J. OPERATOR THEORY
16(1986), 325—333

UN EXEMPLE D'OPÉRATEUR POUR LEQUEL LES TOPOLOGIES FAIBLE ET ULTRAFAIBLE NE COÏNCIDENT PAS SUR L'ALGÈBRE DUALE

GILLES CASSIER

Nous considérons l'espace $L(H)$ des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert H muni de la topologie ultrafaible induite par dualité avec l'espace $L_1(H)$ des opérateurs à trace. L'algèbre duale d'un opérateur T désigne l'algèbre engendrée par T pour la topologie ultrafaible, en suivant [1] nous la noterons $\mathscr{A}_T$. Rappelons que la topologie faible d'opérateur sur $\mathscr{A}_T$ est définie par les semi-normes du type $p_A(S) = \mathrm{Tr}(AS)$ où $S \in \mathscr{A}_T$ et A est un opérateur de rang fini. Nous dirons que deux éléments A et B de $L_1(H)$ sont équivalents pour T, $A \underset{T}{\sim} B$, si et seulement si $\mathrm{Tr}(AT^n) = \mathrm{Tr}(BT^n)$ pour tout entier positif n. Dans [1] il est montré pour une très vaste classe d'opérateurs la coïncidence de la topologie ultrafaible et de la topologie faible d'opérateur sur $\mathscr{A}_T$. G. Robel [5] a même montré que tous les "B.C.P. opérateurs" vérifiaient la propriété suivante:

(1) Tout opérateur de $L_1(H)$ est équivalent pour T à un opérateur de rang 1.

Cette dernière propriété est un point essentiel dans la technique de S. Brown [2] et S. Brown, B. Chevreau et C. Pearcy [3] pour prouver l'existence de sous-espaces invariants non triviaux pour les opérateurs sous-normaux, respectivement à spectre riche.

Une question naturelle s'est posée alors: existe-t-il des opérateurs sur H ne vérifiant pas la propriété (1) ou même pour lesquels les topologies ultrafaible et faible d'opérateur ne coïncident pas sur l'algèbre duale?

Nous allons construire un exemple de tel opérateur. (Un autre exemple de conception totalement différente est donné dans [6].) Pour notre opérateur l'algèbre $\mathscr{A}_T$, le commutant $\{T\}'$ et le bicommutant $\{T\}''$ sont identiques. Le calcul fonctionnel n'est pas isométrique, en effet T est une contraction C_0 dont la fonction minimale est un produit de Blaschke.

Nous concevrons ensuite un opérateur dont le spectre contient le tore, pour lequel le calcul fonctionnel est isométrique et un opérateur à trace A qui n'est équivalent pour le bicommutant à aucun opérateur de rang fini (c'est-à-dire si B est tel que $\operatorname{Tr}(BS) = \operatorname{Tr}(AS)$ pour tout S de $\{T\}''$, B est automatiquement de rang infini).

On considère pour un entier p supérieur ou égal à deux l'espace:

$$H_p = E \oplus F \oplus G_1 \oplus \ldots \oplus G_{p-1}$$

avec $\dim E = \dim F = p$ et $\dim G_i = p - i$, donc $\dim H_p = \dfrac{p(p+3)}{2}$. On prend alors $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ une base orthonormale de E, $\{\eta_1, \ldots, \eta_p\}$ une base orthonormale de F et on choisit pour i variant de 1 à $p-1$: $g_{i,i}$; $g_{i,i+1}$; $\ldots$; $g_{i,p}$ dans G_i tels que la famille $\{\eta_i + ng_{i,j}\}_{j=i,p}$ soit libre pour tout entier n non nul et tels que toute sous-famille à $p-i$ éléments de $\{g_{i,j}\}_{j=i,p}$ constitue une base de G_i.

Nous pouvons maintenant définir les familles de H_p qui vont jouer un rôle essentiel par la suite:

Pour $n \geqslant 1$ on pose:

$$e_{i,j}(n) = \eta_i + n^2\varepsilon_j + ng_{i,j} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p \text{ et } i < p$$

$$e_{p,p}(n) = \eta_p + n\varepsilon_p$$

$$e_k(n) = \varepsilon_k \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant p.$$

On note $\mathscr{B}_p(n)$ cette famille.

