J. OPERATOR THEORY
14(1985), 3–29

АВТОМОРФИЗМЫ ИНЪЕКТИВНЫХ ФАКТОРОВ ТИПА III_0

В. Я. ГОЛОДЕЦ

ВВЕДЕНИЕ

Одной из центральных задач в теории алгебр фон Неймана является задача изучения и описания автоморфизмов алгебр. Например, классическая эргодическая теория изучает автоморфизмы пространства Лебега, или автоморфизмы коммутативной алгебры фон Неймана. В последние годы получены значительные продвижения в изучении и классификации автоморфизмов аппроксимативно конечных (инъективных) алгебр фон Неймана [1], [2], [3]. Для факторов типа II и III_λ, $0 < \lambda \leqslant 1$, распадающихся в бесконечное тензорное произведение конечных факторов типа I_n, $n < \infty$ (факторов Араки-Вудса [4]) найдено описание классов внешне сопряженных автоморфизмов, хотя доказательства для случая III_1 не публиковались. Автоморфизмы инъективных факторов типа III_0 изучались мало, а задача изучения инвариантов внешнего сопряжения автоморфизмов для таких факторов не рассматривалась.

Настоящая статья посвящена изучению таких вопросов, она является переработкой нашего препринта [19].

Прежде, чем сформулировать вопросы, которые обсуждаются в статье, напомним, что согласно [5] всякий инъективный фактор M типа III_0 изоморфен $W^*(A, \alpha, \mathbf{Z})$, скрещенному произведению алгебры $A = L^\infty(X, \mu)$ где (X, μ)-пространство Лебега, на группу автоморфизмов α^n, $n \in \mathbf{Z}$, действующую на A свободно и эргодически. Каждой такой группе в [6] сопоставлен поток $W_t(\alpha)$, $t \in \mathbf{R}$, действующий на пространстве Лебега (X_0, μ_0), которое каноническим образом строится по (X, μ). Этот поток совпадает с гладким потоком весов, рассмотренным в [7]. Оказывается две группы α и β автоморфизмов A типа III_0 слабо эквивалентны (а значит и $W^*(A, \alpha, \mathbf{Z}) \sim W^*(A, \beta, \mathbf{Z})$) тогда и только тогда, когда потоки $W_t(\alpha)$ и $W_t(\beta)$ изморфны [6]. Далее, условимся называть централизатором потока $W_t(\alpha)$ множество $C(W(\alpha)) \subset \mathrm{Aut}(X_0, \mu_0)$ такое, что если $\gamma \in C(W)$, то $\gamma W_t(\alpha) = W_t(\alpha)\gamma$, $t \in \mathbf{R}$.

В [7] показано, что существует канонический гомоморфизм $\beta \to \mathrm{mod}\,\beta$ из $\mathrm{Aut}\, W^*(A, \alpha, \mathbf{Z})$ в $C(W)$, ядру которого принадлежит $\overline{\mathrm{Int}}\, W^*(A, \alpha, \mathbf{Z})$ ($\overline{\mathrm{Int}}\, M$ определено в [1]).

Теперь мы можем сформулировать вопросы, которые рассматриваются в этой статье.

1) Для всякого ли $\delta \in C(W(M))$ существует $\gamma \in \mathrm{Aut}\, M$ такой, что $\mathrm{mod}\,\gamma = \delta$?

2) Пусть $\beta_i \in \mathrm{Aut}\, M$, $i = 1, 2$ и $\mathrm{mod}\,\beta_1 = \mathrm{mod}\,\beta_2 = W_t(M)$, $t \neq 0$ или $\mathrm{mod}\,\beta_1 = \mathrm{mod}\,\beta_2 = \mathrm{id}$ и $p_a(\beta_1) = p_a(\beta_2) = 0$, где $p_a(\beta)$ — асимптотический период β [1]. Следует ли отсюда, что β_1 и β_2 внешне сопряжены относительно M, т.е. $\exists\, \gamma \in \mathrm{Aut}\, M$ и $u \in U(M)$, где $U(M)$ — унитарная группа M, такие, что $\beta_1 = \mathrm{Ad}\, u \cdot \gamma \cdot \beta_2 \cdot \gamma^{-1}$?

(Заметим, что ответ на подобный вопрос для инъективного фактора типа III_λ, $0 < \lambda < 1$, дает полную классификацию классов внешне сопряженных автоморфизмов с $p_a = 0$ [2].)

3) Пусть $\beta_i \in \mathrm{Aut}\, M$, $i = 1, 2$ и $\exists\, \gamma \in C(W)$, такой, что $\mathrm{mod}\,\beta_1 = \gamma \cdot \mathrm{mod}\,\beta_2 \cdot \gamma^{-1}$. Следует ли отсюда, что β_1 и β_2 внешне сопряжены относительно M, если $p_a(\beta_i) = 0$?

В настоящей статье даны ответы на первые два вопроса для произвольных инъективных факторов типа III_0 и на третий вопрос — для произвольных инъективных факторов M типа III_0, у которых инвариант $T(M) = (t : \sigma_t \in \mathrm{Int}\, M) \neq 0$ (см. [8]).

Решение вопроса 2) (см. § 2), сводится к доказательству того, что ядром отображения $\beta \to \mathrm{mod}\,\beta$ является $\overline{\mathrm{Int}}\, M$.

Первый вопрос решен в несколько более общей форме, чем сформулировано. Пусть $[\alpha]$ — полная группа автоморфизмов A, порожденная α [6], а $\mathscr{N}[\alpha]$ — ее нормализатор, т.е. $\mathscr{N}[\alpha] = \{\gamma \in \mathrm{Aut}\, A : \gamma[\alpha]\gamma^{-1} = [\alpha]\}$. Понятно, что если $\gamma \in \mathscr{N}[\alpha]$, то γ индуцирует $\gamma_f \in \mathrm{Aut}\, W^*(A, \alpha, \mathbf{Z})$. В п. 3 § I доказано, что для $\delta \in C(W)$ существует $\gamma \in \mathscr{N}[\alpha]$ такой, что $\mathrm{mod}\,\gamma = \delta$ (см. [19]). Заметим, что другое решение этого важного вопроса уже получено в [21] (см. также [22]).

Вопрос 3) рассмотрен для факторов M с $T(M) \neq 0$. Из ответа на этот вопрос следует, что всякий $\gamma \in \mathrm{Aut}\, M$ с $p_a(\gamma) = 0$ внешне сопряжен с $\gamma_f \in \mathrm{Aut}\, M$, причем $\gamma_f(A) = A$ и $\gamma_f|_A \in \mathscr{N}[\alpha]$. В [22] приведено полное решение вопроса 3) для автоморфизмов из $\mathscr{N}[\alpha]$. С помощью результатов [22] можно дать полное решение вопроса 3) и для факторов типа III_0, что подготавливается к публикации.

Кроме введения статья содержит три параграфа. В § I рассматриваются нормализаторы полных групп и ассоциированные потоки, в п. 3, § I дан ответ на вопрос I. В § 2 изучаются $\alpha \in \mathrm{Aut}\, M$, у которых $\mathrm{mod}\,\alpha = W_t$ для $t \in \mathbf{R}$, в § 3 рассматриваются автоморфизмы факторов M с $T(M) \neq 0$.

Я благодарен рецензенту за ряд полезных указаний.

1. АППРОКСИМАТИВНО КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ ТИПА III_0 И ИХ НОРМАЛИЗАТОРЫ

1. Пусть G — счетная несингулярная группа преобразований пространства Лебега (X, B, μ). Через $[G]$ обозначим полную группу преобразований (X, B, μ), порожденную G (см. [6]). Полные эргодические группы $[G]$ допускают классификацию, аналогичную той, которая хорошо известна для факторов фон Неймана. В дальнейшем мы будем предполагать, что $[G]$ имеет тип III_0 [8]. Определим двойственную G_d группу преобразований для группы G ([9], [10]), действующую на $(X\times \mathbf{R}, B\times B(\mathbf{R}), d\mu\times du)$ согласно формуле

$$(1.1)\qquad g_d(x, u) = \left(gx, u + \log\frac{d\mu(gx)}{d\mu(x)}\right), \quad (x, u) \in X\times \mathbf{R}.$$

Пусть $\mathscr{I}$ — измеримое разбиение $X\times\mathbf{R}$ [11], порожденное G_d — инвариантными измеримыми множествами. Рассмотрим на $X\times\mathbf{R}$ поток $T_s(x, u) = (x, u + s)$, $(x, u) \in X\times\mathbf{R}$. Так как T_s коммутирует с $g_d \in G_d$, то можно рассмотреть фактор-поток $W_s(G)$ на $X\times\mathbf{R}/\mathscr{I}$. Тогда $W_sG)$ — несингулярный измеримый поток [9], называемый потоком, ассоциированным с G. Согласно [6], если G_i — аппроксимативно конечные (а.к.) группы преобразований (X_i, μ_i) типа III_0, то G_1 и G_2 слабо эквивалентны тогда и только тогда, когда $W(G_1)$ и $W(G_2)$ изоморфны.

ЛЕММА 1.1. *Если $\alpha \in \mathscr{N}[G]$, то α определяет автоморфизм* $\operatorname{mod}\alpha$ *пространства $X_0 = X\times\mathbf{R}/\mathscr{I}$, причем* $\operatorname{mod}\alpha \in C(W(G))$ *(см. Введение). Отображение $\alpha \to \operatorname{mod}\alpha$ — гомоморфизм, ядро которого содержит, по крайней мере,* $[G]$.

Для доказательства достаточно заметить, что если $\alpha \in \mathscr{N}[G]$, то $\alpha_d(x, u) = (\alpha x, u + \log d\mu(\alpha x)/d\mu(x))$ принадлежит $\mathscr{N}[G_d]$. Остальные рассуждения понятны.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Если $f \in L^\infty(X\times\mathbf{R}, \mu\times m)$, где m — мера Лебега на $\mathbf{R}$ и*

$$(1.2)\qquad f\left(gx, u + \log\frac{d\mu(gx)}{d\mu(x)}\right) = f(x, u)$$

то $F(x, u) = f(\alpha x, u + \log d\mu(\alpha x)/d\mu(x))$, где $\alpha \in \mathscr{N}[G]$, также удовлетворяет уравнению вида (1.2).

Напомним, далее, что согласно [6] всякая полная а.к. группа $[G]$ типа III_0 автоморфизмов (Ω, B, σ') может быть приведена к следующему виду. Пусть $(\Omega, B, \sigma') = (X, B_X, \mu)\times(Y, B_Y, \nu)$, где μ — конечная непрерывная мера на X, ν — σ-конечная мера на Y, $\sigma = \mu \times \nu \sim \sigma'$

$$S_g(x, y) = (x, S_y),$$
(1.3)
$$Q_g(x, y) = (Qx, U_x y),$$

где S — свободно действующий эргодический автоморфизм (Y, B_Y, ν), сохраняющий ν, U_x — измеримое поле автоморфизмов (Y, B_Y, ν) (см. [6], § 2), причем $U_x \in \mathcal{N}[S]$, для п.в. $x \in X$ и $\nu \circ U_x = \exp \Phi(U_x)\nu$, а Q — эргодический несингулярный свободно действующий автоморфизм (X, B_X, μ). S_g, Q_g порождают $[G]$, а $\sigma = \mu \times \nu$ выбрана таким образом, что

$$\varphi(x) = \log \frac{\mathrm{d}\sigma Q_g}{\mathrm{d}\sigma}(x, y) = \Phi(U_x) + \log \frac{\mathrm{d}\mu(Qx)}{\mathrm{d}\mu(x)} > \delta > 0. \tag{1.4}$$

Теперь опишем ассоциированный поток W_t для группы (S_g, Q_g). Двойственная группа G_d действует в пространстве $(\Omega \times \mathbf{R}, \sigma \times m)$, а ассоциированный поток в подпространстве $(\Omega \times \mathbf{R}, \sigma \times m)$, инвариантном относительно Q_{gd}, S_{gd}. Так как S_g сохраняет меру, то S_{gd} — инвариантные функции удовлетворяют условию

$$f(x, y, u) = f(x, S_g, u).$$

Но S действует эргодически в (Y, B_Y, ν), поэтому G_d — инвариантные функции не зависят от y и удовлетворяют условию

$$f(Qx, u + \varphi(x)) = f(x, u). \tag{1.5}$$

Теперь в $(X \times \mathbf{R}, \mu \times m)$ рассмотрим автоморфизм

$$Q_\varphi(x, u) = (Qx, u + \varphi(x)). \tag{1.6}$$

В силу условия (1.4) это преобразование имеет тип I, т.е. разбиение $X \times \mathbf{R}$ на его траектории измеримо. Пусть $\mathscr{I}(Q_\varphi)$ — разбиение $X \times \mathbf{R}$ на траектории Q_φ, тогда фактор-пространство $X \times \mathbf{R}/\mathscr{I}(Q_\varphi)$ изоморфно подмножеству $X_0 \subset X \times \mathbf{R}$ вида $(x, u) \in X_0$, если $0 \leqslant u < \varphi(Q^{-1}x)$, мера μ_0 на X_0 совпадает с ограничением $\mu \times m$ на X_0. Понятно, что поток $T_s(x, u) = (x, u + s)$, коммутирующий с Q_φ, определяет поток W_s на $X \times \mathbf{R}/\mathscr{I}(Q_\varphi)$ (а значит и на X_0). Следовательно ассоциированный поток $W_s(G)$ является специальным потоком с потолочной функцией $\varphi(Q^{-1}x)$ и базисным автоморфизмом Q^{-1} [6].

