple d'espaces de Hilbert avec les mêmes propriétés, on peut faire le produit tensoriel $T_1 \otimes_N T_2$ de deux opérateurs d'entrelacement, $T_1 \in \mathscr{L}_{N^0}(H, H')$, $T_2 \in \mathscr{L}_N(K, K')$;

2) elle "efface" le N-N bimodule $L^2(N)$ de la représentation standard de N, en ce sens que le foncteur $K \to L^2(N) \otimes_N K$ (de la catégorie des espaces de Hilbert munis d'une représentation normale, non dégénérée de N, dans elle-même) est équivalent au foncteur identité.

Il est facile de vérifier qu'une telle procédure existe et qu'elle est unique à une équivalence fonctorielle près. Mais cette démarche abstraite n'est guère utilisable, et l'auteur ([8]) dans le cas où N est commutative, puis A. Connes ([2]) en toute généralité, proposent une construction explicite, au moyen d'un poids n.s.f.f. auxiliaire ν sur N, du produit tensoriel relatif $H \otimes_\nu K$ qui est un espace de Hilbert engendré par des tenseurs élémentaires $\xi \otimes_\nu \eta$, $\xi \in H$, $\eta \in K$, ξ ou η ν-borné. On dispose ainsi d'une machinerie opératoire qui permet de réécrire en termes "d'ampliation relative" un certain nombre de résultats classiques de la théorie des algèbres de von Neumann.

Par exemple, le théorème fondamental de la théorie des représentations:

"Deux représentations fidèles d'une algèbre de von Neumann peuvent se déduire l'une de l'autre par une ampliation suivie d'une réduction"

([3], I.4, théorème 3) devient

"Deux représentations fidèles d'une algèbre de von Neumann se déduisent *canoniquement* l'une de l'autre par une ampliation relative" (corollaire 3.4 ci-dessous).

Ou encore, le théorème de Hilbert-Schmidt classique sur la représentation standard des facteurs de type I se généralise de manière élégante:

la représentation standard d'une algèbre de von Neumann M (donnée spatialement dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$) est l'ampliation relative de M dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H} \otimes_{\nu} \mathscr{H}$, le produit tensoriel étant pris au-dessus d'une algèbre N anti-isomorphe au commutant de M dans $L(\mathscr{H})$; l'involution canonique est alors la symétrie J_{ν} qui, au tenseur élémentaire $\xi \otimes_{\nu} \eta$, associe $\eta \otimes_{\nu} \bar{\xi}$; le cône positif $P^{\natural}$ est le cône fermé engendré par les tenseurs $\xi \otimes_{\nu} \xi$, ξ ν'-borné (Proposition 3.1; cf.[8], § I.3 pour le cas des algèbres discrètes).

Bien qu'il soit désormais courant (cf. [1], [7], etc.) d'utiliser, principalement dans le but d'économiser les symboles, la terminologie et les notations des modules pour la théorie des représentations d'une algèbre de von Neumann, nous avons préféré fixer, dans un paragraphe préliminaire (§ 0), la terminologie et les notations utilisées dans le corps de l'article.

Le § 1 est consacré à des compléments sur les N-modules, qui portent principalement sur les divers "produits scalaires à valeurs opérateurs" sous-jacents à ce type de structure.

Le § 2 est un rappel de la définition du produit tensoriel relatif, et la démonstration de l'invariance par changement du poids auxiliaire ν.

Le § 3 contient la description de la représentation standard annoncée ci-dessus (théorème de Hilbert-Schmidt généralisé), et son application à l'étude des foncteurs de la théorie des représentations d'une algèbre de von Neumann N dans celle d'une algèbre de von Neumann M: on obtient une reformulation des résultats de M. Rieffel ([7]) dans le cadre simplifié des bimodules "espaces de Hilbert".

0. TERMINOLOGIE ET NOTATIONS

0.1. On fixe une algèbre de von Neumann N, et on appelle N^0 l'algèbre opposée.

0.1.1. Un *N-module à gauche* K est un espace de Hilbert muni d'une représentation normale non dégénérée, π_N^K, de N dans $\mathscr{L}(K)$. Lorsqu'il n'y aura pas risque de confusion, on notera $y\eta$ au lieu de $\pi_N^K(y)\eta$ le résultat de l'action d'un élément y de N sur un vecteur η de K.

0.1.2. Un *N-module à droite* H est un N^0-module à gauche. Si y est un élément de N, y^0 l'élément correspondant de N^0, on écrira indifféremment $y^0\xi$ ou ξy pour noter l'action (à droite) de y sur le vecteur ξ de H.

0.1.3. Au N-module à gauche K correspond canoniquement le N-module à droite $\bar{K}$ défini, dans l'espace opposé de K, par

$$\bar{\eta} y = \overline{y^* \eta}, \quad y \in N, \eta \in K.$$

On note également $H \to \bar{H}$ la correspondance inverse entre N-modules à droite et N-modules à gauche.

0.1.4. Si K_1 et K_2 sont deux N-modules à gauche, on pose

$$\mathscr{L}_N(K_1, K_2) = \{T \in \mathscr{L}(K_1, K_2) \mid Ty\eta = yT\eta, \ \forall \eta \in K_1, \ \forall y \in N\};$$

on écrit $\mathscr{L}_N(K_1)$ au lieu de $\mathscr{L}_N(K_1, K_1)$.

Si H_1 et H_2 sont deux N-modules à droite, on a

$$\mathscr{L}_{N^0}(H_1, H_2) = \{T \in \mathscr{L}(H_1, H_2) \mid (T\xi)y = T(\xi y), \ \forall \xi \in H_1, \ \forall y \in N\}.$$

0.2. Soit M une seconde algèbre de von Neumann.

0.2.1. Un *M-N bimodule* est un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ muni d'une structure de M-module à gauche et d'une structure de N-module à droite, qui commutent, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$(x\xi)y = x(\xi y) \quad \forall \xi \in \mathscr{H}, \ \forall x \in M, \ \forall y \in N.$$

0.2.2. Par définition, un M-N bimodule est également un N^0-M^0 bimodule, et on a

$$y^0 \xi x^0 = x\xi y, \quad \forall \xi \in \mathscr{H}, \ \forall x \in M, \ \forall y \in N.$$

0.2.3. Si $\mathscr{H}$ est un M-N bimodule, d'après 0.1.3, l'espace de Hilbert conjugué $\bar{\mathscr{H}}$ est un N-M bimodule, et on a

$$y\bar{\xi}x = \overline{x^* \xi y^*}, \quad \forall \xi \in \mathscr{H}, \ \forall x \in M, \ \forall y \in N.$$