Nous commençons par énoncer une succession de lemmes nécessaires pour la construction d'une contraction T sur H et d'un opérateur à trace A qui n'est équivalent pour T à aucun opérateur de rang fini.

LEMME 1. *La famille $\mathscr{B}_p(n)$ est une base de H_p pour tout entier $n \geqslant 1$.*

Preuve. Soit L_n le sous-espace engendré par la famille $\mathscr{B}_p(n)$ et $x \in L_n^\perp$. Pour $k = 1, \ldots, p$ on a $0 = (x \mid e_k(n)) = (x \mid \varepsilon_k)$ donc $x \in E^\perp$ et $0 = (x \mid e_{p,p}(n)) = (x \mid \eta_p) + n(x \mid \varepsilon_p) = (x \mid \eta_p)$.

Maintenant si $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$ et $i < p$ on a $0 = (x \mid e_{i,j}(n)) = (x \mid \eta_i + ng_{i,j})$ mais $\{\eta_i + ng_{i,j}\}_{j=1,p}$ est une base de $F_i = \mathbf{C}\eta_i \oplus G_i$, par suite $x \in F_i^\perp$; comme $H_p = E \oplus F_1 \oplus \ldots \oplus F_{p-1} \oplus \mathbf{C}\eta_p$, x doit être nul ce qui prouve le lemme.

On considère maintenant la base duale que l'on notera $e^{i,j}(n)$ si $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$ et $e^k(n)$ si $1 \leqslant k \leqslant p$, c'est-à-dire pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$; $1 \leqslant i' \leqslant j' \leqslant p$, $1 \leqslant k \leqslant p$, $1 \leqslant k' \leqslant p$.

$$(e_{i,j}(n) \mid e^{i',j'}(n)) = \delta_{(i,j);(i',j')}$$

$$(e_k(n) \mid e^{k'}(n)) = \delta_{k,k'}$$

$$(e_k(n) \mid e^{i',j'}(n)) = 0$$

$$(e_{i,j}(n) \mid e^{k'}(n)) = 0.$$

On introduit aussi les vecteurs normalisés:

$$\tilde{e}_{i,j}(n) = \frac{e_{i,j}(n)}{\|e_{i,j}(n)\|}, \qquad \tilde{e}^{i,j}(n) = \frac{e^{i,j}(n)}{\|e^{i,j}(n)\|}$$

$$\tilde{e}_k(n) = \frac{e_k(n)}{\|e_k(n)\|}, \qquad \tilde{e}^k(n) = \frac{e^k(n)}{\|e^k(n)\|}.$$

Le lemme suivant décrit le comportement asymptotique de ces familles normalisées.

LEMME 2. *On a* $\lim \tilde{e}_{i,j}(n) = \varepsilon_j$ *et l'on peut trouver une suite strictement croissante d'entiers positifs* $(n_s)_{s\geqslant 0}$ *telle que:*

$$\lim_{s\to+\infty} \tilde{e}^{i,j}(n_s) = u_{i,j}\eta_i \quad \text{avec } |u_{i,j}| = 1$$

pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$.

Preuve. La première affirmation est immédiate par construction. Soit $(n_s)_{s\geqslant 0}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que la limite de la suite $(\tilde{e}^{i,j}(n_s))_{s\geqslant 0}$ existe pour tout couple (i, j), $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$. Cette limite est notée $\tilde{e}^{i,j}$.