ЛЕММА 1.2. *Пусть $G = (S_g, Q_g)$ — группа типа III_0 только что описанного вида, $\alpha \in \mathcal{N}[G]$, причем $\operatorname{mod} \alpha = W_s$, $s \in \mathbf{R}$. Тогда существует*

$t \in [G]$ такой, что $\beta = t^{-1}\alpha$ имеет вид

$$\beta(x, y) = (x, V_x y), \tag{1.7}$$

где V_x — измеримое поле автоморфизмов (Y, B_Y, ν) [6], причем $V_x \in \mathcal{N}[S]$ и $\Phi(V_x) = s$ для почти всех x.

Доказательство. Пусть $\mathrm{mod}\,\alpha = \mathrm{id}$, тогда α определяет преобразование $X \times Y: (x, y) \to (x'_\alpha(x, y), y'_\alpha(x, y))$. Заметим, что функции x'_α и y'_α измеримы. Действительно, если E — измеримое подмножество X, то измеримость x'_α вытекает из соотношения $\{(x, y) \in X \times Y : x'_\alpha(x, y) \in E\} = \alpha^{-1}(E \times Y)$. Так как $\mathrm{mod}\,\alpha = \mathrm{id}$ на $X \times \mathbf{R}/\mathcal{I}(Q_\varphi)$, то для всех функций из $L^\infty(X \times \mathbf{R})$, удовлетворяющих (1.5), выполнено равенство $f(x'_\alpha(x, y), u + \psi_\alpha(x, y)) = f(x, u)$, где $\psi_\alpha(x, y) = \log(\mathrm{d}\sigma(\alpha(x, y))/\mathrm{d}\sigma(x, y))$. Но тогда $(x'_\alpha(x, y), u + \psi_\alpha(x, y))$ и (x, u) принадлежит одной траектории Q_φ (см. (1.6)), т.е.

$$x'_\alpha(x, y) = Q^{n(x,y)}x, \quad n(x, y) \in \mathbf{Z},$$

$$\psi_\alpha(x, y) = Z(n, \varphi, x), \tag{1.8}$$

$$Z(n, \varphi, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(Q^i x) \quad \text{при } n \geqslant 0.$$

Пусть $\mathcal{I}$ — разбиение $X \times Y$ на множестве E_n, $n \in \mathbf{Z}$, такие, что для $(x, y) \in E_n$ выполнено равенство $x'_\alpha(x, y) = Q^n x$. Понятно, что E_n — попарно непересекающиеся множества и $\bigcup_n E_n = X \times Y$. Рассмотрим теперь множества αE_n и $Q_g^n E_n$. В силу (1.8) X — носители у них совпадают, а из построения следует, что множества $\{y : (x, y) \in \alpha E_n\}$ и $\{y : (x, y) \in Q_g^n E_n\}$ для почти всех x имеют одинаковую меру ν. Отсюда следует (см. лемму 4.2 [6]), что существует $s_n \in [S_g]$ такой, что $s_n Q_g^n E_n = \alpha E_n$. Рассмотрим теперь преобразование $X \times Y$ вида

$$t(x, y) = s_n Q_g^n(x, y) \quad \text{при } (x, y) \in E_n. \tag{1.9}$$

Так как E_n — попарно не пересекаются и $\bigcup_n E_n = X \times Y$, а также $s_n Q_g^n E_n$ $(=\alpha E_n)$ — попарно не пересекаются и $\bigcup_n s_n Q_g^n E_n = X \times Y$, то в силу леммы Дая [12] $t \in [G]$. Но тогда $t^{-1}\alpha \in \mathcal{N}[G]$ и, более того, в силу (1.8) $t^{-1}\alpha$ сохраняет меру $\sigma = \mu \times \nu$. Следовательно, $t^{-1}\alpha \in \mathcal{N}[S_g]$, а так как $(t^{-1}\alpha)(x, y) = (x, y'_\alpha(x, y))$, то $t^{-1}\alpha = \int_X \oplus V_x \,\mathrm{d}\mu(x)$, где V_x — измеримое поле автоморфизмов, причем для μ-почти всех x $V_x \in \mathcal{N}[S]$ и $\nu \cdot V_x = \nu$. ▨

2. В этом пункте более подробно рассмотрим полную группу $[G]$ с образующими вида (1.3) в предположении, что $\varphi(x) = \varphi$ (Const) (см (1.4)). *В этом случае будем говорить, что действие G на $X \times Y$ явяется периодическим.*

Возникает вопрос при каких условиях группа G может иметь периодическое действие. Ответ выражается в терминах инварианта $T(G)$ (или иначе, T — множества) для G [9]: $T(G)$ содержит все $t \in \mathbf{R}$, для которых существует вещественная измеримая функция $\xi(\omega)$ такая, что $\exp \mathrm{i}(\xi(g\omega) - \xi(\omega)) = \exp \mathrm{i}t \log(\mathrm{d}\sigma(g\omega)/\mathrm{d}\sigma(\omega))$, $g \in G$, где (Ω, σ) — пространство Лебега, в котором действует G. Понятно, что $T(G)$ совпадает с инвариантом Конна $T(M)$ [2], где M — фактор вида $M = W^*(A, G)$, $A = L^\infty(\Omega, \sigma)$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть G — счетная группа не сингулярных преобразований пространства Лебега (Ω, σ). Если $T \in T(G)$, $T \neq 0$, то G имеет периодическое действие.*

Доказательство. Рассмотрим меру P на Ω, положив $\mathrm{d}P(\omega) = \exp(-\xi(\omega)/T)\mathrm{d}\sigma(\omega)$, тогда $\log(\mathrm{d}P(g\omega)/\mathrm{d}P(\omega)) = \log\left(\frac{\exp(-\xi(g\omega)/T)}{\exp(-\xi(\omega)/T)} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma(g\omega)}{\mathrm{d}\sigma(\omega)}\right) = \frac{2\pi n(\omega)}{T}$, где $n(\omega) \in \mathbf{Z}$. Следовательно мера P является лакунарной и, как и в [6], можно определить Q_g и S_g, действующие на $(X \times Y, \mu \times \nu)$ причем

$$X \times Y = \Omega,\ \mu \times \nu = P \text{ и } \mathrm{d}P(Q_g\omega)/\mathrm{d}P(\omega) = \frac{2\pi}{T} n, \quad n \in \mathbf{N},$$

$$\mathrm{d}P(S_g\omega)/\mathrm{d}P(\omega) = 1.$$

Если G_d — двойственная группа для G, то G_d действует в пространстве $X \times Y \times \mathbf{R}$ с мерой $\mathrm{d}\mu \times \mathrm{d}\nu \times \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$, $u \in \mathbf{R}$.

Пусть Z — подпространство, порожденное измеримыми подмножествами $X \times Y \times \mathbf{R}$, инвариантными относительно $G_\mathrm{d}(Q_\mathrm{d}, S_\mathrm{d})$. Если $f \in L^\infty(Z)$, то

$$f(x, u) = f(Qx, u + (2\pi/T)n(x)), \quad x \in X,\ u \in \mathbf{R},$$

где $n(x) \in \mathbf{Z}$ (см. (1.5)), $n(x) > 0$. В частности, если $e_n(x, u) = \exp \mathrm{i}Tnu$, $n \in \mathbf{Z}$, то $e_n \in L^\infty(Z) \cap L^\infty(\mathbf{R})$.

Пусть теперь $\rho(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — измеримый поток на $S = X \times Y \times \mathbf{R}$, действующий согласно формуле

$$\rho(t)(x, y, u) = (x, y, u + t),$$

а $\hat{\rho}(t)$—фактор-поток на Z. Так как $\rho(2\pi/T)e_n = e_n$, то в Z существует подалгебра измеримых подмножеств Z_1, неподвижных относительно $\hat{\rho}(2\pi/T) =$

$= \rho(2\pi/T)$. На этой алгебре группа $\hat{\rho}(t)$ совпадающая, очевидно, с $\rho(t)$, является периодической с периодом $2\pi/T$, а поскольку $\hat{\rho}(t)$ — эргодический поток на Z, то $\hat{\rho}(t)$ — эргодический поток на Z_1, последнее означает, что $L^\infty(Z_1) \sim L^\infty(\mathbf{R}/(2\pi/T)\mathbf{Z})$.

Пусть Γ — группа автоморфизмов S, порожденная G_d и $\rho(t)$. Рассмотрим измеримый группоид $S\times\Gamma$ [14]. Множество $S_0 = X\times Y\times\{0\}$ является, очевидно его полным лакунарным счетным сечением (см. определение 2.1 [14]). Так как на S_0 действует аппроксимативно конечная группа $G(S_g, Q_g)$, то $S\times\Gamma$ также аппроксимативно конечный группоид (см. опред. 6.1 и теор. 5.3 [14]) и подобен группоиду $S_0\times G$.

С другой стороны, почти каждой точке $z \in Z_1$ отвечает измеримая оболочка S_z орбиты группы Γ_1, порожденной G_d и $\rho(2\pi/T)$. В силу рассуждений, приведенных выше, S_z также является полным лакунарным счетным сечением для группоида $S\times\Gamma$, поэтому $S\times\Gamma$ также подобен $S_z\times\Gamma_1$. Но группа Γ_1 на S_z имеет периодическое действие, так как G_d сохраняет меру, $\rho(2\pi/T)$ действует эргодически на алгебре измеримых подмножеств, инвариантных относительно G_d и умножает меру μ_z на S_z на $e^{-2\pi/T}$, причем $\rho(2\pi/T) \in \mathcal{N}[G_d]$.

Осталось заметить, что поскольку группоиды $S_0\times G$ и $S_z\times\Gamma_1$ подобны, то их ассоциированные потоки изоморфны. ▨

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Пусть W_t — специальный поток с базисным автоморфизмом Q^{-1} и потолочной функцией $\varphi(x) = \varphi$. Если α_0 — борелевский автоморфизм пространства (X_0, μ_0), где $X_0 = \{(x, u) \mid x \in X, 0 \leqslant u < \varphi\}$,* а $d\mu_0 = d\mu\times du$, *коммутирующий с W, то α_0 имеет вид*

$$\alpha_0(x, u) = (\alpha x, u + p),$$

где $\alpha \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$, $\alpha Q = Q\alpha$, $p = \mathrm{Const}$.

(Подобное утверждение доказано в [21], см. также [19].)

Доказательство. Напомним, что

$$W_t(x, u) = (Q^{-n}x, u + t - Z(n, \varphi))$$

при $Z(n, \varphi) - u \leqslant t < Z(n + 1, \varphi) - u$, где $Z(n, \varphi) = \varphi(Q^{-1}x) + \ldots + \varphi(Q^{-n}x)$ (для $n \geqslant 0$). Поэтому если

$$\alpha_0(x, u) = (x', u'_x), \quad 0 \leqslant u'_x < \varphi, \tag{2.1}$$

то поскольку $W_\varphi\alpha_0 = \alpha_0 W_\varphi$

$$\alpha_0(Q^{-1}x, 0) = \alpha_0 W_\varphi(x, 0) = W_\varphi\alpha_0(x, 0) =$$

$$= W_\varphi(x', u'_x) = (Q^{-1}x', u'_x).$$

Отсюда с помощью аналогичных рассуждений можно показать, что

$$\alpha_0(Q^{-n}x, 0) = (Q^{-n}x', u'_x), \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{2.2}$$

Далее, так как α_0 — борелевский автоморфизм (X_0, μ_0), то множество (x', u'_x) $(=\alpha_0(x, u))$, где $x \in X$, есть борелевское подмножество в X_0. Более того, случай $\alpha_0(x_1, 0) = (x', u_1)$, $\alpha_0(x_2, 0) = (x', u_2)$, где $u_1 \neq u_2$ и $0 \leqslant u_i < \varphi$, исключен, поскольку $(x', u_2) = W_{u_2-u_1}(x', u_1)$, а значит $(x_2, 0) = \alpha_0^{-1}W_{u_2-u_1}\alpha_0$ $(x_1, 0) = (x_1, u_2 - u_1)$ и $x_1 = x_2$, $u_1 = u_2$. Но тогда $x' \to u'_x$ есть борелевская функция, а ввиду (2.2), учитывая эргодичность Q, можно сделать вывод о том, что $u'_x = p$ (Const), $0 \leqslant p < \varphi$.