0.3.1. Pour toute algèbre de von Neumann N on fixe un N-N bimodule standard: c'est l'espace de Hilbert $L^2(N)$ (unique à isomorphisme près), muni de la représentation naturelle de N, de l'involution antilinéaire J, du cône autopolaire $L^2(N)_+$ vérifiant les axiomes de [4], définition 2.1. La structure de N-module à droite est bien entendu donnée par

$$\xi y = Jy^* J\xi, \quad \xi \in L^2(N), \ y \in N.$$

0.3.2. Si ν est un poids n.s.f.f. sur N, il existe un unique morphisme isométrique de N-module, Λ_ν, de l'idéal à gauche $\mathscr{N}_\nu$ dans $L^2(N)$ vérifiant:

$$yJ\Lambda_\nu(y) \in L^2(N)_+, \quad \forall y \in \mathscr{N}_\nu$$

(par "morphisme isométrique de N module", nous entendons les propriétés suivantes:

$$\Lambda_\nu(yy') = y\Lambda_\nu(y'), \quad \forall y \in N, \ \forall y' \in \mathscr{N}_\nu$$

et

$$\| \Lambda_\nu(y) \|^2 = \nu(y^* y), \quad \forall y \in \mathcal{N}_\nu).$$

0.3.3. On choisira pour $L^2(N^0)$, le N^0-N^0 bimodule $L^2(N)$, avec la même involution J et le même cône autopolaire $L^2(N)_+ = L^2(N^0)_+$. Avec ce choix, si ν^0 est le poids sur N^0 correspondant au poids n.s.f.f. ν sur N, il est facile de vérifier que l'on a

$$\Lambda_{\nu^0}(y^0) = J\Lambda_\nu(y^*), \quad \forall y \in \mathcal{N}_\nu^* = (\mathcal{N}_{\nu^0})^0.$$

0.4.1. Soit ν un poids n.s.f.f. sur N. On rappelle (cf. [1]) qu'on note $D(K,\nu)$ l'ensemble des vecteurs ν-bornés d'un N-module à gauche K, c'est-à-dire des vecteurs η de K tels qu'il existe $R^\nu(\eta)$ dans $\mathscr{L}_N(L^2(N), K)$ vérifiant

$$R^\nu(\eta)\Lambda_\nu(y) = y\eta, \quad \forall y \in \mathcal{N}_\nu.$$

Au couple (η, η') de vecteurs ν-bornés dans K est associé l'opérateur $\theta^\nu(\eta, \eta') = R^\nu(\eta)R^\nu(\eta')^*$ de $\mathscr{L}_N(K)$.

0.4.2. Si H est un N-module à droite et si ξ dans H est ν^0-borné, $R^{\nu^0}(\xi)$ est l'opérateur de $L_{N^0}(L^2(N),H)$ caractérisé par

$$R^{\nu^0}(\xi)J\Lambda_\nu(y) = \xi y^*, \quad \forall y \in \mathcal{N}_\nu.$$

0.5. Si ν est un poids n.s.f.f. sur N et λ un nombre complexe, on appelle *domaine* de σ_λ^ν et on note $\mathscr{D}(\sigma_\lambda^\nu)$ l'ensemble des $y \in N$ tels que l'application $\mathbf{R} \ni t \to \sigma_t^\nu(y)$ admette un prolongement continu à la bande $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Im} \lambda$ (ou $\operatorname{Im} \lambda \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 0$), analytique à l'intérieur. $\sigma_\lambda^\nu(y)$ est alors la valeur de ce prolongement pour $z = \lambda$, et est caractérisé par

$$\sigma_\lambda^\nu(y)\, \Delta_\nu^{i\lambda} \subset \Delta_\nu^{i\lambda} y.$$

1. COMPLEMÉNTS SUR LES N-MODULES

On fixe une algèbre de von Neumann N et un poids n.s.f.f. ν sur N; ν^0 est le poids correspondant sur l'algèbre N^0; $\mathscr{U}_0$ désigne l'algèbre de Tomita associée au poids ν.

Dans tout ce paragraphe, H désigne un N-module à droite, K un N-module à gauche.

1.1. On munit l'espace vectoriel $D(H,\nu^0)$ d'un "produit scalaire à valeurs dans N" de la manière suivante:

Si ξ_1 et ξ_2 sont deux vecteurs ν^0-bornés de H, $R^{\nu^0}(\xi_2)^* R^{\nu^0}(\xi_1)$ est un endomorphisme de $L^2(N)$ qui commute à l'action à droite de N, et définit par conséquent un élément $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu^0}$ de N caractérisé par

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu^0} \zeta = R^{\nu^0}(\xi_2)^* R^{\nu^0}(\xi_1)\zeta, \quad \forall \zeta \in L^2(N).$$

On munit également $D(K, \nu)$ d'un produit scalaire à valeurs dans N en posant, pour η_1, η_2 ν-bornés:

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_\nu = \langle \overline{\eta_2}, \overline{\eta_1} \rangle_{\nu^0},$$

soit

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_\nu \zeta = JR^\nu(\eta_1)^* R^\nu(\eta_2) J\zeta, \quad \forall \zeta \in L^2(N).$$

1.2. Si ν est une trace, il est facile de vérifier qu'un vecteur η de K est ν-borné si et seulement si $\dfrac{d\omega_{\eta,\eta}}{d\tau}$ est un opérateur borné, et que l'on a

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_\nu = \frac{d\omega_{\eta_1,\eta_2}}{d\tau}$$

(cf. [8], lemme I.1; ω_{η_1,η_2} est la forme linéaire $N \ni y \to \langle y\eta_1, \eta_2 \rangle$).

$D(K, \nu)$ est alors un "N-module préhilbertien" au sens de [6].