On voit facilement que $\tilde{e}^{p,p}(n) = \eta_p$ pour tout $n \geqslant 1$, donc $\tilde{e}^{p,p} = \lim \tilde{e}^{p,p}(n) = \eta_p$. Maintenant si $i' < p$ et $1 \leqslant i' \leqslant j' \leqslant p$, $\tilde{e}^{i',j'}(n_s) \in E^{\perp}$ car $0 = (e_k(n) \mid e^{i',j'}(n)) = (\varepsilon_k \mid e^{i',j'}(n))$ pour $k = 1, \ldots, p$ et il vient $\tilde{e}^{i',j'} \in E^{\perp}$. Par ailleurs $0 = (e_{p,p}(n_s) \mid e^{i',j'}(n_s)) = (\eta_p \mid e^{i',j'}(n_s))$ d'où $(\eta_p \mid \tilde{e}^{i',j'}) = 0$. Si $i \neq i'$ on a $0 = (e_{i,j}(n) \mid \tilde{e}^{i',j'}(n)) = (\eta_i + ng_{i,j} \mid \tilde{e}^{i',j'}(n))$ donc $\tilde{e}^{i',j'}(n) \in F_i^{\perp}$ pour $i \neq i'$. Finalement on trouve $\tilde{e}^{i',j'} \in F_{i'} = \mathbf{C}\eta_{i'} \oplus G_{i'}$. Pour tout j' différent de j, $0 = (\eta_{i'} + n_s g_{i',j} \mid e^{i',j'}(n_s))$ ou encore

$$0 = \left(\frac{\eta_{i'} + n_s g_{i',j}}{\sqrt{1 + n_s^2 \|g_{i',j'}\|^2}} \,\middle|\, \frac{e^{i',j'}(n_s)}{\|e^{i',j'}(n_s)\|} \right).$$

Par passage à la limite on obtient l'orthogonalité du vecteur $\tilde{e}^{i',j'}$ avec l'espace engendré par la famille $\{g_{i',j}\}_{\substack{j=i',p\\ j\neq j'}}$ qui est précisément une base de $G_{i'}$ et finalement on doit avoir $\tilde{e}^{i',j'} = u_{i',j'}\eta_{i'}$ avec $|u_{i',j'}| = 1$.

On peut désormais définir l'opérateur $A_p = \sum_{r=1}^{p} \eta_r \otimes \varepsilon_r$ et la quantité suivante

$$\rho_p(n) = \inf\{\|B\|_1;\ B \in L(H_p),\ \mathrm{rg}(B) < p \text{ et } (Be_{i,j}(n) \mid e^{i,j}(n)) = (A_p e_{i,j}(n) \mid e^{i,j}(n)) \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p\}$$

où $\|\ \|_1$ désigne la norme nucléaire. On a $\|A_p\|_1 = p$. Un passage clé est franchi avec le lemme suivant.

LEMME 3. *Pour tout entier $p \geqslant 2$ la suite $(\rho_p(n))_{n\geqslant 1}$ est non bornée.*

Preuve. Notons tout d'abord que $\rho_p(n)$ est toujours fini car en dimension finie tout opérateur est équivalent à un operateur de rang 1. Supposons que cette suite soit bornée par une constante M, c'est-à-dire $\rho_p(n) < M$ pour tout $n \geqslant 1$. On en déduit l'existence d'un opérateur B_n sur H_p vérifiant $\|B_n\|_1 < M$ et $(B_n e_{i,j}(n) \mid e^{i,j}(n)) = (A_p e_{i,j}(n) \mid e^{i,j}(n))$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$. On peut supposer que la suite B_n converge vers un opérateur B. Par passage à la limite dans l'expression:

$$(B_{n_s}\tilde{e}_{i,j}(n_s) \mid \tilde{e}^{i,j}(n_s)) = (A_p\tilde{e}_{i,j}(n_s) \mid \tilde{e}^{i,j}(n_s))$$

on obtient avec le lemme 2:

$$(B\varepsilon_j \mid \eta_i) = (A_p\varepsilon_j \mid \eta_i) = \delta_{i,j}.$$

Il en résulte que le rang de B est supérieur ou égal à p, ce qui contredit le fait que B soit limite d'opérateurs de rang strictement plus petit que p.

Pour chaque entier $p \geqslant 2$ on fixe m_p tel que $\rho_p(m_p) \geqslant p^2$ et on indexe la base $B_p(m_p)$ de la manière suivante:

$$B_p(m_p) = \{f_1(p), \ldots, f_{n_p}(p)\}$$

avec $n_p = \dfrac{p(p+3)}{2}$ et on note $\{f^1(p), \ldots, f^{n_p}(p)\}$ la base duale.