Рассмотрим теперь автоморфизм $\beta = W_{-p}\alpha_0$. Легко видеть, что $\beta(x, u) = (x', u)$, где x' определяется так же, как и в (2.1). Но тогда $x \to x' = \alpha(x)$ есть автоморфизм (X, μ), который ввиду (2.2) коммутирует с Q. ▨

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть G удовлетворяет условиям леммы 1.2 и, более того, G имеет периодическое действие. Если $\alpha \in \mathcal{N}[G]$, то существует $t \in [G]$ такой, что $\beta = t^{-1}\alpha$ имеет вид*

$$\beta(x, y) = (\hat{\alpha}x, W_x y), \tag{2.3}$$

где $\hat{\alpha}$ — автоморфизм (X, μ), $\hat{\alpha}Q = Q\hat{\alpha}$, а W_x — измеримое поле автоморфизмов (Y, B_Y, ν), причем $W_x \in \mathcal{N}[S]$ для почти всех x и $\Phi(W_x) = p - \log(\mathrm{d}\mu(\hat{\alpha}x)/\mathrm{d}\mu(x))$, где p — Const. .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Пусть S — эргодический автоморфизм (Y, B_Y, ν), сохраняющий σ-конечную меру ν (группа типа II_∞). Тогда $\mathcal{N}[S]$ содержит однопараметрическую непрерывную группу автоморфизмов $\rho(t)$, $t \in \mathbf{R}$, такую что $\rho(t_1)\rho(t_2) = \rho(t_1 + t_2)$ и $\nu \cdot \rho(t) = e^t \nu$. Пример группы с такими свойствами можно построить следующим образом. Пусть G -- группа типа III_1, а G_d — двойственная группа (см. (1.1)), тогда G_d обладает нужными свойствами. Понятно, что G_d действует эргодически, сохраняет меру $\mathrm{d}\nu(\omega, u) = e^{-u}\mathrm{d}\mu(\omega)\mathrm{d}u$ на $Y = \Omega \times \mathbf{R}$. Поток определим согласно формуле $\rho(s)(\omega, u) = (\omega, u - s)$, тогда $\rho(s)$, $s \in \mathbf{R}$, и G_d коммутируют.

Доказательство теоремы 2.3. Наряду с группой $G = (S_g, Q_g)$ рассмотрим группу $G' = (S'_g, Q'_g)$, которая действует в пространстве $(X \times Y', \mu \times \nu')$, где (Y', ν') — такое же, как и в замечании 2.4, а (X, μ), как и у группы G.

$$S'_g(x, y) = (x, S'y),$$

$$Q'_g(x, y) = (Qx, U'_x y),$$

где $U'_x = \rho(\Phi(U_x))$, $\rho(s)$ — автоморфизм из $\mathcal{N}[S]$, рассмотренный в замечании 2.4, а $\Phi(U_x) = \varphi - \log(\mathrm{d}\mu(Qx)/\mathrm{d}\mu(x))$. Понятно, что у G' ассоциированный поток $W(G')$ имеет в качестве потолочной функции $\varphi(x) = \varphi$, а в качестве базисного автоморфизма Q, т.е. $W(G') = W(G)$. Но тогда в силу результатов [6] группы G и G' слабо эквивалентны. Поэтому без ограничения в общности можно предположить, что $U_x = \rho(\Phi(U_x))$.

Пусть теперь $\alpha_g \in \mathcal{N}[G]$, тогда $\mathrm{mod}\,\alpha_g$ — автоморфизм (X_0, μ_0), коммутирующий с $W_t(G)$. В силу предположения 2.2 $(\mathrm{mod}\,\alpha_g)(x, u) = (\alpha x, u + p)$, где α — автоморфизм (X, μ), коммутирующий с Q. Положим

$$\beta_g(x, y) = (\alpha x, \rho(p - \log(\mathrm{d}\mu(\alpha x)/\mathrm{d}\mu(x)))y). \tag{2.4}$$

В силу свойств $\rho(s)$ (см. замечание) $\beta_g \in \mathcal{N}[S]$. Покажем, что $Q_g\beta_g = \beta_g Q_g$. Действительно, так как

$$(Q_g\beta_g)(x, y) = \left(Q\alpha x,\ \rho\left(\varphi - \log\frac{\mathrm{d}\mu(Q\alpha x)}{\mathrm{d}\mu(\alpha x)}\right)\rho\left(p - \log\frac{\mathrm{d}\mu(\alpha x)}{\mathrm{d}\mu(x)}\right)y\right),$$

$$(\beta_g Q_g)(x, y) = \left(\alpha Q x,\ \rho\left(p - \log\frac{\mathrm{d}\mu(\alpha Q x)}{\mathrm{d}\mu(Q x)}\right)\rho\left(\varphi - \log\frac{\mathrm{d}\mu(Q x)}{\mathrm{d}\mu(x)}\right)y\right),$$

то в силу свойств производных Радона правые части этих равенств совпадают, т.е. $Q_g\beta_g = \beta_g Q_g$. Но тогда $\beta_g \in \mathcal{N}[S]$ и $\gamma_g = \alpha_g\beta_g^{-1} \in \mathcal{N}[G]$, причем $\mathrm{mod}\,\gamma_g = \mathrm{id}$. Следовательно, $\alpha_g = \gamma_g\beta_g$. В силу леммы 1.2 существует $t \in [G]$, такой, что $(t^{-1}\gamma_g)(x, y) = (x, V_x y)$, где $\Phi(V_x) = 0$, но тогда $t^{-1}\alpha_g = (t^{-1}\gamma_g)\cdot\beta_g$ и ввиду (2.4) делаем вывод о справедливости (2.3). ▨

3. При доказательстве 2.3 было показано, в частности, что всякому автоморфизму α из $C(W)$, где W_t — специальный поток с постоянной потолочной функцией, отвечает автоморфизм $\alpha_g \in \mathcal{N}[G]$ такой, что $\mathrm{mod}\,\alpha_g = \alpha$, где G — группа, для которой W является ассоциированным потоком. Докажем этот результат в общем случае.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть (X_0, μ_0) — пространство, в котором действует специальный поток $W_t(G)$, ассоциированный с группой G, автоморфизмов пространства Лебега, а α — автоморфизм (X_0, μ_0) из $C(W)$,* т.е.

$$\alpha W_t = W_t\alpha, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

Тогда существует $\hat{\alpha} \in \mathcal{N}[G]$ такой, что $\mathrm{mod}\,\hat{\alpha} = \alpha$.

(Отметим, что теорема утверждает результат обратный лемме 1.1.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 3.1 *относительно α, а $M = W^*(A, G)$ — фактор типа* III_0, *который является* *скрещенным произведением* $A = L^\infty(X\times Y, \mu\times\nu)$ *на группу* $G = (S_g, Q_g)$ *(см. (1.3)). Тогда существует* $\hat{\alpha} \in \operatorname{Aut} M$ *такой, что* $\operatorname{mod}\hat{\alpha} = \alpha$.

(Это предложение доказано совместно с С. И. Безуглым.)

Доказательство. Напомним, что X_0 есть $\{(x, u) \mid x \in X,\ 0 \leqslant u < \varphi(Q^{-1}x)\}$, $d\mu_0(x, u) = d\mu(x)\,du$. Рассмотрим на X_0 меру k:

$$dk(x, u) = e^{-u}\,d\mu(x)\,du, \tag{3.1}$$

а в пространстве $(X_0\times Y, k\times\nu)$ рассмотрим группу

$$\hat{S}(x, u, y) = (x, u, Sy),$$

где S — эргодический автоморфизм (Y, ν), сохраняющий σ-конечную меру ν (как и в (1.3)), причем будем предполагать, что (Y, ν) и S определены так же, как и в замечании 2.4.

Пусть $U_x = \rho(\Phi(U_x))$, где ρ определено в замечании 2.4, U_x и $\Phi(U_x)$ — такие же, как и в (1.3). Тогда U_x коммутируют между собой для п.в. $x \in X$. Положим

$$Z(0, U^{-1}, x) = 1,$$

$$Z(l, U^{-1}, x) = \prod_{l\geqslant i>0} U^{-1}_{Q^{-i}x}, \quad Z(-l, U^{-1}, x) = \prod_{l>i\geqslant 0} U_{Q^{i}x}.$$

Тогда для $l > 0$

$$\Phi(Z(l, U^{-1}, x)) = Z(l, \Phi(U^{-1}), x) = \sum_{i=1}^{l} \Phi(U^{-1}_{Q^{-i}x}), \tag{3.2}$$

аналогично определяется $\Phi(Z(l, U^{-1}, x))$ для $l < 0$.

Рассмотрим поток $\hat{W}(t)$ в пространстве $(X_0\times Y, k\times\nu)$:

$$\hat{W}(t)(x, u, y) = (W_t(x, u),\ V(x, u + t)y), \tag{3.3}$$

где $V(x, t) = Z(I(x, t), U^{-1}, x)$ а $I(x, t)$ для $t > 0$ определяется как наименьшее n из $\mathbf{N}$, для которого

$$0 \leqslant t - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(Q^{-k}x) < \varphi(Q^{-n}x).$$

Аналогично, $I(x, t)$ может быть определено и для $t < 0$.

В силу такого определения V, поток $\hat{W}(t) \in \mathcal{N}[S]$ для $t \in \mathbf{R}$, более того, $\hat{W}(t)S = S\hat{W}(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Нашей целью будет расширение α до автоморфизма α_1 пространства $(X_0 \times Y, k \times v)$ такого, что $\alpha_1 \hat{W}(t) = \hat{W}(t)\alpha_1$ и $\alpha_1 \in \mathcal{N}[S]$. Проделаем вспомогательные вычисления

$$\log \frac{\hat{W}(t)^{-1} \mathrm{d}(k \times v)}{\mathrm{d}(k \times v)}(x, u, y) = \log \frac{\mathrm{d}(k \times v)(W_t(x, u), V(x, u+t)y)}{\mathrm{d}(k \times v)(x, u, y)} =$$

$$= \log \frac{\mathrm{d}k(W_t(x, u))}{\mathrm{d}k(x, u)} + \log \frac{\mathrm{d}v(V(x, u+t)y)}{\mathrm{d}v(y)} =$$

$$= \log \frac{\mathrm{d}k(Q^{-I(x, u+t)}x, u + t - Z(I(x, u+t), \varphi, x))}{\mathrm{d}k(x, u)} + \Phi(V(x, u+t))$$

$$= \log \frac{\exp - (u + t - Z(I(x, u+t), \varphi, x))\, \mathrm{d}\mu(Q^{-I(x, u+t)}x)}{(\exp - u)\mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}u} +$$

$$+ \Phi(Z(I(x, u+t), U^{-1}, x) =$$

$$= -t + Z(I(x, u+t), \varphi, x) + \log \frac{\mathrm{d}\mu(Q^{-I(x, u+t)}x)}{\mathrm{d}\mu(x)} -$$

$$- Z(I(x, u+t), \varphi, x) - \log \frac{\mathrm{d}\mu(Q^{-I(x, u+t)}x)}{\mathrm{d}\mu(x)} = -t,$$

где было использовано соотношение

$$\varphi(U^{-1}_{Q^{-1}x}) = -\varphi(Q^{-1}x) - \log \frac{\mathrm{d}\mu(Q^{-1}x)}{\mathrm{d}\mu(x)}$$

с целью преобразования (3.2). Таким образом,

$$\log \frac{\hat{W}(t)^{-1} \mathrm{d}(k \times v)}{\mathrm{d}(k \times v)}(x, u, y) = -t. \tag{3.4}$$

Положим, далее, $\alpha(x, u) = (x', u')$ и, учитывая, что

$$\Phi(V(x', u' + t)) = -t - \log \frac{\mathrm{d}W_t^{-1}k}{\mathrm{d}k}(x', u')$$

получим следующее соотношение

$$\Phi(V(x', u' + t)) - \Phi(V(x, u + t)) =$$

$$= -t - \log \frac{\mathrm{d}W_t^{-1}k}{\mathrm{d}k}(\alpha(x, u)) + t + \log \frac{\mathrm{d}W_t^{-1}k}{\mathrm{d}k}(x, u) =$$

$$= \log \frac{\mathrm{d}\alpha^{-1}W_t^{-1}\alpha k}{\mathrm{d}k}(x, u) - \log \frac{\mathrm{d}W_t^{-1}k}{\mathrm{d}k}(\alpha(x, u)) =$$

$$= \log \frac{\mathrm{d}\alpha k}{\mathrm{d}k}(W_t(x, u)) + \log \frac{\mathrm{d}W_t^{-1}k}{\mathrm{d}k}(\alpha(x, u)) +$$

$$+ \log \frac{\mathrm{d}\alpha^{-1}k}{\mathrm{d}k}(x, u) - \log \frac{\mathrm{d}W_t^{-1}k}{\mathrm{d}k}(\alpha(x, u)) =$$

$$= \log \frac{\mathrm{d}\alpha^{-1}k}{\mathrm{d}k}(x, u) - \log \frac{\mathrm{d}\alpha^{-1}k}{\mathrm{d}k}(W_t(x, u)).$$