1.3. Dans le cas général, $D(K, \nu)$ est stable par l'action de $\mathscr{D}(\sigma^\nu_{i/2})$ et on a

$$\langle y\eta_1, \eta_2 \rangle_\nu = \sigma^\nu_{i/2}(y) \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_\nu, \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in D(K, \nu), \quad \forall y \in \mathscr{D}(\sigma^\nu_{i/2});$$

de même, $D(H, \nu^0)$ est stable par $\mathscr{D}(\sigma^\nu_{-i/2})$ et on a

$$\langle \xi_1 y, \xi_2 \rangle_{\nu^0} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu^0} \sigma^\nu_{-i/2}(y), \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in D(H, \nu^0), \quad \forall y \in \mathscr{D}(\sigma^\nu_{-i/2}).$$

1.4. Si H est le N-module à droite $L^2(N)$, $D(H, \nu^0)$ s'identifie à $\Lambda_\nu(\mathscr{N}_\nu)$, et on a

$$\langle \Lambda_\nu(y_1), \Lambda_\nu(y_2) \rangle_{\nu^0} = y_2^* y_1, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathscr{N}_\nu.$$

Si K est le N-module à gauche $L^2(N)$, $D(K, \nu)$ s'identifie à $J\Lambda_\nu(\mathscr{N}_\nu)$, et on a

$$\langle J\Lambda_\nu(y_1'), J\Lambda_\nu(y_2') \rangle_\nu = y_1'^* y_2', \quad \forall y_1', y_2' \in \mathscr{N}_\nu.$$

1.5. LEMME. *Soient ξ_1 et ξ_2 deux vecteurs ν^0-bornés dans H, η_1 et η_2 deux vecteurs ν-bornés dans K.*

On a alors:

a) $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu^0} \in \mathscr{N}_\nu$ *et* $\Lambda_\nu(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu^0}) = R^{\nu^0}(\xi_2)^* \xi_1$;

b) $\langle n_1, \eta_2 \rangle_\nu \in \mathscr{N}_\nu$ *et* $\Lambda_\nu(\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_\nu) = JR^\nu(\eta_1)^* \eta_2$;

c) $\langle \xi_1 \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_\nu, \xi_2 \rangle = \langle \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu^0} \eta_1, \eta_2 \rangle$.

Démonstration. a) D'après [1], lemme 4, $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu 0} \in \mathcal{M}_\nu \subset \mathcal{N}_\nu$, et on a

$$\nu(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu 0}) = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle.$$

On calcule, pour $y \in \mathcal{U}_0$:

$$\langle \Lambda_\nu(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu 0}), J\Lambda_\nu(y) \rangle = \langle \Delta_\nu^{1/2} \Lambda_\nu(y), \Lambda_\nu(\langle \xi_2, \xi_1 \rangle_{\nu 0}) \rangle =$$

$$= \langle \Lambda_\nu(\sigma^\nu_{\mathrm{i}/2}(y)), \Lambda_\nu(\langle \xi_2, \xi_1 \rangle_{\nu 0}) \rangle = \nu(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu 0} \sigma^\nu_{-\mathrm{i}/2}(y)) = \langle \xi_1 y, \xi_2 \rangle = \text{(d'après 1.3)}$$

$$= \langle \xi_1, R^{\nu 0}(\xi_2) J\Lambda_\nu(y) \rangle = \langle R^{\nu 0}(\xi_2)^* \xi_1, J\Lambda_\nu(y) \rangle.$$

b) Se démontre comme a).

L'assertion c) est énoncée dans [2], proposition 12, b). Pour la démontrer, on calcule:

$$\langle \xi_1 \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_\nu, \xi_2 \rangle = \langle J\Lambda_\nu(\langle \eta_2, \eta_1 \rangle_\nu), R^{\nu 0}(\xi_1)^* \xi_2 \rangle =$$
$$= \langle R^\nu(\eta_2)^* \eta_1, \Lambda_\nu(\langle \xi_2, \xi_1 \rangle_{\nu_0}) \rangle = \langle \eta_1, \langle \xi_2, \xi_1 \rangle_{\nu_0} \eta_2 \rangle.$$ ▨

1.6. LEMME. *Soit ψ un poids n.s.f.f. sur $\mathcal{L}_N(K)$ et λ un nombre complexe.*

a) *Pour $y \in \mathcal{D}(\sigma^\nu_{-\mathrm{i}\lambda})$, on a l'inclusion*

$$\frac{\mathrm{d}\nu^\lambda}{\mathrm{d}\psi} y \supset \sigma^\nu_{-\mathrm{i}\lambda}(y) \frac{\mathrm{d}\nu^\lambda}{\mathrm{d}\psi}.$$

b) *Si $\eta \in \mathcal{D}\left(\frac{\mathrm{d}\nu^\lambda}{\mathrm{d}\psi}\right)$ est ν-borné et si $\frac{d\nu^\lambda}{d\psi} \eta$ est également ν-borné, on a l'inclusion*

$$\frac{\mathrm{d}\nu^\lambda}{\mathrm{d}\psi} R^\nu(\eta) \supset R^\nu \left(\frac{\mathrm{d}\nu^\lambda}{\mathrm{d}\psi} \eta \right) \Delta_\nu^\lambda.$$

c) *Si η et η' sont comme en* b), *alors $\left\langle \frac{\mathrm{d}\nu^\lambda}{\mathrm{d}\psi} \eta, \eta' \right\rangle_\nu$ est dans le domaine de $\sigma^\nu_{\mathrm{i}\lambda}$, et on a*

$$\sigma^\nu_{\mathrm{i}\lambda} \left(\left\langle \frac{\mathrm{d}\nu^\lambda}{\mathrm{d}\psi} \eta, \eta' \right\rangle_\nu \right) = \left\langle \eta, \frac{\mathrm{d}\nu^\lambda}{\mathrm{d}\psi} \eta' \right\rangle_\nu.$$

Démonstration. a) Soient $\eta, \eta' \in \mathcal{D}\left(\frac{\mathrm{d}\nu^\lambda}{\mathrm{d}\psi}\right)$. Les deux fonctions de la variable complexe

$$z \to \left\langle y\eta, \frac{\mathrm{d}\nu^z}{\mathrm{d}\psi} \eta' \right\rangle$$

et

$$z \to \left\langle \frac{d\nu^z}{d\psi}\eta, \sigma^\nu_{i\bar z}(y^*)\eta' \right\rangle$$

sont continues dans la bande $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re}\lambda$ (ou $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 0$), analytiques à l'intérieur, et coïncident pour $z = it$, $t \in \mathbf{R}$. Elles sont donc égales partout, en particulier pour $z = \lambda$, ce qui prouve que l'on a $y\eta \in \mathscr{D}\left[\left(\frac{d\nu^{\bar\lambda}}{d\psi}\right)^*\right] = \mathscr{D}\left(\frac{d\nu^\lambda}{d\psi}\right)$, et l'égalité cherchée.

b) Il suffit de vérifier l'inclusion sur $\Lambda_\nu(\mathscr{U}_0)$, qui est un coeur pour Δ_ν^λ: l'assertion découle alors de a).