On va construire par récurrence un opérateur T_p sur H_p $(p \geqslant 2)$ vérifiant:

1) $\|T_p\| \leqslant 1$

2) $T_p = \sum_{k=1}^{n_p} z_{n_2+\cdots+n_{p-1}+k} f_k(p) \otimes f^k(p)$ avec

$$r_p = \max\left(\{|z_{n_2+\cdots+n_{p-2}+i}|;\, i = 1, \ldots, n_{p-1}\};\, 1 - \frac{2}{p^3(p+3)}\right) < |z_{n_2+\cdots+n_{p-1}+k}| < 1$$

pour $k = 1, \ldots, n_p$; les points z_k étant deux à deux distincts.

On introduit les ensembles:

$$B_p = \{(u_1, \ldots, u_{n_p}) \in \mathbf{C}^{n_p};\, \|u_1 f_1(p) \otimes f^1(p) + \ldots + u_{n_p} f_{n_p}(p) \otimes f^{n_p}(p)\| < 1\}$$

$$\Delta_p = \{(u_1, \ldots, u_{n_p}) \in \mathbf{C}^{n_p};\; r_p < |u_k| < 1\}$$

$$X_p = \bigcup_{\substack{i \neq j \\ (i,j) \in \{1,\ldots,n_p\}^2}} \{(u_1, \ldots, u_{n_p});\, u_i = u_j\}.$$

On établit la récurrence en remarquant que $B_p \cap \Delta_p \cap X_p^c$ est un ouvert non vide dans lequel on peut choisir $z_{n_2+\cdots+n_{p-1}+1}, \ldots, z_{n_2+\cdots+n_p}$.

On prend alors pour H l'espace $\bigoplus_{p\geqslant 2} H_p$ et pour T la contraction $\bigoplus_{p\geqslant 2} T_p$.

THÉORÈME 1: *Les topologies faible et ultrafaible sont différentes sur* $\mathscr{A}_T$.

Preuve. On pose $A = \bigoplus_{p=2}^{+\infty} \alpha_p A_p$ où $(\alpha_p)_{p\geqslant 2}$ est telle que: $\sum_{p=2}^{+\infty} |\alpha_p| p < +\infty$ et $\sum_{p=2}^{+\infty} |\alpha_p| p^2 = +\infty$. A est un opérateur à trace. Supposons qu'il existe un opérateur de rang fini r équivalent à A pour l'action de T.

Soit $q \geqslant 2$;

$$\sum_{p\neq q}\left(\sum_{k=n_2+\cdots+n_{p-1}+1}^{n_2+\cdots+n_p} (1-|z_k|)\right) \leqslant \sum_{p\neq q} \frac{2n_p}{p^3(p+3)} = \sum_{p\neq q} \frac{1}{p^2} < +\infty .$$

On peut donc définir le produit de Blaschke:

$$B_q(z) = \prod_{k\notin\{n_2+\cdots+n_{q-1}+1,\ldots,n_2+\cdots+n_q\}} \left(\frac{z_k - z}{1-\bar{z}_k z}\right)\frac{|z_k|}{z_k}$$

et pour $l \geqslant 0$ la fonction $h_{q,l}$ de H^∞

$$h_{q,l}(z) = B_q(z)\left[\sum_{i=n_2+\cdots+n_{q-1}+1}^{n_2+\cdots+n_q} \frac{(z_i)^l}{B_q(z_i)} \prod_{\substack{j\neq i\\ j=n_2+\cdots+n_{q-1}+1;\ldots;n_2+\cdots+n_q}} \left(\frac{z-z_j}{z_i-z_j}\right)\right].$$

On a alors:

$$h_{q,l}(z_k) = \begin{cases} (z_k)^l & \text{si } n_2+\ldots+n_{q-1}+1 \leqslant k \leqslant n_2+\ldots+n_q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction $h_{q,l}^r(z) = h_{q,l}(rz)$ pour $0 < r < 1$ appartient à l'algèbre du disque et l'on a $h_{q,l}^r(T) = \bigoplus_{p\geqslant 2} h_{q,l}^r(T_p)$. Si l'on note P_p la projection orthogonale de H sur le sous-espace H_p et $C_p = P_p C P_p$ pour un opérateur C sur H, il vient:

$$\mathrm{Tr}(A h_{q,l}^r(T)) = \sum_{p=2}^{+\infty} \mathrm{Tr}(A_p h_{q,l}^r(T_p))$$

et

$$\mathrm{Tr}(B h_{q,l}^r(T)) = \sum_{p=2}^{+\infty} \mathrm{Tr}(B_p h_{q,l}^r(T_p)).$$