Таким образом, если обозначить

$$f(x, u) = \log \frac{\mathrm{d}\alpha^{-1}k}{\mathrm{d}k}(x, u),$$

то

$$\Phi(V(x', u' + t)) - \Phi(V(x, u + t)) = f(x, u) - f(W_t(x, u)). \tag{3.5}$$

Положим теперь в соответствии с замечанием 2.4

$$P_{(x,u)} = \rho(-f(x, u)) \tag{3.6}$$

тогда $P_{(x,u)} \in \mathcal{N}[\hat{S}]$ и

$$P_{W_t(x,u)}V(x, u + t)P_{(x,u)}^{-1} = V(x', u' + t), \tag{3.7}$$

где $(x', u') = \alpha(x, u)$. Действительно, поскольку $V(x, u) = Z(I(x, u), U^{-1}, x)$, а $U_x = \rho(\Phi(U_x))$, то $V(x, u) = \rho(Z(I(x, u), \Phi(U_x^{-1}), x)) = \rho(\Phi(V(x, u)))$. Отсюда, учитывая (3.5) и (3.6), выводим (3.7). Но тогда

$$\hat{\alpha}(x, u, y) = (\alpha(x, u), P_{(x,y)}y) \tag{3.8}$$

— автоморфизм $(X_0 \times Y, k \times \nu)$, принадлежащий $\mathcal{N}[\hat{S}]$ и коммутирующий в силу (3.7) с $\hat{W}(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Следовательно, $\hat{\alpha}$ определяет автоморфизм $\hat{\alpha}_f$

фактора $\hat{M}$, который является скрещенным произведением $L^\infty(X_0 \times Y, k \times \nu)$ на $\hat{S}$, а затем на $\hat{W}(t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Пусть N — скрещенное произведение $L^\infty(X_0 \times Y, k \times \nu)$ на $\hat{S}$, тогда N — II_∞-алгебра, ее след обозначим через τ. Поток $\hat{W}(t)$, $t \in \mathbf{R}$, индуцирует группу $\theta(t)$, $t \in \mathbf{R}$, автоморфизмов N, причем в силу (3.4) $\tau \cdot \theta(t) = \mathrm{e}^{-t}\tau$, следовательно, для $\hat{M} = W^*(N, \theta, \mathbf{R})$ мы имеем непрерывное разложение. Поэтому гладкий поток весов для $\hat{M}$ совпадает с $W(t)$ (см. гл. II лемма 1.4 [7]).

Из построения N следует, что N — аппроксимативно конечная (или инъективная [13]) алгебра типа II_∞. Но тогда $\hat{M}$ также инъективный фактор, поскольку он является скрещенным произведением N на аменабельную группу его автоморфизмов $\mathbf{R}$ [13]. Но тогда $M \sim \hat{M}$, так как у них потоки весов изоморфны (см. [5], [6]), таким образом, всякому $\alpha \in C(W)$ отвечает $\hat{\alpha} \in \mathrm{Aut}\,\hat{M}$. ▨

Доказательство теоремы 3.1. Прежде всего заметим, что в силу (3.4) разбиение пространства $(X_0 \times Y, k \times \nu)$ на орбиты $\hat{W}(t)$, $t \in \mathbf{R}$, измеримо. Действительно, рассмотрим $\hat{W}(1)$. Тогда ввиду (3.4) согласно лемме Дая (см. лемму 8.8 [15]) разбиение $(X_0 \times Y, k \times \nu)$ на траектории $\hat{W}(1)$ измеримо. Обозначим это разбиение через $\mathscr{I}_1$ и рассмотрим на фактор-пространстве $X_0 \times Y/\mathscr{I}_1$ поток $\hat{W}(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Так как $\hat{W}(1)$ на $X_0 \times Y/\mathscr{I}_1$ является тождественным преобразованием, то $\hat{W}(t)$ на $X_0 \times Y/\mathscr{I}_1$ является периодическим потоком с периодом равным 1. Но тогда на $X_0 \times Y/\mathscr{I}_1$ существует инвариантная мера относительно $\hat{W}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\hat{W}$ определяет однопараметрическую сильно непрерывную периодическую группу унитарных операторов с дискретным спектром. Отсюда можно заключить, что разбиение пространства $X_0 \times Y/\mathscr{I}_1$ на орбиты $\hat{W}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, измеримо. Понятно, что развиение $\mathscr{I} = \mathscr{I}_1 \vee \mathscr{I}_2$ пространства $X_0 \times Y$ также измеримо и это разбиение совпадает с разбиением на траектории потока $\hat{W}(t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Пусть $\Omega = X_0 \times Y/\mathscr{I}$ и σ — мера на Ω, индуцированная $k \times \nu$, тогда $(X_0 \times Y, k \times \nu) = (\Omega \times \mathbf{R}, \mathrm{d}\sigma \times \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u)$ (см. [16]) и $\hat{W}(t)$ действует на $(\omega, u) \in \Omega \times \mathbf{R}$ согласно формуле

$$\hat{W}(t)(\omega, u) = (\omega, u + t).$$

Так как в замечании 2.4 G_d и $\rho(t)$ коммутируют, то из определения $\hat{W}$ (см. (3.3)) можно предполагать, что $\hat{S}$ и $\hat{W}(t)$, $t \in \mathbf{R}$, коммутируют. Но тогда $\hat{S}$ определяет автоморфизм S_1 фактор-пространства $(\Omega \times \sigma)$. Расширим S_1 до автоморфизма $\hat{S}_1$ пространства $\Omega \times \mathbf{R}$, положив $\hat{S}_1(\omega, u) = (S_1\omega, u)$, тогда $\hat{S}^{-1}\hat{S}$ — автоморфизм $(\Omega, \mathbf{R})$, тождественно действующий на Ω и коммутирующий с $\hat{W}(t)$. Но тогда $\hat{S}_1^{-1}\hat{S} = T_{\varphi(\omega)}$, где $T_\varphi(\omega, u) = (\omega, u + \varphi(\omega))$, а φ — измеримая функция на Ω, т.е. $\hat{S}(\omega, u) = (S_1\omega, u + \varphi(\omega))$. Аналогично, $\hat{\alpha}$, определенный согласно (3.8) имеет вид $\hat{\alpha}(\omega, u) = (\alpha_1\omega, u + \psi(\omega))$, где α_1 — автоморфизм Ω, причем $\alpha_1 \in \mathcal{N}[S_1]$, поскольку $\hat{\alpha} \in \mathcal{N}[\hat{S}]$ и $\hat{\alpha}\hat{W}(t) = \hat{W}(t)\hat{\alpha}$, $t \in \mathbf{R}$.

Приведенные рассуждения показывают, что $\hat{S}^n$, $n \in \mathbf{Z}$, является двойственной группой (см. п. 1) для S_1^n, $n \in \mathbf{Z}$, а поток $\hat{W}(t)$ ассоциирован с S_1^n, более того, для $\alpha \in C(W)$ существует автоморфизм α_1, пространства Ω, где действует S_1, причем $\alpha_1 \in \mathcal{N}[S_1]$ и $\operatorname{mod}\alpha_1 = \alpha$. ▨

2. НЕСКОЛЬКО ТЕОРЕМ О СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА АВТОМОРФИЗМАХ ИНЪЕКТИВНЫХ ФАКТОРОВ ТИПА III_0

Пусть M — инъективный фактор типа III_0, W_t — гладкий поток весов для M. В п.п. 1, 2 рассматриваются $\alpha, \beta \in \operatorname{Aut} M$, у которых $\operatorname{mod}\alpha = \operatorname{mod}\beta = W_t$, $t \in \mathbf{R}$, и доказывается, что такие автоморфизмы внешне сопряжены (если $t = 0$, то предполагается, что $p_a(\alpha) = p_a(\beta) = 0$). В п. 3 изучаются $\alpha \in \operatorname{Aut} M$ такие, что $\alpha(M_\varphi) = M_\varphi$ для некоторого лакунарного веса φ на M.

1. Начнем с доказательства.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть M — инъективный фактор типа* III_0, $\alpha \in \operatorname{Aut} M$ *и* $\operatorname{mod}\alpha = \mathrm{id}$, *тогда* $\alpha \in \overline{\operatorname{Int}} M$.

(Как отметил рецензент, этот результат анонсирован в [20], доказательство публикуется впервые.)

Доказательство. В силу IV.1.10 [7] на M существует т. норм. строго полуконечный лакунарный вес φ_0 такой, что $\varphi_0\cdot\hat{\alpha} = \varphi_0$ и $\hat{\alpha}|_{Z_{\varphi_0}} = \mathrm{id}$, где Z_{φ_0} — центр M_{φ_0}, а $\hat{\alpha} = \operatorname{Ad} u\cdot\alpha$ для некоторого $u \in U(M)$. Далее, согласно теореме 1.5 [17] существует позитивный $k \in Z_{\varphi_0}$, для которого $\varphi(\cdot) = \varphi_0(k\,\cdot)$ является $\mathbf{Q}$ — почти-периодическим точным нормальным строго полуконечным весом на M. Так как $M_{\varphi_0} \subseteq M_\varphi$, то $Z_\varphi = M'_\varphi \cap M \subseteq M'_{\varphi_0} \cap M = Z_{\varphi_0}$ (см. теорему 1.5 [17]), а поскольку $k \in Z_{\varphi_0}$ и $\hat{\alpha}(k) = k$, то

$$\varphi\cdot\hat{\alpha} = \varphi_0(k\hat{\alpha}(\cdot)) = \varphi, \quad \hat{\alpha}|_{Z_\varphi} = \mathrm{id}. \tag{1.1}$$

Воспользовавшись теперь теми же соображениями, что и при доказательстве теоремы II.1 [5] можно построить возрастающую последовательность неймановских подалгебр $M_k \subset M$ типа I_∞ со свойствами: $(\bigcup_k M_k)'' = M$;

сужение φ на M_k полуконечно; M_k — σ^φ, $t \in \mathbf{R}$, инвариантна, $k \in \mathbf{N}$; если $N_k = (M_k)_\varphi$, то центр N_k совпадает с Z_φ, $(\bigcup_k N_k)'' = M_\varphi$; для всякого абелевого проектора $e \in N_k$ с центральным носителем равным I, $\varphi(e) < \infty$; существует условное ожидание E_k из M на M_k.

Покажем, что для всякого $k \in \mathbf{N}$ существует унитарный u_k из M_φ, для которого $\hat{\alpha}(x) = \mathrm{Ad}\, u_k(x)$ при $x \in M_k$. Пусть Z_k — центр M_k, тогда $Z_k \subseteq Z_\varphi$. Понятно, что в M_k существует подфактор R_k типа I_∞ такой, что R_k и Z_k порождают M_k. Напомним, что согласно построению (см. II [5]) M_k есть скрещенное произведение N_k на конечную коммутативную группу Γ_k автоморфизмов N_k, действующую свободно на Z_φ, причем если $u \in U(M_k)$ и $\mathrm{Ad}\, u \in \Gamma_k$, то $\sigma_t^\varphi(u) = z^{it}u$, где $z \in Z_\varphi^+$ (см. доказательство теор. II. 1 [5]). Поэтому R_k можно выбрать так, чтобы его матричные единицы e_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots$, обладали свойствами: $e_{ii} \in N_k$, $i = 1, 2, \dots$, и $\varphi(e_{ii}) = \varphi(e_{11}) < \infty$; $\sigma_t^\varphi(e_{ij}) = z_{ij}^{it} e_{ij}$, где $z_{ij} \in Z_\varphi^+$, $i, j = 1, 2, \dots$. Но тогда в силу (1.1) центральные носители e_{11} и $\alpha^{-1}(e_{11})$ в M_φ совпадают и существует частичная изометрия w в M_φ такая, что $ww^* = \alpha^{-1}(e_{11})$ и $w^*w = e_{11}$. Если положить $u_k = \sum_j \alpha^{-1}(e_{j1}) w e_{1j}$ то $u_k \in U(M_\varphi)$ и $\mathrm{Ad}\, u_k(x) = \alpha^{-1}(x)$ для $x \in R_k$. Кроме того, $\alpha^{-1}(z) = z = \mathrm{Ad}\, u_k(z)$ для $z \in Z_\varphi$. Итак, $\alpha^{-1}(x) = \mathrm{Ad}\, u_k(x)$ для $x \in M_k$ и $\varphi \cdot \mathrm{Ad}\, u_k = \varphi$.