c) En appliquant deux fois b), on obtient les égalités et inclusions suivantes entre opérateurs dans $L^2(N)$:

$$\left\langle \eta, \frac{d\nu^{\bar\lambda}}{d\psi}\eta' \right\rangle_\nu \Delta_\nu^{-\lambda} = JR^\nu(\eta)^* R^\nu\left(\frac{d\nu^{\bar\lambda}}{d\psi}\eta'\right) J\Delta_\nu^{-\lambda} = JR^\nu(\eta)^* R^\nu\left(\frac{d\nu^{\bar\lambda}}{d\psi}\eta'\right)\Delta_\nu^{\bar\lambda} J \subset$$

$$\subset JR^\nu(\eta)^* \frac{d\nu^{\bar\lambda}}{d\psi} R^\nu(\eta')J \subset J\Delta_\nu^{\bar\lambda} R^\nu\left(\frac{d\nu^\lambda}{d\psi}\eta\right)^* R^\nu(\eta')J = \Delta_\nu^{-\lambda}\left\langle \frac{d\nu^\lambda}{d\psi}\eta, \eta' \right\rangle_\nu.$$

D'où le résultat. ▨

1.7. Lemme. *Soit H un N-module à droite, φ un poids n.s.f.f. sur $\mathscr{L}_{N^0}(H)$ et ξ un vecteur dans le domaine de* $\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}$.

ξ est φ-borné si et seulement si $\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}$ est ν^0-borné; et on a l'égalité dans N:

$$\theta^\varphi(\xi, \xi)^0 = \left\langle \left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi, \left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi \right\rangle_{\nu^0}.$$

Démonstration. Supposons ξ φ-borné. On a, pour $y \in \mathscr{U}_0$:

$$\nu(y^*\theta^\varphi(\xi, \xi)^0 y) = \nu^0(\theta^\varphi(\xi y, \xi y)) = \left\| \left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}(\xi y) \right\|^2 =$$

$$= \left\| \left(\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi\right)\sigma^\nu_{i/2}(y) \right\|^2, \qquad \text{d'après 1.6.a)}$$

soit,

$$\forall y \in \mathscr{U}_0, \quad \left\| \left(\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi\right) y \right\|^2 \leqslant \|\theta^\varphi(\xi, \xi)\|\, \nu(yy^*),$$

qui assure que $\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi$ est ν^0-borné.

On a alors

$$\nu(y^* \theta^\varphi(\xi, \xi) y) = \nu\left(\left\langle\left(\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi\right)\sigma^\nu_{i/2}(y), \left(\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi\right)\sigma^\nu_{i/2}(y)\right\rangle_{\nu^0}\right) =$$

$$= \nu\left(y^* \left\langle\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi, \left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi\right\rangle_{\nu^0} y\right), \qquad \text{d'après 1.3.}$$

D'où l'égalité cherchée.

Inversement, si on suppose $\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi$ ν^0-borné, le calcul précédent assure que

$$\xi = \left(\frac{d\varphi}{d\nu^0}\right)^{1/2}\left(\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi\right)$$

est φ-borné. ▨

1.8. Remarque. En conclusion, considérons un M-N bimodule $\mathscr{H}$ tel que l'on ait exactement $L_M(\mathscr{H}) = L_{N^0}(\mathscr{H})'$.

Si φ est un poids n.s.f.f. sur M, on pose

$$D_\infty(\mathscr{H}, \psi, \nu) = \bigcap_{\lambda \in \mathbf{R}} \mathscr{D}\left(\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^\lambda\right) \cap D(\mathscr{H}, \nu^0)$$

$$M_\infty(\varphi) = \bigcap_{\lambda \in \mathbf{R}} \mathscr{D}(\sigma^\varphi_{i\lambda})$$

$$N_\infty(\nu) = \bigcap_{\lambda \in \mathbf{R}} \mathscr{D}(\sigma^\nu_{i\lambda}).$$

On a tout d'abord, d'après 1.7, $D_\infty(\mathscr{H}, \nu, \varphi) = \bigcap_{\lambda \in \mathbf{R}} \mathscr{D}\left(\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^\lambda\right) \cap D(\mathscr{H}, \varphi)$.

Ensuite d'après 1.6 a), $D_\infty(\mathscr{H}, \varphi, \nu)$ est un $M_\infty(\varphi)$-$N_\infty(\nu)$ bimodule, sur lequel on considérera cette fois les produits scalaires:

$$(\xi | \eta) = \theta^\varphi(\xi, \eta)^0 = \left\langle\left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi, \left(\frac{d\nu^0}{d\varphi}\right)^{1/2}\eta\right\rangle_{\nu^0}$$

$$(\xi, \eta)_\varphi = \theta^{\nu^0}(\xi, \eta)\left\langle\left(\frac{d\varphi}{d\nu^0}\right)^{1/2}\xi, \left(\frac{d\varphi}{d\nu^0}\right)^{1/2}\eta\right\rangle_\varphi,$$

qui sont à valeurs dans N et M respectivement. (D'après [5], II, proposition 2, $D_\infty(\mathscr{H}, \varphi, \nu)$ est dense dans $\mathscr{H}$.)

En complétant $D(\mathscr{H}, \varphi, \nu)$ pour la famille de semi-normes $\{\xi \to \omega((\xi | \xi)_\nu)^{1/2}; \omega \in N^+_*\}$, on obtient un M-N bimodule d'imprimitivité au sens de [7], dont on vérifie facilement qu'il est le "module d'équivalence auto-adjoint" qui donne l'équivalence de Morita entre M et N dans le théorème 8.15 de [7].

La notion de "produit tensoriel de N-modules" permet (pour les seules W^*-algèbres) d'éviter le recours aux bimodules d'imprimitivité dont, en un certain sens, toute la structure est déjà contenue dans les bimodules plus classiques et plus simples considérés ici, qui en particulier contiennent implicitement des "produits scalaires à valeurs opérateurs" dont [1] et [7] font un usage intensif.