Докажем, что $\lim_k \mathrm{Ad}\, u_k^* = \alpha$ относительно p — топологии в $\mathrm{Aut}\, M$ (см. [18]). Пусть $\mathfrak{N} = \{x : x \in M, \varphi(x^*x) < \infty\}$, тогда линейные комбинации функционалов вида $\psi(x) = \varphi(h_1 x h_2)$, где $h_i \in \mathfrak{N}$, $i = 1, 2$, а $x \in M$ плотны в M_*. Если E_k — условное ожидание в M на M_k, а $h \in \mathfrak{N}$, то $\text{s-}\lim_{k\to\infty} E_k h = h$. Кроме того, так как $(E_k h)^* E_k h \leqslant h^*h$, то $E_k h \in \mathfrak{N} \cap M_k$, поэтому линейные комбинации функционалов вида $\psi(x) = \varphi(h_1 x h_2)$, где $h_i \in \mathfrak{N} \cap (\bigcup_k M_k)$, а $x \in M$ плотны в M_*. Но для каждого такого функционала, ввиду того, что $\varphi \cdot \alpha = \varphi$ и $\varphi \cdot \mathrm{Ad}\, u_k = \varphi$, $k \in \mathbf{N}$, при достаточно больших k имеет место равенство

$$\psi(\alpha(x)) = \varphi(\alpha^{-1}(h_1) x \alpha^{-1}(h_2)) = \varphi(\mathrm{Ad}\, u_k(h_1) x \mathrm{Ad}\, u_k(h_2)) =$$

$$= \psi(\mathrm{Ad}\, u_k^*(x)), \quad x \in M.$$

Отсюда следует, что $\lim_k \mathrm{Ad}\, u_k^* = \alpha$ в p — топологии в $\mathrm{Aut}\, M$. ▨

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Пусть M — такой же, как и в теореме, $\theta_j \in \mathrm{Aut}\, M$, $j = 1, 2$, $\mathrm{mod}\, \theta_j = \mathrm{id}$ и $p_a(\theta_j) = 0$, тогда существует $\sigma \in \overline{\mathrm{Int}}\, M$, для которого $\theta_2 = \mathrm{Ad}\, u \cdot \sigma \cdot \theta_1 \cdot \sigma^{-1}$, где $u \in U(M)$. Если же $p_a(\theta_j) > 0$ и $p_a(\theta_1) = p_a(\theta_2)$, $\theta_j^{p_a(\theta_j)} = \mathrm{id}$, то θ_2 и θ_1 сопряжены.*

Следствие вытекает из теоремы 1.1 и теоремы 2 [1].

2. Перейдем к рассмотрению $\alpha \in \operatorname{Aut} M$, у которых $\operatorname{mod}\alpha = W_t$, $t \neq 0$, где W_t — гладкий поток весов для M [7].

ЛЕММА 2.1. *Пусть M — такой же, как и прежде, если $\alpha \in \operatorname{Aut} M$, $\operatorname{mod}\alpha = W_t$, $t \neq 0$, то $p_a(\alpha) = 0$.*

Доказательство. Пусть $p_a(\alpha) = m > 0$, тогда $\alpha^m \in \operatorname{Ct} M$ [1], но согласно [2], стр. 467, $\operatorname{Ct} M = \overline{\operatorname{Range}\delta_M}$. Поэтому $\operatorname{mod}\alpha^m = \mathrm{id}$, т.е. $W_{mt} = \mathrm{id}$. что исключено, так как поток III_0-фактора не является периодическим [15]. ▨

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть M — инъективный фактор типа III_0, $\theta_i \in \operatorname{Aut} M$, $i = 1, 2$, $\operatorname{mod}\theta_i = W_t$, $t \neq 0$, тогда θ_1 и θ_2 внешне сопряжены.*

Доказательство. Так как M — фактор Кригера, то $M \otimes N \sim M$, где N — инъективный фактор типа II_∞. Пусть $\rho(t) \in \operatorname{Aut} N$ такой, что $\tau \cdot \rho(t) = e^t \tau$, где τ — т. норм. полуконечный след на N. Понятно, что $\mathrm{id} \otimes \rho(t) \in \operatorname{Aut}(M \otimes N)$, $p_a(\mathrm{id} \otimes \rho(t)) = 0$, $\operatorname{mod}(\mathrm{id} \otimes \rho(t)) = W_t$.

Рассмотрим автоморфизмы $\gamma_j = \theta_j \otimes \rho(-t) \otimes \rho(t) \in \operatorname{Aut}(M \otimes N \otimes N)$ $(= \operatorname{Aut} M)$. Тогда $\theta_j \otimes \rho(-t) \in \operatorname{Aut}(M \otimes N)$ $(= \operatorname{Aut} M)$ и $\operatorname{mod}(\theta_j \otimes \rho(-t)) = \mathrm{id}$, в силу теоремы 1.1 $\theta_j \otimes \rho(-t) \in \overline{\operatorname{Int} M}$. Далее так, как $p_a(\rho(-t)) = 0$, то $p_a(\theta_j \otimes \rho(-t)) = 0$, но тогда по теореме 2.3.1 [1] γ_j внешне сопряжен $\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \rho(t)$. С другой стороны, аналогичные рассуждения показывают, что γ_j внешне сопряжен $\theta_j \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$ (а значит и θ_j). Следовательно, θ_j, $j = 1, 2$, внешне сопряжены. ▨

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Пусть спектр Γ потока W_t, $t \in \mathbf{R}$ фактора M чисто точечный. Из эргодичности потока, как хорошо известно, следует, что Γ — группа. Через $\hat{\Gamma}$ обозначим компактную коммутативную группу, дуальную Γ, а через β — гомоморфизм Γ в группу $\mathbf{R}_+^*$, мультипликативную группу $\mathbf{R}$, очевидно что β — инъекция. Пусть $\tilde{\beta}$ — сопряженный гомоморфизм для β, тогда $\tilde{\beta}(\mathbf{R})$ — плотно в $\hat{\Gamma}$, кроме того, если μ — мера Хаара на $\hat{\Gamma}$ и L_γ, $\gamma \in \hat{\Gamma}$, — сдвиг в $(\hat{\Gamma}, \mu)$ на γ, то $W_t = L_{\tilde{\beta}(t)}$, $t \in \mathbf{R}$. Из результатов § 3 следует, что если $\alpha, \beta \in \operatorname{Aut} M$, $p_a(\alpha) = p_a(\beta) = 0$, то для внешней сопряженности α и β необходимо и достаточно, что $\operatorname{mod}\alpha = \operatorname{mod}\beta \in C(W) = \{L_\gamma, \gamma \in \hat{\Gamma}\}$. Приведем пример. Пусть R_λ — фактор Пауэрса типа III_λ со стандартным состоянием ρ_λ и модулярной группой $\sigma_t^{\rho_\lambda}$, $t \in \mathbf{R}$. Через Σ обозначим дискретную счетную подгруппу $\sigma_t^{\rho_\lambda}$, $t \in \mathbf{R}$, и рассмотрим фактор $M = W^*(R_\lambda, \Sigma)$. Пусть Σ_1 — подгруппа $\mathbf{R}$, порожденная Σ и $2\pi/\ln\lambda$. Несложный подсчет показывает, что Σ_1 содержит все собственные значения для $W_t(M)$, а сам поток $W_t(M)$ действует эргодически в пространстве $(\hat{\Sigma}_1, \mu)$, где $\hat{\Sigma}_1$ — компактная коммутативная группа, двойственная к Σ_1, а μ — мера Хаара группы $\hat{\Sigma}_1$. Таким образом, множество классов внешне сопряженных автоморфизмов для M совпадает с $\hat{\Sigma}_1$. Поскольку $W^*(R_\lambda, \Sigma) \otimes W^*(R_\lambda, \Sigma) \sim W^*(R_\lambda, \Sigma)$, то можно для классов внешне сопряженных автоморфизмов определить умножение в соответствии со следующим умножением самих автоморфизмов: если $\alpha, \beta \in \operatorname{Aut} M$, то $\alpha \otimes \beta \in \operatorname{Aut} M \otimes M$ $(=\operatorname{Aut} M)$. Если $\operatorname{mod} \alpha = \mathrm{id}$, $p_a(\alpha) = 0$, то $\alpha \otimes \beta$ внешне сопряжен β (в силу теоремы 1.1 и теоремы 2.3.1 [1]). Следовательно, класс таких автоморфизмов α, образует единицу относительно введенного умножения. Далле, если $\alpha, \beta \in \operatorname{Aut} M$ и $\operatorname{mod} \alpha = \operatorname{mod} \beta^{-1}$, то $\operatorname{mod}(\alpha \otimes \beta) = \mathrm{id}$ и $\alpha \otimes \beta \in \overline{\operatorname{Int}} M \otimes M$ (т.е. $\alpha \otimes \beta$ принадлежит единичному классу). Итак, относительно введенного умножения множество классов внешне сопряженных автоморфизмов $M = W^*(R_\lambda, \Sigma)$ с $p_a(\alpha) = 0$ превращается в группу, изоморфную $\hat{\Sigma}_1$ и $\alpha \to \operatorname{mod} \alpha$ осуществляет этот изоморфизм. Общий случай может быть рассмотрен аналогично.

3. Пусть M — инъективный фактор типа III_0. Согласно [5] фактор M изоморфен фактору $W(A, \alpha, \mathbf{Z})$, где $A = L^\infty(\Omega, \sigma)$, а (Ω, σ) — пространство Лебега, α — свободно действующий эргодический автоморфизм (Ω, σ). Следуя [6] пространство (Ω, σ) можно представить в виде $(X \times Y, \mu \times \nu)$, где $\mu \times \nu \sim \sigma$, а в полной группе $[\alpha]$ выбрать образующие (S_g, Q_g), действующие согласно (1.3) § 1. Обратно, если заданы (S_g, Q_g), то можно построить алгебру $\hat{N} = W^*(A, S_g, \mathbf{Z})$, типа II_∞, где $A = L^\infty(X \times Y, \mu \times \nu)$, а затем поскольку $Q_g \in \mathcal{N}[S_g]$, то Q_g определяет автоморфизм $\hat{N}$, а следовательно можно построить фактор $\hat{M} = W^*(\hat{N}, Q_g, \mathbf{Z})$. Понятно, что $\hat{M} \sim M$, так как потоки весов (см. [5], [6]) для M и $\hat{M}$ совпадают.

Вес ρ на $\hat{M}$, который индуцируется мерой $\mu \times \nu$ на $X \times Y$ является лакунарным, так как в силу (1.4) § 1 $\operatorname{Sp}(\log \Delta_\rho) \cap [-\delta, \delta] = 0$, где Δ_ρ — модулярный оператор для $\hat{M}$, отвечающий весу ρ. Обратно, в силу результатов 5.2 [8] и работы [6] для всякого лакунарного веса ρ на M можно считать, что M имеет структуру $\hat{M}$, тогда $\hat{N} = M_\rho$.

Для дальнейшего полезно заметить, что если $Z(\hat{N}) \sim L^\infty(X, \mu)$, $A_Y = L^\infty(Y, \nu)$, а $N = W(A_Y, S, \mathbf{Z})$, то $\hat{N} = Z(\hat{N}) \otimes N$, [т.е. элементами $n \in \hat{N}$ служат измеримые операторные поля $x \to n(x)$, со значениями в факторе N.

ЛЕММА 3.1. *Пусть* $\alpha \in \operatorname{Aut} \hat{M}$, $\operatorname{mod} \alpha = W_p(M)$, $p \in \mathbf{R}$, *и* $\alpha(\hat{N}) = \hat{N}$, *тогда существует* $t \in \operatorname{Int} \hat{N}$ *такой, что сужение* $\beta = t^{-1}\alpha$ *на* $Z(\hat{N})$, *центр* $\hat{N}$, *тривиально*, т.е. $\beta|_{Z(\hat{N})} = \mathrm{id}$, *или* $\beta|_{\hat{N}} = \int_X \oplus V_x \, d\mu(x)$, *где* $x \to V_x$ — *измеримое поле автоморфизмов на* X *со значениями в* $\operatorname{Aut} N$, *где* $N = W^*(A_Y, S, \mathbf{Z})$, *причем если* $\operatorname{mod} \alpha = W_p$, *то* $\Phi(V_x) = p$ *для п.в.* $x \in X$.

Доказательство. Положим для простоты, что $\operatorname{mod} \alpha = \mathrm{id}$. Так как, $\alpha(\hat{N}) = \hat{N}$, то $\alpha(Z(\hat{N})) = Z(\hat{N})$. Затетим, что $\rho = \tau \circ E_{\hat{N}}$, где τ — т. норм.

след на $\hat{N}$, а $E_{\hat{N}}$ — условное ожидание $\hat{M}$ на $\hat{N}$. Поэтому $\rho(\alpha(m)) = \rho(hm)$, где $m \in \hat{M}$, а h — позитивный обратимый оператор, присоединенный к $Z(\hat{N})$. Следовательно, $(D\rho\cdot\alpha : D\rho)_s = h^{is}$.

Предположим, что $\hat{M}$ действует в пространстве H. В гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R}, H)$, вектор-функций $\xi = (\xi(t))$ на $\mathbf{R}$ со значениями в H рассмотрим алгебру $\hat{M}_{\mathrm{d}}$ типа II_∞, дуальную к $\hat{M}$, которая порождена операторами (см. [15]):

$$(\pi(x)\xi)(t) = \sigma^{\rho}_{-t}(x)\xi(t), \quad x \in \hat{M},$$

$$(\lambda_s\xi)(t) = \xi(t - s), \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Тогда $\alpha \in \operatorname{Aut}\hat{M}$ расширяется до $\alpha_{\mathrm{d}} \in \operatorname{Aut}\hat{M}_{\mathrm{d}}$:

$$\alpha_{\mathrm{d}}(\pi(x)) = \pi(\alpha(x)) \quad \text{для } x \in \hat{M},$$

$$\alpha_{\mathrm{d}}(\lambda_s) = h^{is}\lambda_s, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Пусть K — коммутативная подалгебра $\hat{M}_{\mathrm{d}}$, порожденная операторами $\pi(x)$, где $x \in Z(\hat{N})$, и λ_s, $s \in \mathbf{R}$. Алгебра K может быть реализована как $L^\infty(X\times\mathbf{R}, \mu\times m)$, причем если $\varphi(x, u) \in L^\infty(X\times\mathbf{R}, \mu\times m)$ и удовлетворяет условиям (1.5) то $\pi(\varphi) \in Z(\hat{M}_{\mathrm{d}})$. Из определения α_{d}, следует, что $\alpha_{\mathrm{d}}(K) = K$. Теперь § 1, поскольку $\alpha_{\mathrm{d}}(\pi(Z(\hat{N}))) = \pi(\alpha(Z(\hat{N}))) = \pi(Z(\hat{N}))$, то, применяя те же соображения, как и при доказательстве леммы 1.2. § 1, получим, что существует $t \in \operatorname{Int}\hat{M}$, для которого $t^{-1}\alpha_{Z(\hat{N})} = \mathrm{id}$. ▨

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Пусть группа $G = (S_g, Q_g)$ имеет периодическое действие на $(X\times Y, \mu\times\nu)$. Предположим, что $\alpha \in \operatorname{Aut}\hat{M}$, $\alpha(\hat{N}) = \hat{N}$ и $(\operatorname{mod}\alpha)(x, u) = (\alpha_1 x, u + p)$, где $\alpha_1 Q = Q\alpha_1$ и $p = Const$. (см. предл. 2.2. § 1). Тогда существует $t \in \operatorname{Int}\hat{M}$ такой, что сужение $t^{-1}\alpha$ на $Z(\hat{N}) \sim L^\infty(X, \mu)$ определяет автоморфизм α_1 на (X, μ). Кроме того, существует измеримое поле $x \to V^\alpha_x$ автоморфизмов из $\operatorname{Aut} N$, причем $\Phi(V^\alpha_x) = p - \log(\mathrm{d}\mu(\alpha_1 x)/\mathrm{d}\mu(x))$, что если $n = \{n(x)\} \in \hat{N}$, где $n(x) \in N$ для* п.в. $x \in X$, *то $\alpha(n) = \{V^\alpha_x(n(\alpha_1^{-1}x))\}$ (ср. с теор. 2.3. § 1).*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. 1) V^α_x — 1-коцикл действия α_1 на (X, μ) со значениями в $\operatorname{Aut} N$.

2) Факт, аналогичный предложению 3.2, справедлив без предположения о периодичности действия $G = (S_g, Q_g)$, он основан на результатах [22] и доказывается точно также, как и предложение 3.2.

Доказательство. Согласно теореме 2.3 § 1 существует $\hat{\beta} \in \mathcal{N}[G]$ с $\operatorname{mod}\hat{\beta} = \operatorname{mod}\alpha = (\alpha_1 x, u + p)$ вида

$$\hat{\beta}(x, y) = (\alpha_1 x, \hat{W}_x y).$$

где $x \to \hat{W}_x$ — измеримое поле автоморфизмов (Y, ν), причем $\hat{W}_x \in \mathcal{N}[S]$ для п.в. x и $\Phi(\hat{W}_x) = p - \log(\mathrm{d}\mu(\alpha_1 x)/\mathrm{d}\mu(x))$. Автоморфизм $\hat{\beta}$ расширяется до автоморфизма β фактора $\hat{M}$ такого, что $\beta(\hat{N}) = \hat{N}$ и $n = \{n(x)\} \to \beta(n) = \{W_x n(\alpha_1^{-1}(x))\}$, где $n = \{n(x)\} \in \hat{N}$, а $x \to W_x$ — измеримое поле автоморфизмов N, причем $\Phi(W_x) = p - \log(\mathrm{d}\mu(\alpha_1 x)/\mathrm{d}\mu(x))$.

Положим $\gamma = \alpha\beta^{-1}$, тогда $\mathrm{mod}\,\gamma = \mathrm{mod}\,\alpha \cdot \mathrm{mod}\,\beta^{-1} = \mathrm{id}$, и $\gamma(\hat{N}) = \alpha\cdot\beta^{-1}(\hat{N}) = \hat{N}$. Согласно лемме 3.1 существует $t \in \mathrm{Int}\,\hat{M}$ такой, что $t^{-1}\gamma|_{Z(\hat{N})} = \mathrm{id}$, или $t^{-1}\gamma|_{\hat{N}} = \int_X \oplus V_x \,\mathrm{d}\mu(x)$, где $x \to V_x$ — измеримое поле автоморфизмов N, причем $\Phi(V_x) = 1$ для п.в. $x \in X$. Но тогда $t^{-1}\alpha = t^{-1}\gamma\cdot\beta$ обладает искомыми свойствами. ▨

3. АВТОМОРФИЗМЫ ИНЪЕКТИВНЫХ ФАКТОРОВ M ТИПА III_0 С $T(M) = (t : \sigma_t \in \mathrm{Int}\,M) \neq 0$

В § 3 будет показано, что если у фактора M инвариант $T(M) \neq 0$ и φ — лакунарный вес на M (т.е. 1 является изолированной точкой $\mathrm{Sp}\,\Delta_\varphi$), то всякий α из $\mathrm{Aut}\,M$ можно привести внешним сопряжением к некоторому каноническому виду (см. (2.3 § 1). Если же $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}\,M$, $p_a(\alpha) = p_a(\beta) = 0$ и $\mathrm{mod}\,\alpha = \gamma\cdot\mathrm{mod}\,\beta\cdot\gamma^{-1}$, где $\gamma \in C(W)$ (т.е. $\gamma W_t = W_t\gamma$, $t \in \mathbf{R}$), то α и β внешне сопряжены в $\mathrm{Aut}\,M$.

1. Начнем с определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть M — фактор типа III_0 с $T(M) \neq 0$. Вес φ на M будем называть *периодическим с периодом* $T \neq 0$, если $\sigma_T^\varphi = \mathrm{id}$, но $\sigma_{T/n}^\varphi \neq \mathrm{id}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, сужение φ на M_φ (централизатор φ) есть т.норм. полуконечный след τ на M_φ, $\varphi(I) = \infty$.

ЛЕММА 1.2. *Если M — фактор типа* III_0, *у которого φ — периодический вес с периодом T, то существует унитарный оператор U в M, обладающий свойствами $\mathrm{Ad}\,U \in \mathrm{Aut}\,M_\varphi$, причем U и M_φ порождают M; более того, $\tau\circ\mathrm{Ad}\,U \leqslant \lambda\tau$, где τ — т.норм. след на M_φ, который является сужением φ. Далее, $U = \sum_{n>0} u_n$, где u_n — частичная изометрия из M такая, что $\sigma_t^\varphi(u_n) = \lambda^{-int} u_n$, у которой $q_n = u_n u_n^*$ и $p_n = u_n^* u_n \in Z_\varphi$, центру M_φ, причем $q_n q_m = p_n p_m = 0$, $m \neq n$, и $\sum_n p_n = \sum_m q_m$, $\log\lambda = 2\pi/T$.*

Так как периодический вес φ является лакунарным, то лемма 1.2 может быть доказана точно также, как и лема 5.3.4. [8] (см. также доказательство 5.3.1 [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Периодический вес φ на M с периодом T назовем *обобщенным следом с периодом* T, если в M существует унитарный оператор U_λ такой, что $\sigma_t^\varphi(U_\lambda) = \lambda^{it}U_\lambda$, $\mathrm{Ad}\, U_\lambda \in \mathrm{Aut}\, M_\varphi$, а M порожден M_φ и U_λ (ср. с определ. 4.3.1 [1] для III_λ-факторов).

Существование обобщенного следа φ с периодом T следует, например, из теоремы 2.1 § 1 (см. также [15]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Пусть M — фактор, обладающий двумя обобщенными следами φ_i, $i = 1, 2$, с периодом T. Тогда существует число $\alpha > 0$ и унитарный оператор $u \in M$ такие, что $\varphi_2(x) = \alpha\varphi_1(\mathrm{Ad}\, u(x))$ для $x \in M_+$.*

Доказательство.[1] Так как $\sigma_T^{\varphi_2} = \sigma_T^{\varphi_1} = \mathrm{id}$, то $(D\varphi_2 : D\varphi_1)_T = \alpha_0 I_M$, где $\alpha_0 \in \mathbf{T}$. Пусть $\alpha > 0$ таково, что $\alpha^{iT} = \alpha_0$. Покажем, что $\varphi_2(x) = \alpha\varphi_1(\mathrm{Ad}\, u(x))$ для $x \in M_+$. Заметим, что если $\varphi_2(x) = \beta\varphi_1(\mathrm{Ad}\, u(x))$, то

$$\alpha_0 = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_T = (D\varphi_2 : D\varphi_{1,u})_T \cdot (D\varphi_{1,u} : D\varphi_1)_T =$$

$$= \beta^{iT}(u^*\sigma_T^{\varphi_1}(u)) = \beta^{iT},$$

и $\beta = \alpha$, где $\beta > 0$, $\varphi_{1,u}(\cdot) = \varphi_1(\mathrm{Ad}\, u \cdot)$. Пусть $P = M \otimes F_2$, где F_2 — I_2-фактор. Положим $\psi(\sum_{i,j=1,2} x_{ij} \otimes e_{ij}) = \alpha\varphi_1(x_{11}) + \varphi_2(x_2)$ для $x = \sum_{i,j=1,2} x_{ij} \otimes e_{ij}$, где e_{ij} — матричные единицы для F_2, тогда (см. 1.2.2 [8]) ψ — т.норм. полуконечный вес на P. Поскольку $\sigma_t^\psi(1 \otimes e_{12}) = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_T \cdot (D\varphi_1 : D\alpha\varphi_1)_T \otimes e_{21} = \alpha_0\alpha^{-iT} \otimes e_{21} = 1 \otimes e_{21}$, а $\sigma_T^{\varphi_j} = \mathrm{id}$, $j = 1, 2$, согласно предположению, то $\sigma_T^\psi = \mathrm{id}$, но тогда ψ — периодический вес с периодом T (см. определение 1.1) и согласно лемме 1.2 существует унитарный оператор U со свойствами, перечисленными в формулировке леммы. Так как $\mathrm{Ad}\, U \in \mathrm{Aut}\, P_\psi$, а U и P_ψ порождают P, то $\mathrm{Ad}\, U$ эргодически действует на Z_ψ, центре P_ψ. Положим $f_i = I \times e_{ii}$, $i = 1, 2$, тогда $f_i \in P_\psi$. Через $Z(f_i)$ обозначим Z_ψ — носитель f_i. Так как $\mathrm{Ad}\, U$ эргодически действует на Z_ψ, то $UZ(f_1)U^{-1}(I - Z(f_1)) \neq 0$. Следовательно, существует подпроектор $p \leqslant f_1$ из $M_{\varphi_1} \otimes e_{11}$ и частичная изометрия $u_n \in P$ (см. формулировку леммы 1.2) такие, что $u_n^* p u_n \leqslant I - Z(f_1)$. Так как вес φ_i является обобщенным следом на M, то в M существует унитарный оператор $U_{i,\lambda}$ со свойствами, перечисленными в определении 1.3. Но тогда если $v_i = U_{i,\lambda} \otimes e_{ii}$, то для проектора $q = v_1^{*n} p v_1^n \leqslant f_1$ (из $M_{\varphi_1} \otimes e_{11}$) выполнено соотношение $u_n^* v_1^n q v_1^{*n} u_n \leqslant I - Z(f_1)$, причем $u_n^* v_1^n \in P_\psi$. Отсюда следует, что $Z(f_1) = I$. Аналогично доказывается, что $Z(f_2) = I$. Следовательно, f_1 и f_2 эквивалентны относительно P_ψ, поэтому в P_ψ существует частичная изометрия v, такая, что $v^*v = f_1$, $vv^* = f_2$. Так как $(1 \otimes e_{11})v = v(1 \otimes e_{22})$, то существует $u \in M$ такое, что $v = u \otimes e_{12}$ и

[1] Доказательство является обобщением доказательства теоремы 4.3.2 [8].