2. PRODUIT TENSORIEL DE N-MODULES

2.1. DÉFINITION. ([2]; cf. [8] pour le cas commutatif). Soit N une algèbre de von Neumann, ν un poids n.s. f.f. sur N, H un N-module à droite, K un N-module à gauche. On appelle "*produit tensoriel au-dessus de N, modulo ν*" de H et K et on note $H \otimes_\nu K$ l'espace de Hilbert séparé complété du produit tensoriel algébrique

$$D(H, \nu^0) \odot K$$

muni du produit scalaire défini sur les tenseurs élémentaires par

$$\langle \xi_1 \odot \eta_1, \xi_2 \odot \eta_2 \rangle = \langle \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu^0} \eta_1, \eta_2 \rangle.$$

D'après 1.5.c), $H \otimes_\nu K$ est également l'espace de Hilbert séparé complété de $H \odot D(K, \nu)$ pour le produit scalaire

$$\langle \xi_1 \odot \eta_1, \xi_2 \odot \eta_2 \rangle = \langle \xi_1 \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_\nu , \xi_2 \rangle.$$

On note $\xi \otimes_\nu \eta$ l'image canonique dans $H \otimes_\nu K$ du tenseur $\xi \odot \eta$, $\xi \in D(H, \nu^0)$, $\eta \in K$ (ou bien $\xi \in H$, $\eta \in D(K, \nu)$).

2.2. REMARQUE. a) Pour ξ_0 fixé dans $D(H, \nu^0)$ (resp. η_0 fixé dans $D(K, \nu)$), l'application linéaire

$$K \ni \eta \to \xi_0 \otimes_\nu \eta \in H \otimes_\nu K$$

$$(\text{resp. } H \ni \xi \to \xi \otimes_\nu \eta_0 \in H \otimes_\nu K)$$

est continue.

En particulier, si D_1 est un sous-espace vectoriel dense de $D(H, \nu^0)$ (resp. de H), D_2 un sous-espace vectoriel dense de K (resp. de $D(K, \nu)$), $D_1 \otimes_\nu D_2$ est un sous-espace vectoriel dense de $H \otimes_\nu K$.

b) D'après [2], remarque 16.b), ou d'après 1.3 ci-dessus, on a:

$$\xi y \otimes_\nu \eta = \xi \otimes_\nu \sigma^\nu_{-i/2}(y)\eta, \quad \forall \xi \in H, \quad \forall \eta \in D(K, \nu), \quad \forall \eta \in \mathscr{D}(\sigma^\nu_{-i/2}).$$

De la proposition 12 de [2] on déduit aisément la fonctorialité de cette construction:

2.3. LEMME. *Soient H et H' deux N-modules à droite, K et K' deux N-modules à gauche, T_1 et T_2 deux opérateurs dans $\mathscr{L}_{N^0}(H, H')$ et $\mathscr{L}_N(K, K')$ respectivement.*

Il existe alors un opérateur continu $T_1 \otimes_\nu T_2$ de $H \otimes_\nu K$ dans $H' \otimes_\nu K'$ vérifiant

$$T_1 \otimes_\nu T_2 \cdot \xi \otimes_\nu \eta = T_1\xi \otimes_\nu T_2\eta, \quad \forall \xi \in D(H, \nu^0), \forall \eta \in K$$

(où $\forall \xi \in H$, $\forall \eta \in D(K, \nu)$).

En particulier, $H \otimes_\nu K$ est un $\mathscr{L}_{N^0}(H)$-$\mathscr{L}_N(K)^0$ bimodule.

2.4. Le lemme 15 de [2] peut être reformulé ainsi:

Soit H un N-module à droite, K un N-module à gauche.

a) Il existe un (et un seul) isomorphisme de $\mathscr{L}_N(H)$-N bimodule, U_H^ν, de $H \otimes_\nu L^2(N)$ sur H, vérifiant

$$U_H^\nu(\xi \otimes_\nu J\Lambda_\nu(y)) = \xi y^*, \quad \forall \xi \in H, \ \forall y \in N_\nu.$$

b) Il existe un (et un seul) isomorphisme de N-$\mathscr{L}_N(K)^0$ bimodule, V_K^ν, de $L^2(N) \otimes_\nu K$ sur K, vérifiant

$$V_K^\nu(\Lambda_\nu(y) \otimes_\nu \eta) = y\eta, \quad \forall y \in \mathscr{N}_\nu, \forall \eta \in K.$$

On remarquera que l'on a (modulo les identifications du § 0)

$$U_{L^2(N)}^\nu = V_{L^2(N)}^\nu.$$

2.5. LEMME. *Avec les notations de l'énoncé du lemme 2.3 et 2.4, les deux diagrammes ci-dessous sont commutatifs:*

$$\begin{array}{ccc} H \otimes_\nu L^2(N) & \xrightarrow{U_H^\nu} & H \\ \Big\downarrow{\scriptstyle T_1 \otimes_\nu i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T_1} \\ H \otimes_\nu L^2(N) & \xrightarrow{U_{H'}^\nu} & H' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L^2(N) \otimes_\nu K & \xrightarrow{V_K^\nu} & K \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i \otimes_\nu T_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T_2} \\ L^2(N) \otimes_\nu K' & \xrightarrow{V_{K'}^\nu} & K' \end{array}$$

(i désigne l'identité de $L^2(N)$).

La vèrication du lemme est triviale.

2.6. PROPOSITION. a) *Soit H un N-module à droite, K un N-module à gauche, ν et ν' deux poids n.s.f.f. sur N.*

Il existe un unique isomorphisme de $\mathscr{L}_N(H)$-$\mathscr{L}_N(K)^0$ bimodule, $U_{H,K}^{\nu,\nu'}$, de $H \otimes_\nu K$ sur $H \otimes_\nu K$, vérifiant la propriété suivante: $\forall t_1 \in \mathscr{L}_{N^0}(H, L^2(N))$, $\forall t_2 \in \mathscr{L}_N(K, L^2(N))$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H \otimes_\nu K & & \xrightarrow{U_{H,K}^{\nu,\nu'}} & & H \otimes_{\nu'} K \\ \Big\downarrow{\scriptstyle t_1 \otimes_\nu t_2} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle t_1 \otimes_{\nu'} t_2} \\ L^2(N) \otimes_\nu L^2(N) & \xrightarrow{U_{L^2(N)}^\nu} & L^2(N) & \xleftarrow{U_{L^2(N)}^{\nu'}} & L^2(N) \otimes_{\nu'} L^2(N) \end{array}$$

est commutatif.

b) *Si H' et K' sont deux N-modules, à droite et à gauche respectivement, si T_1 et T_2 sont deux opérateurs dans $\mathscr{L}_{N^0}(H, H')$ et $\mathscr{L}_N(K, K')$ respectivement, alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H \otimes_\nu K & \xrightarrow{U^{\nu,\nu'}_{H,K}} & H \otimes_{\nu'} K \\ \Big\downarrow{\scriptstyle T_1 \otimes_\nu T_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T_1 \otimes_{\nu'} T_2} \\ H' \otimes_\nu K' & \xrightarrow{U^{\nu,\nu'}_{H',K'}} & H' \otimes_{\nu'} K' \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration.

a) *Existence.* Fixons H et supposons que $U^{\nu,\nu'}_{H,K_0}$ existe avec les propriétés voulues pour un N-module à gauche K_0. Alors, d'après le lemme 2.3, $U^{\nu,\nu'}_{H,K}$ existera si K est une ampliation de K_0, ou encore une réduction d'une telle ampliation sur un projecteur commutant à l'action de N.