$u^*u = uu^* = I$. Можно показать, что оператор u является искомым (см. 4.3.2 [8]). ▨

2. Перейдем к изучению внешне сопряженных автоморфизмов.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть M — инъективный фактор типа* III_0 *с* $T(M) \neq 0$. *Если* $\alpha, \beta \in \operatorname{Aut} M$, $p_a(\alpha) = p_a(\beta) = 0$, *то α и β внешне сопряжены тогда и только тогда, когда* $\operatorname{mod}\alpha$ *и* $\operatorname{mod}\beta$ *сопряжены в* $C(W(M))$, *т.е. существует* $\gamma \in C(W)$ *такой, что*

$$\operatorname{mod}\alpha = \gamma \cdot \operatorname{mod}\beta \cdot \gamma^{-1}, \tag{2.1}$$

где $C(W)$ *— централизатор потока* $W(M)$ *(см. Введение).*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Случай $\operatorname{mod}\alpha = \operatorname{mod}\beta = W_t(M)$ уже рассмотрен в § 2, поэтому достаточно рассмотреть варианты, когда $\operatorname{mod}\alpha$, $\operatorname{mod}\beta \notin W(M)$. Пусть ω — обобщенный след на M с периодом $T \in T(M)$ (см. определение 1.3). Согласно предложению 2.2 § 1 пространство (X_0, μ_0) в котором действует поток $W(M)$ имеет вид $X_0 = \{(x, u) \mid x \in X, 0 \leqslant u < \varphi(x)\}$, где $\varphi(x) = 2\pi/T$, а $\mu_0 = \mu \times m$, тогда

$$(\operatorname{mod}\alpha)(x, u) = (\alpha_1 x, u + p_\alpha), \quad (\operatorname{mod}\beta)(x, u) = (\beta_1 x, u + p_\beta),$$

где $\alpha_1, \beta_1 \in \operatorname{Aut}(X, \mu)$, а p_α, p_β — константы, не превосходящие φ. Теперь условие (2.1) означает, что существует $\gamma_1 \in \operatorname{Aut}(X, \mu)$ такой, что $\alpha_1 = \gamma_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1^{-1}$, а $p_\alpha = p_\beta = p$, причем $\gamma_1 Q = Q\gamma_1$.

Отметим также, что в силу теоремы 3.1 § 1, (теоремы 2.3 в рассматриваемом случае) для $\gamma_1 \in C(W)$ существует $\gamma \in \operatorname{Aut} M$, причем $\operatorname{mod}\gamma = \gamma_1$, поэтому доказательство теоремы 2.1 сводится к рассмотрению автоморфизмов α и β, у которых $\operatorname{mod}\alpha = \operatorname{mod}\beta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть M, α, β — такие же, как и в теореме 2.1, а* $\operatorname{mod}\alpha = \operatorname{mod}\beta$ *апериодичен по модулю* $(W_t(M), t \in \mathbf{R})$, т.е. $\operatorname{mod}\alpha^n \notin (W_t, t \in \mathbf{R})$ *для* $\forall\, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0$. *Тогда α и β внешне сопряжены как автоморфизмы M.*

Доказательство. Можно предполагать, что M имеет вид $\hat{M}$, как в п.3 § 2, где (S_g, Q_g) заданы по формулам (1.3) § 1, причем $\varphi(x) = \varphi = \mathrm{Const}$. (см. (1.4) § 1). Тогда лакунарный вес ρ, который индуцируется мерой $\mu \times \nu$ на $X \times Y$, является обобщенным следом на $\hat{M}$ в смысле определения 1.3. Поэтому ввиду предложения 1.4 умножая, если необходимо, α и β на внутренние автоморфизмы, можно считать, что $\alpha(\hat{N}) = \beta(\hat{N}) = \hat{N}$, где $\hat{N} = \hat{M}_\rho$ (см. п. 3 § 2).

Применим теперь к α и β предложение 3.2 § 2, согласно которому можно считать, что α индуцирует на (X, μ) автоморфизм α_1, причем $Q\alpha_1 = \alpha_1 Q$ и определяет 1-коцикл $x \to V_x^\alpha$ действия α_1 на (X, μ) со значениям в $\operatorname{Aut} N$, такой, что $\Phi(V_x^\alpha) = p_\alpha - \log(\mathrm{d}\mu(\alpha_1 x)/\mathrm{d}\mu(x))$.

Аналогично, β индуцирует на (X, μ) автоморфизм β_1, $\beta_1 Q = Q\beta_1$ и определяет 1-коцикл $x \to V_x^\beta$, причем $\Phi(V_x^\beta) = p_\beta - \log(\mathrm{d}\mu(\beta_1 x)/\mathrm{d}\mu(x))$.

Так как $\operatorname{mod}\alpha = \operatorname{mod}\beta$, то (см. замечание 2.2)

$$\alpha_1 = \beta_1,$$

$$\Phi(V_x^\alpha) = \Phi(V_x^\beta), \quad \text{для п.в. } x.$$

Далее, обратимся к формуле (1.3) § 1. Очевидно, U_x, $x \in X$, есть 1-коцикл действия Q на (X, μ) со значениями в $\mathcal{N}[S]$. Понятно, что U_x, $x \in X$, определяет 1-коцикл U_x^Q, $x \in X$, действия Q со значениями в $\operatorname{Aut} N$, причем $\Phi(U_x^Q) = \varphi - \log(\mathrm{d}\mu(Qx)/\mathrm{d}\mu(x))$, где $\varphi(x) = \varphi = \mathrm{Const}$. для п.в. $x \in X$.

Рассмотрим действия α_1 и Q на (X, μ). Поскольку $\alpha_1 Q = Q\alpha_1$, то тем самым мы задаем эргодическое действие группы $\mathbf{Z}^2$ на (X, μ). В силу [3] это действие является аппроксимативно конечным. Таким образом, по действию группы $\mathbf{Z}^2$ на (X, μ) можно определить аппроксимативно конечный группоид $\mathcal{G} = X \times \mathbf{Z}^2$ [14]. Но тогда коциклы (U_x^Q, V_x^α) и $(U_x^Q$ и $V_x^\beta)$ определяют борелевские гомоморфизмы ρ_α и ρ_β соответственно группоида $\mathcal{G}$ в $\operatorname{Aut} N$.

ЛЕММА 2.4. (А. Конн, В. Кригер, и др.). *Пусть $\mathcal{G}$ — аппроксимативно конечный измеримый группоид, G — польская группа, ρ_1 и ρ_2 — борелевские гомоморфизмы $\mathcal{G}$ в G такие, что*

$$\rho_1 = \rho_2 (\operatorname{mod} \overline{H})$$

где H — нормальная борелевская подгруппа G, а $\overline{H}$ ее замыкание в G. Тогда существует борелевские измеримые отображения $h : \mathcal{G} \to H$ и $P : X = \mathcal{G}^0 \to \overline{H}$ такие, что

$$\rho_2(\gamma) = h(\gamma) P(r(\gamma)) \rho_1(\gamma) P(s(\gamma))^{-1} \quad \gamma \in \mathcal{G},$$

где r и s — левое и правое отображение $\mathcal{G}$ на X соответственно.

(Доказательство приведено, например, в [23].)

В нашем случае $G = \operatorname{Aut} N$, $H = \operatorname{Int} N$ и $\overline{H} = \overline{\operatorname{Int}} N$. Так как $\Phi(V_x^\alpha) = \Phi(V_x^\beta)$, $\Phi(U_x^Q) = \Phi(U_x^Q)$ для п.в. x, а N — аппроксимативно конечный II_∞-фактор, то из [1, следствие 6] вытекает, что $\rho_\alpha = \rho_\beta (\operatorname{mod} \overline{\operatorname{Int}} N)$. В силу леммы 2.4 существует измеримое поле $x \to P_x$, где $P_x \in \overline{\operatorname{Int}} N$, такое, что

(2.2) $$U_x^Q = P_{Qx} U_x^Q s_x^1 P_x^{-1} \quad \text{для п.в. } x \in X,$$

(2.3) $$V_x^\alpha = P_{\alpha x} V_x^\beta s_x^2 P_x^{-1} \quad \text{для п.в. } x \in X,$$

где $x \to s_x^i$, $i = 1, 2$, — измеримое поле автоморфизмов из $\mathrm{Int}\, N$. Теперь из (2.2) следует, что $P = (P_x)$ определяет автоморфизм $\hat{M}$, а (2.3) тогда означает внешнюю сопряженность α и β. ▨

3. Перейдем к рассмотрению $\alpha \in \mathrm{Aut}\, M$, у которых $\mathrm{mod}\, \alpha^n = W_t(M)$ для некоторых $t \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$, $p_a(\alpha) = 0$. Наименьшее такое n назовем периодом $\mathrm{mod}\, \alpha$ и обозначим через $p(\mathrm{mod}\, \alpha) = q$. Так как $\mathrm{mod}\, \alpha(x, u) = (\alpha_1 x, u + p_\alpha)$ (см. предл. 2.2 § 1), то $\mathrm{mod}\, \alpha^q = W_t$ означает, что либо $\alpha_1^q = \mathrm{id}$ и $p_\alpha q = t$, либо $\alpha_1^q = Q^m$, $q \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{Z}$ и $qp_\alpha - \varphi m = t$.

Нашей целью будет доказательство следующего предложения:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть M, α и β — такие же, как в теореме 2.1, $\mathrm{mod}\, \alpha = \mathrm{mod}\, \beta$ и $p(\mathrm{mod}\, \alpha) = p(\mathrm{mod}\, \beta) = q \neq 0$. Тогда α и β внешне сопряжены.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Условие $\mathrm{mod}\, \alpha_1^q = \mathrm{mod}\, \beta_1^q = W_t$, $t \in \mathbf{R}$, можно заменить условием $\mathrm{mod}\, \alpha^q = \mathrm{mod}\, \beta^q = \mathrm{id}$. Действительно, пусть $\mathrm{mod}\, \alpha^q = W_t$, а N — гиперфинитный II_∞ фактор, τ — т.норм. след на N, $\rho(t)$ — однопараметрическая группа автоморфизмов N такая, что $\tau \cdot \rho(t) = e^t \tau$. Рассмотрим автоморфизм $\alpha \otimes \rho(-t/q)$ фактора $M \otimes N$, изоморфного M. Тогда $\mathrm{mod}(\alpha \otimes \rho(-t/q))^q = \mathrm{mod}\, \alpha^q \cdot W_{-t} = \mathrm{id}$. Теперь если $\gamma = \alpha \otimes \rho(-t/q) \otimes \rho(t/q) \in \mathrm{Aut}\, M \otimes N \otimes N$, то α и γ внеше сопряжены, что следует из теоремы 1 и следствия 6 [1], поскольку $\mathrm{id} \otimes \rho(-t/q) \otimes \rho(t/q) \in \overline{\mathrm{Int}}\, M$ ввиду теоремы 1.1 § 2. Поэтому вопрос о внешней сопряженности α и $\beta \in \mathrm{Aut}\, M$ сводится к вопросу о внешней сопряженности $\alpha \otimes \rho(-t/q)$ и $\beta \otimes \rho(-t/q)$, причем $\mathrm{mod}(\alpha \otimes \rho(-t/q))^q = \mathrm{id}$. ▨

Доказательство предложения 3.1. Итак, пусть $\mathrm{mod}\, \alpha^q = \mathrm{mod}\, \beta^q = \mathrm{id}$. Без ограничения в общности можно предполагать, что M имеет вид $\hat{M}$ (см. п.3 § 2) и $\alpha(\hat{N}) = \beta(\hat{N}) = \hat{N}$, где $\hat{N} = M_\rho$ (см. начало доказательства предл. 2.3). Кроме того, поскольку $\alpha_1 Q = Q \alpha_1$ на (X, μ), то $\alpha Q_g = Q_g \alpha s$, где $s \in \mathrm{Int}\, N$. Но тогда α^q и β^q также обладают подобными свойствами. Более того, для некоторого $n \in \mathbf{Z}$ автоморфизмы $\theta_\alpha = \alpha^q Q_g^n$ и $\theta_\beta = \beta^q Q_g^n$ оставляют неподвижными операторы из $Z(\hat{N})$, сохраняют т.норм. след на $\hat{N}$, а $p_a(\theta_\alpha) = p_a(\theta_\beta) = 0$. Таким образом,

$$
(3.1)\qquad
\begin{gathered}
\theta_\alpha(\hat{N}) = \hat{N}, \quad \theta_\alpha|_{Z(\hat{N})} = \mathrm{id}, \\
\alpha\theta_\alpha = \theta_\alpha \alpha s_1, \quad \theta_\alpha Q_g = Q_g \theta_\alpha s_2, \quad s_i \in \mathrm{Int}\, \hat{N},\ i = 1, 2,
\end{gathered}
$$

и аналогичные соотношения верны для θ_β.