On peut donc se ramener pour l'existence au cas où $K = L^2(N)$; alors il suffit de prendre $U^{\nu,\nu'}_{H,L^2(N)} = (U^{\nu'}_H)^* U^\nu_H$, et de vérifier, pour $t_1 \in \mathscr{L}_{N^0}(H, L^2(N))$, $t_2 \in \mathscr{L}_N(K, L^2(N))$ la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H \otimes_\nu L^2(N) & \xrightarrow{U^\nu_H} & H & \xleftarrow{U^{\nu'}_H} & H \otimes_{\nu'} L^2(N) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle t_1 \otimes_\nu t_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle t_1 t_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle t_1 \otimes_{\nu'} t_2} \\ L^2(N) \otimes_\nu L^2(N) & \xrightarrow{U^\nu_{L^2(N)}} & L^2(N) & \xleftarrow{U^{\nu'}_{L^2(N)}} & L^2(N) \otimes_{\nu'} L^2(N). \end{array}$$

Unicité. Soit $\xi \in D(H, \nu^0)$, $\eta \in D(K, \nu)$; soient y_1 et y_2 dans $\mathscr{U}_0$. On a alors

$$U^{\nu,\nu'}_{H,K}(\xi y_1 \otimes_\nu y_2 \eta) = U^{\nu,\nu'}_{H,K} \cdot R^{\nu^0}(\xi) \otimes_\nu R^\nu(\eta) \cdot J\Lambda_\nu(y_1^*) \otimes_\nu \Lambda_\nu(y_2) =$$

$$= R^{\nu'^0}(\xi) \otimes_{\nu'} R^{\nu'}(\eta) \cdot [U^{\nu'}_{L^2(N)}]^* \sigma^\nu_{-i/2}(y_1) \Lambda_\nu(y_2).$$

$U^{\nu,\nu'}_{H,K}$ est donc déterminée sans ambiguité sur les vecteurs de la forme $\xi y_1 \otimes_\nu y_2 \eta$ comme ci-dessus, qui d'après la remarque 2.2 sont totaux dans $H \otimes_\nu K$.

b) D'après la proposition 3.b) de [1], tout opérateur dans $\mathscr{L}_N(K, K')$ est limite, pour la topologie de la convergence ponctuelle, de combinaisons linéaires d'opérateurs de la forme $t'^* t$, $t \in L_N(K, L^2(N))$, $t' \in \mathscr{L}_N(K', L^2(N))$. Par continuité séparée du produit tensoriel (remarque 2.2), il suffit de vérifier la commutativité du diagramme b) pour $T_1 = t_1'^* t_1$, $T_2 = t_2'^* t_2$, avec $t_1 \in L_{N^0}(H, L^2(N))$, $t_1' \in \mathscr{L}_{N^0}(H', L^2(N))$, $t_2 \in \mathscr{L}_N(K, L^2(N))$, $t_2' \in \mathscr{L}_N(K', L^2(N))$: on applique alors a). ▨

Le "produit tensoriel au-dessus de N" est donc indépendant du poids ν, comme on pouvait s'y attendre. La construction est entièrement déterminée par ses propriétés fonctorielles et l'équation $L^2(N) \otimes_N L^2(N) = L^2(N)$, en ce sens qu'une notion de "produit tensoriel au-dessus de N" vérifiant cette propriété et celle du lemme 2.3 serait nécessairement celle-ci.

Nous donnons ci-dessous une construction explicite de l'isomorphisme $U_{H,K}^{\nu,\nu'}$ dans un cas particulier:

2.7. PROPOSITION. *Avec les notations de la proposition 2.6, si ν' est le poids $\nu(h\cdot)$, h étant un opérateur positif affilié au centraliseur N_ν du poids ν, alors l'isomorphisme $U_{H,K}^{\nu,\nu'}$ est donné par:*

$$U_{H,K}^{\nu,\nu'}\ \xi \otimes_\nu \eta = \xi \otimes_{\nu'} h^{1/2}\eta, \quad \forall \xi \in H, \quad \forall \eta \in D(K, \nu) \cap \mathscr{D}(h^{1/2})$$

ou encore

$$U_{H,K}^{\nu,\nu'}\xi \otimes_\nu \eta = \xi h^{1/2} \otimes_{\nu'} \eta, \quad \forall \xi \in D(H, \nu^0) \cap \mathscr{D}(h^{1/2}), \quad \forall \eta \in K.$$

Démonstration. On remarquera que, si e est un projecteur spectral de h correspondant à un intervalle borné, et si η est ν-borné, alors $e\eta$ est ν-borné et dans le domaine de $h^{1/2}$: les propriétés énoncées caractérisent bien $U_{H,K}^{\nu,\nu'}$; elles ont en outre un sens parce que, si $\eta \in \mathscr{D}(h^{1/2}) \cap D(K, \nu)$, alors $h^{1/2}\eta$ est ν'-borné et on a

$$R^{\nu'}(h^{1/2}\eta) = R^\nu(\eta).$$

D'où on déduit

$$\langle \xi_1 \otimes_\nu \eta_1, \xi_2 \otimes_\nu \eta_2 \rangle = \langle \xi_1 \otimes_{\nu'} h^{1/2}\eta_1, \xi_2 \otimes_{\nu'} h^{1/2}\eta_2 \rangle,$$

$\forall \xi_1, \xi_2 \in H$, $\forall \eta_1, \eta_2 \in D(K, \nu) \cap \mathscr{D}(h^{1/2})$, et l'existence d'un isomorphisme W de $H \otimes_\nu K$ sur $H \otimes_{\nu'} K$ envoyant le tenseur $\xi \otimes_\nu \eta$ sur $\xi \otimes_{\nu'} h^{1/2}\eta$, $\xi \in H, \eta \in D(K,\nu) \cap \cap \mathscr{D}(h^{1/2})$.