ЛЕММА 3.3. *Существует $\sigma \in \overline{\mathrm{Int}}\, \hat{M}$ такой, что $\sigma(\hat{N}) = \hat{N}$, $\sigma|_{Z(\hat{N})} = \mathrm{id}$ и*

$$
(3.2)\qquad \theta_\alpha = \sigma \cdot \theta_\beta \cdot \sigma^{-1} s, \quad s \in \mathrm{Int}\, \hat{N}.
$$

Доказательство. Так как $\operatorname{mod}\theta_\alpha = \operatorname{mod}\theta_\beta = \mathrm{id}$, $p_a(\theta_\alpha) = p_a(\theta_\beta) = 0$ по предположению, то по теореме 1.1 § 2 существует $\sigma_1 \in \operatorname{Int}\hat{M}$, для которого

(3.3) $$\theta_\alpha = \sigma_1 \cdot \theta_\beta \cdot \sigma_1^{-1} s_3, \quad s_3 \in \operatorname{Int}\hat{M}.$$

В силу предложения 1.4 и леммы 3.1 § 2 существует $t \in \operatorname{Int}\hat{M}$ такой, что $\sigma = t \cdot \sigma_1$, обладает свойствами

$$\sigma(\hat{N}) = \hat{N}, \quad \sigma|_{Z(\hat{N})} = \mathrm{id},$$

с учетом которых (3.3) перепишется в виде

$$\theta_\alpha = \sigma \cdot \theta_\beta \cdot \sigma^{-1} \cdot s_4, \quad \text{где } s_4 \in \operatorname{Int}\hat{M}.$$

Теперь поскольку θ_α, θ_β и σ отображают $\hat{N}$ на себя и оставляют элементы $Z(\hat{N})$ неподвижными, то s_4 также обладает подобными свойствами, а поэтому $s_4 \in \operatorname{Int}\hat{N}$, что доказывает (3.2). ▨

Итак, в силу леммы 3.3 можно считать, что

(3.4) $$\theta_\beta = \theta_\alpha s, \quad s \in \operatorname{Int}\hat{N}.$$

Следовательно, задача о внешней сопряженности α и β сводится к вопросу о существовании $P \in \operatorname{Int}\hat{N}$ такого, что

(3.5) $$Q_g \cdot P = P \cdot Q_g \cdot t_1, \quad \alpha \cdot P = P \cdot \beta \cdot t_2, \quad \theta_\alpha \cdot P = P \cdot \theta_\alpha \cdot t_3,$$

$$t_i \in \operatorname{Int}\hat{N}, \ i = 1, 2, 3.$$

Сделаем еще одно замечание о θ_α. Напомним, что $\hat{N} = N \otimes Z(\hat{N})$, где $N = W^*(A_Y, S, \mathbf{Z})$ — II_∞-фактор с т.норм. следом τ (см. начало п. 3 § 2).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Без ограничения общности можно считать, что сужение θ_α на $\hat{N}$ имеет вид

(3.6) $$\theta_\alpha = \theta \times \mathrm{id},$$

где $\theta \in \overline{\operatorname{Int}} N$, $p_a(\theta) = 0$, $\tau \cdot \theta = \tau$.

Действительно, отождествим $\hat{M}$ с изоморфным ему фактором $F = \hat{M} \otimes N$ с т.норм. состоянием $\varphi = \rho \times \tau$, где ρ — лакунарный вес на $\hat{M}$ (см. начало п.3 § 2) и τ — т.норм. след на N. Очевидно, $F_\varphi = \hat{N} \otimes N$. Пусть $\theta \in \operatorname{Aut} N$, $\tau \circ \theta = \tau$, $p_a(\theta) = 0$, тогда $\hat{\theta} = \mathrm{id} \otimes \theta \in \operatorname{Aut} F$, $\varphi \circ \hat{\theta} = \varphi$, $\hat{\theta}(F_\varphi) = F_\varphi$, $\hat{\theta}|_{Z(\hat{N})} = \mathrm{id}$. Те же соображения, что и при доказательстве леммы 3.3, показывают, что существует $\gamma \in \operatorname{Aut} F$, $\gamma(F_\varphi) = F_\varphi$, $\gamma|_{Z(\hat{N})} = \mathrm{id}$ такой, что

$$\theta = \gamma \cdot \theta_\alpha \cdot \gamma^{-1} \cdot s, \quad s \in \operatorname{Int} F_\varphi,$$

т.е. можно предполагать, что выполнено (3.6).

Перейдем к доказательству существования $P \in \overline{\operatorname{Int}} N$, удовлетворяющего (3.5), т.е. к завершению доказательства предложения 3.1. Воспользуемся методом, предложенным в § 2.5 [23].

В силу замечания 3.4 можно считать, что имеет место (3.6). Через $\operatorname{Aut}^\theta N$ обозначим множество пар (δ, u), где $\delta \in \operatorname{Aut} N$, $u \in U(N)$, а $U(N)$ — группа всех унитарных операторов в N, таких, что

$$\delta \cdot \theta \cdot \delta^{-1} = \operatorname{Ad} u \cdot \theta.$$

Определим на $\operatorname{Aut}^\theta N$ мультипликацию:

$$(\delta_1, u_1) \cdot (\delta_2, u_2) = (\delta_1 \cdot \delta_2, \theta(u_1) u_2).$$

Относительно такой мультипликации $\operatorname{Aut}^\theta N$ превращается в группу. Оказывается, $\operatorname{Aut}^\theta N$ — замкнутая подгруппа польской группы $\operatorname{Aut} N \cdot U(N)^{\mathbf{Z}}$, где $\operatorname{Aut} N \cdot U(N)^{\mathbf{Z}}$ есть полупрямое произведение $\operatorname{Aut} N$ и $U(N)^{\mathbf{Z}}$, а $U(N)^{\mathbf{Z}}$ — группа всех функций на $\mathbf{Z}$ со значениями в $U(N)$, снабженная топологией прямого произведения. По отношению к такой топологии $\operatorname{Aut}^\theta N$ — польская группа и естественная проекция $(\delta, u) \to \delta$ непрерывна. Группа $\operatorname{Aut}^\theta N$ содержит в качестве нормальной подгруппы группу $\operatorname{Int}^\theta N$: $(\operatorname{Ad} u, u\theta(u^*))$, где $u \in U(N)$.

ЛЕММА 3.5. *Пусть* $\overline{\operatorname{Int}^\theta N}$ *— замыкание* $\operatorname{Int}^\theta N$ *в* $\operatorname{Aut}^\theta N$. *Элемент* $(\delta, u) \in \overline{\operatorname{Int}^\theta N}$ *тогда и только тогда, когда* τ *сохраняет след* τ *на* N.

По поводу доказательства (см. лемму 2.5.6 [23]).

Теперь, как и при доказательстве предложения 2.3, рассмотрим аппроксимативно конечный группоид $\mathcal{G}$, порожденный действием автоморфизмов Q и α_1 на (X, μ). Тогда 1-коциклы $\{U_x^Q, V_x^\alpha\}$ и $\{U_x^Q, V_x^\beta\}$ задают борелевские гомоморфизмы ρ_α и ρ_β соответственно группоида $\mathcal{G}$ в $\operatorname{Aut} N$. В силу (3.1) эти гомоморфизмы принадлежат группе $\operatorname{Aut}^\theta N$, рассмотренной выше. Более того, поскольку $\Phi(V_x^\alpha) = \Phi(V_x^\beta)$ для п.в. x, то ввиду леммы 3.5

$$\rho_\alpha = \rho_\beta \,(\operatorname{mod} \overline{\operatorname{Int}^\theta N}).$$

Но тогда в силу леммы 2.4 существуют борелевское поле автоморфизмов $x \to P_x$ из X в $\overline{\operatorname{Int}^\theta N}$ и борелевские поля $x \to s_x^i$, $i = 1, 2$ из X в $\operatorname{Int} N$ такие, что для п.в. $x \in X$

$$P_x U_x^{\varrho} = U_x^{\varrho} P_x s_x^1, \quad P_x V_x^{\alpha} = V_x^{\beta} P_x s_x^2,$$

причем поскольку $P_x \in \overline{\mathrm{Int}}^{\theta} N$, то $P_x \theta_\alpha P_x^{-1} \theta_\alpha^{-1} \in \mathrm{Int}\, N$ для п.в. x. Таким образом, для $P = (P_x)$ выполнено (3.5), а значит α и β внешне сопряжены. ▨

ЛИТЕРАТУРА

1. CONNES, A., Outer conjugacy classes of automorphisms of factors, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **8**(1975), 383—420.
2. CONNES, A., On the classifications of von Neumann algebras and their automorphisms, *Symposia Mathematica*, **XX**(1976), 435—478.
3. CONNES, A.; KRIEGER, W., Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups and approximate finiteness, *J. Functional Analysis*, **24**(1977), 336—352.
4. ARAKI, H.; WOODS, E. J., A classifications of factors, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **3**(1968), 51—130.
5. CONNES, A., On hyperfinite factors of type III_0 and Krieger's factors, *J. Functional Analysis*, **18**(1975), 318—327.
6. KRIEGER, W. A., On ergodic flows and isomorphism of factors, *Math. Ann.*, **223**(1975), 19—70.
7. CONNES, A.; TAKESAKI, M., The flow of weights on factors of type III, *Tôhoku Math. J.*, **29**(1977), 473—575.
8. CONNES, A., Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **2**(1973), 133—252.
9. HAMACHI, T.; OKA, Y.; OSIKAWA, M., Flows associated with ergodic non-singular transformations groups, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **11**(1975), 31—50.
10. ГОЛОДЕЦ, В. Я., О структуре алгебр фон Неймана, двойственных к алгебрам, построенным по динамическим системам, *Функциональный анализ и его приложения*, **9**: 3(1975), 87—88.
11. РОХЛИН, В. А., Избранные вопросы метрической теории динамических систем, *Успехи мат. наук*, **4**: 2 (1949), 57—128.
12. DYE, H. A., On groups of measure preserving transformations. I, *Amer. J. Math.*, **81**(1959), 119—153.
13. CONNES, A., A classification of injective factors, *Ann. of Math.*, **104**(1976), 73—115.
14. FELDMAN, J.; HAHN, P.; MOORE, C. C., Orbit structure and countable sections for actions of continuous group, *Adv. in Math.*, **28**(1978), 186—230.
15. TAKESAKI, M., Duality for crossed product and structure of von Neumann algebras of type III, *Acta Math.*, **131**(1973), 249—310.
16. РОХЛИН, В. А., Об основных понятиях теории меры, *Математический сборник*, **25**: 1(1949), 107—150.
17. CONNES, A., Almost periodic states and factors of type III, *J. Functional Analysis*, **16**(1974), 415—445.
18. HAAGERUP, U., The standard form of von Neumann algebras, *Math. Scand.*, **37**(1976), 271—283.

19. Голодец, В. Я., Об автоморфизмах инъективных факторов типа III_0, Препринт 4-80, ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1980, 1–32.
20. Connes, A.; Takesaki, M., Flot des poids sur les facteurs de type III, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A*, **378**(1974), 937–940.
21. Hamachi, H., The normalizer group of an ergodic automorphism of type III and the commutant of an ergodic flow, *J. Functional Analysis*, **40**(1981), 387–403.
22. Bezuglyi, S. I.; Golodets, V. Ya., Groups of measure space transformations and invariants of outer conjugation for automorphisms from normalizers of type III full groups, *J. Functional Analysis*, **60**(1985), 341–369.
23. Jones, V. F. R.; Takesaki, M., Actions of compact abelian groups on semifinite injective factor, preprint.

V. Ya. GOLODETS
Institute for Low Temperature
Physics and Engineering,
Ukr. SSR Academy of Sciences,
47, Lenin Avenue, Kharkov, 310164,
U.S.S.R.

Received August 12, 1982; revised July 9, 1984.

Примечание при корректуре. Как заметил рецензент изящное доказательство предложения 3.2, стр. 11, дано в теореме 4.5.1 [2].