Soit W' l'isomorphisme de $H' \otimes_\nu K'$ sur $H' \otimes_{\nu'} K'$ défini de manière similaire pour un N-module à droite H' et un N-module à gauche K'. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} H\otimes_\nu K \arrow[r, "W"] \arrow[d, "T_1\otimes_\nu T_2"] & H'\otimes_{\nu'} K' \arrow[d, "T_1\otimes_{\nu'} T_2"] \\ H'\otimes_\nu K' \arrow[r, "W'"] & H'\otimes_{\nu'} K' \end{tikzcd}$$

est commutatif pour $T_1 \in \mathscr{L}_{N^0}(H, H')$, $T_2 \in \mathscr{L}_N(K, K')$.

D'après la proposition précédente, il suffit de vérifier que l'on a $W = U_{H,K}^{\nu,\nu'}$ dans le seul cas où H est le N-module à droite $L^2(N)$ et K le N-module à gauche $L^2(N)$, vérification qui n'offre aucune difficulté.

3. FORME STANDARD D'UNE ALGÈBRE DE VON NEUMANN

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $M \subset \mathscr{L}(\mathscr{H})$ une algèbre de von Neumann. On considère les objets suivants:

— le commutant M' de M dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$;

— l'algèbre de von Neumann N opposée de M' (de sorte que $\mathscr{H}$ est M-N bimodule);

— un poids n.s.f.f. ν sur N et le poids correspondant μ' sur M';
— le M-M bimodule $\mathscr{H} \otimes_\nu \bar{\mathscr{H}}$;
— l'involution isométrique antilinéaire J_ν de $\mathscr{H} \otimes_\nu \bar{\mathscr{H}}$ caractérisée par

$$J_\nu(\xi \otimes_\nu \bar{\eta}) = \eta \otimes_\nu \bar{\xi}, \ \forall \xi, \eta \in D(\mathscr{H}, \nu);$$

— le cône fermé $[\mathscr{H} \otimes_\nu \bar{\mathscr{H}}]_+$ engendré par les vecteurs de la forme $\xi \otimes_\nu \bar{\xi}$, $\xi \in D(\mathscr{H}, \nu)$.

PROPOSITION 3.1 (Théorème de Hilbert-Schmidt généralisé). *Le quadruplet* $(\mathscr{H} \otimes_\nu \bar{\mathscr{H}}, M, J_\nu, [\mathscr{H} \otimes_\nu \bar{\mathscr{H}}]_+)$ *est une forme standard de* M *au sens de* [4], *définition* 2.1.

Démonstration. 1) Supposons $M = N$, $\mathscr{H} = L^2(N)$: en identifiant $\bar{\mathscr{H}}$ à $\mathscr{H}$ par l'involution canonique J, il est facile de vérifier que l'isomorphisme $U^\nu_{L^2(N)}$ de $L^2(N) \otimes_\nu L^2(N)$ sur $L^2(N)$ échange les involutions J_ν et J, les cônes $[L^2(N) \otimes_\nu L^2(N)]_+$ et $L^2(N)_+$.

2) Supposons M purement infinie: il existe un isomorphisme de N-modules à droite de $\mathscr{H}$ sur $q[L^2(N)]$, où q est un projecteur de N. M est ainsi isomorphe à l'algèbre réduite N_q, et la proposition se déduit du cas 1) via [4], lemme 2.6.

3) On est maintenant ramené au cas où M est semi-finie. On peut encore réduire le problème en vérifiant que l'isomorphisme $U^{\nu,\nu'}_{H,K}$ explicité par la proposition 2.7 échange les involutions J_ν et $J_{\nu'}$, les cônes $[\mathscr{H} \otimes_\nu \bar{\mathscr{H}}]_+$ et $[\mathscr{H} \otimes_{\nu'} \bar{\mathscr{H}}]_+$. On peut ainsi se limiter au cas où ν est une trace.

4) Soit ν une trace normale semi-finie fidèle sur N. Soit μ' la trace correspondante sur $M' = N^0$. Il existe une trace normale semi-finie fidèle μ sur M telle que l'on ait $\frac{d\mu'}{d\mu} = 1$ au sens de [1]. En appliquant les résultats du § 1, on calcule, pour $\xi, \eta, \xi', \eta' \in D(H, \mu) = D(H, \nu^0)$:

$$\langle \xi \otimes_\nu \bar{\eta}, \xi' \otimes_\nu \bar{\eta}' \rangle = \langle \xi \langle \bar{\eta}, \bar{\eta}' \rangle_\nu, \xi' \rangle = \langle \langle \eta', \eta \rangle_{\mu'} \xi, \xi' \rangle =$$

$$= \langle \theta^\mu(\eta', \eta)\xi, \xi' \rangle = \langle R^\mu(\eta)^* \xi, R^\mu(\eta')^* \xi' \rangle; \qquad \text{(d'après 1.7)}$$

d'où l'existence d'un isomorphisme W de $\mathscr{H} \otimes_\nu \bar{\mathscr{H}}$ sur $L^2(M)$ qui, au tenseur $\xi \otimes_\nu \bar{\eta}$ comme ci-dessus, associe le vecteur $R^\mu(\eta)^* \xi$ de $L^2(M)$. Or, d'après le lemme 1.5. b) et 1.2, on a $R^\mu(\eta)^* \xi = \frac{d\omega_{\xi,\eta}}{d\mu}$. W est donc manifestement un isomorphisme de M-N bimodule qui échange les involutions J_ν et J, et les cônes $[\mathscr{H} \otimes_\nu \bar{\mathscr{H}}]_+$ et $L^2(M)_+$. ▨

3.2. REMARQUE. Maintenant que l'on sait a priori que $\mathscr{H} \otimes_\nu \bar{\mathscr{H}}$ est standard pour M, et en particulier que le cône $[\mathscr{H} \otimes_\nu \bar{\mathscr{H}}]_+$ est autopolaire, il est facile de vérifier que l'isomorphisme de forme standard, W, de $\mathscr{H} \otimes_\nu \bar{\mathscr{H}}$ sur $L^2(M)$, se caractérise de la manière suivante: pour tout poids n.s.f.f. φ sur M, pour tout ξ dans $\mathcal{H}$, pour tout η dans $D(\mathcal{H}, \nu^0) \cap \mathcal{D}\left(\left(\frac{d\varphi}{d\nu^0}\right)^{1/2}\right)$, on a

$$W[\xi \otimes_\nu \bar{\eta}] = R^\varphi\left(\left(\frac{d\varphi}{d\nu^0}\right)^{1/2}\eta\right)^* \xi .$$

On obtient donc une analogie remarquable avec le cas des facteurs discrets, et une généralisation des résultats de [8] pour les algèbres discrètes. Toutefois, pour satisfaisante qu'elle soit sur le plan formel, notre proposition 3.1 ne doit pas faire illusion: toute la difficulté inhérente à l'identification des formes standards est implicitement contenue dans la définition du produit tensoriel relatif.

Classiquement, par ampliation et réduction, on déduit du cas standard le théorème de commutation général:

3.3. PROPOSITION. *Soit H un N-module à droite, K un N-module à gauche. Dans l'espace de Hilbert $H\otimes_\nu K$, le commutant de $\mathcal{L}_{N^0}(H)\otimes_\nu C_K$ est égal à $C_H\otimes_\nu \mathcal{L}_N(K)$.*

Comme second corollaire de la proposition 3.1, nous obtenons que la procédure d'ampliation relative épuise la théorie des représentations d'une algèbre de von Neumann:

3.4. COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $M \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une algèbre de von Neumann d'opérateurs de $\mathcal{H}$; on note N l'algèbre opposée du commutant de M dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, et on fixe un poids n.s.f.f. ν sur N.*

Si H est un M module à gauche, il existe un N-$\mathcal{L}_M(H)^0$ bimodule K, unique à isomorphisme de bimodules près, tel que les M-$\mathcal{L}_M(H)^0$ bimodules H et $\mathcal{H}\otimes_\nu K$ soient isomorphes.

Démonstration. Existence. On prendra $K = \mathcal{H}\otimes_\varphi H$, où φ est un poids n.s.f.f. sur M.

Unicité. Si les M-$\mathcal{L}_M(H)^0$ bimodules H et $\mathcal{H}\otimes_\nu K$ sont isomorphes, les N-$\mathcal{L}_M(H)^0$ bimodules $\mathcal{H}\otimes_\nu H$ et $\mathcal{H}\otimes_\varphi(\mathcal{H}\otimes_\nu K) = L^2(N)\otimes_\nu K = K$ sont isomorphes. ▨

3.5. REMARQUE. (Correspondances et foncteurs). Les résultats acquis permettent de reformuler en termes de "bimodules — espaces de Hilbert" les résultats de M. A. Rieffel sur les correspondances fonctorielles entre algèbres de von Neumann:

1) Soient M et N deux algèbres de von Neumann. On sait ([7], proposition 5.4) qu'un foncteur F (additif, normal, auto-adjoint, ...), de la catégorie *normod N* des représentations normales de N, dans *normod M*, est caractérisé par le M-N bimodule $F(L^2(N))$. Le produit tensoriel relatif fournit une procédure explicite pour reconstruire le foncteur à partir du bimodule:

3.5.1. PROPOSITION (cf. [7], proposition 5.4). *Tout foncteur F de normod$N$ dans normod$M$ est équivalent à un foncteur de la forme:*

$$\{N\text{-}modules\} \ni K \mapsto H \otimes_{\nu} K$$

$$L_N(K_1, K_2) \ni T \mapsto 1_H \otimes_N T,$$

ou H est le M-N bimodule $F(L^2(N))$. (ν est un poids n.s.f.f. arbitraire sur N.)

2) On vérifie facilement que, pour un M-N bimodule H donné, le foncteur de la proposition 3.5.1. est une équivalence si et seulement si, d'une part M et N sont fidèlement représentées, et d'autre part l'image de N^0 dans $L(H)$ est égale au commutant de l'image de M (cf. [7], théorème 8.15).

3) Foncteurs et applications complètement positives.

Il est facile de faire le rapprochement avec les exemples correspondants introduits en [2], § I (et aussi de vérifier que la composition des foncteurs est donnée par le produit tensoriel "relatif" des bimodules, c'est-à-dire la composition des correspondances).

Par exemple, si ρ est un $*$-homorphisme normal de M dans N ($\rho(1)$ est alors un projecteur de N), le foncteur correspondant au M-N bimodule $L^2(\rho)$ est celui qui consiste, K étant un N-module à gauche, à réduire K sur le projecteur $\rho(1)$ et à représenter M, via ρ, dans l'espace $\rho(1) \cdot K$.

Plus généralement, si P est une application complètement positive de M dans N, et si $\mathscr{H}$ est le bimodule associé à P dans la proposition 6 de [2], le foncteur F de Rep$N$ dans Rep$M$ associé au N-M bimodule $\mathscr{H}$ est ce que nous avons appelé dans [8] (§ 2.3) le foncteur de Stinespring associé à P (par référence à [9]).

Donc tout bimodule cyclique induit un foncteur de Stinespring. Plus précisément, si H est un M-N bimodule, Ω un vecteur cyclique (i.e. $M\Omega N$ est total dans H) et ν un poids n.s.f.f. sur N tel que Ω soit ν^0-borné, alors le foncteur associé à H en 3.5.1 est équivalent au foncteur de Stinespring associé à l'application complètement positive de M dans N:

$$M \ni x \mapsto \langle x\Omega, \Omega\rangle_{\nu^0} \in N.$$

En corollaire, tout foncteur de normod$N$ dans normod$M$ est (à équivalence près) somme directe de foncteurs de Stinespring.

BIBLIOGRAPHIE

1. CONNES, A., On the spatial theory of von Neumann algebras, *J. Functional Analysis*, **35** (1980), 153--164.
2. CONNES, A., Notes manuscrites, 1980.
3. DIXMIER, J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1969

4. HAAGERUP, U., The standard form of von Neumann algebras, *Math. Scand.*, **37**(1975), 271–283.
5. HILSUM, M., Les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann, *J. Functional Analysis*, **40**(1981), 151–169.
6. PASCHKE, W. L., Inner product modules over B^*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **182**(1973), 443–468.
7. RIEFFEL, M. A., Morita equivalence for C^*-algebras and W^*-algebras, *J. Pure Appl. Algebra*, **5**(1974), 51–96.
8. SAUVAGEOT, J. L., Produits tensoriels de Z-modules, *Publ. Univ. P. & M. Curie*, **23**/1980.
9. STINESPRING, W. F., Positive functions on C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**(1975), 211–216.

JEAN-LUC SAUVAGEOT
Université Paris VI,
Lab. de Calcul des Probabilités,
Tour 56–4, Place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05,
France.

Received June 20, 1981; revised June 15, 1982.