Par suite

$$\lim_{r\to 1} h^r_{q,l}(T_p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ T^l_q & \text{si } p = q. \end{cases}$$

L'inégalité de von Neumann donne $\|h^r_{q,l}(T_p)\| \leqslant \|h^r_{q,l}\|_\infty \leqslant \|h_{q,l}\|_\infty$ et pour C appartenant à $L_1(H)$ $\sum_{p=2}^{+\infty} \|C_p\|_1 < +\infty$. On obtient donc:

$$\lim_{r\to 1} \sum_{\substack{p\neq q\\ p\geqslant 2}} \mathrm{Tr}(C_p h^r_{q,l}(T_p)) = 0 \quad \text{puis} \quad \lim_{r\to 1} \mathrm{Tr}(C_q h^r_{q,l}(T)) = \mathrm{Tr}(C_q T^l_q).$$

A étant équivalent à B pour T, pour tout $q \geqslant 2$ et tout $l \geqslant 0$ il vient

$$\mathrm{Tr}(\alpha_q A_q T^l_q) = \lim_{r\to 1} \mathrm{Tr}(A h^r_{q,l}(T)) = \lim_{r\to 1} \mathrm{Tr}(B h^r_{q,l}(T)) = \mathrm{Tr}(B_q T^l_q).$$

On en tire alors facilement les égalités:

$$(A_q f_k(q) \,|\, f^k(q)) = \left(\frac{B_q}{\alpha_q} f_k(q) \,\Big|\, f^k(q) \right) \quad \text{pour } k = 1, \ldots, n_q$$

d'où $\left\| \frac{B_q}{\alpha_q} \right\|_1 \geqslant \rho_q(m_q) \geqslant q^2$ pour $q > r$. Alors

$$\sum_{q>r} \|B_q\|_1 \geqslant \sum_{q>r} |\alpha_q| q^2 = +\infty,$$

ce qui contredit l'appartenance de B à $L_1(H)$.

REMARQUE. On peut modifier la construction précédente pour que le spectre de T contienne le tore. On considère une suite $(e^{i\theta_m})_{m\geqslant 0}$ dense dans le tore, une bijection b de $\mathbf{N}^2$ sur $\mathbf{N}\setminus\{0, 1\}$ et on construit les points $z_{n_2+\cdots+n_{p-1}+1}, \ldots, z_{n_2+\cdots+n_p}$ de la manière suivante:

Si $p = b(n, m)$, $r_p < |z_k| < 1$, $\operatorname{Arg} z_k = e^{i\theta_m}$ et les points z_k sont distincts deux à deux. Ceci est possible en considérant sur $\mathbf{R}^{n_p}$ la boule $B_p = \left\{(x_1, \ldots, x_{n_p});\ \left\| \sum_{k=1}^{n_p} x_k f_k(p) \otimes f^k(p) \right\| < 1 \right\}$ et en répétant le raisonnement qui précède le théorème 1.

On peut aussi remarquer que le calcul fonctionnel associé aux fonctions de H^∞ n'est pas isométrique pour T. La question qui se pose alors est de savoir si une situation analogue peut se produire avec un calcul fonctionnel isométrique sur H^∞. En donnant une variante de la construction précédente nous allons voir que c'est le cas si l'on remplace l'algèbre $\mathscr{A}_T$ par le bicommutant de T.

On considère la suite $z_{n,k} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) e^{i \frac{2k\pi}{n^2}}$ pour $n \geqslant 1$ et $k = 1, \ldots, n^2$ que l'on écrit sour la forme $(\alpha_p)_{p \geqslant 2}$, la numérotation est faite dans l'ordre des cercles de rayons croissants. On introduit cette fois les ensembles:

$$O_p = \{u \in \mathbf{C}^{n_p - 1} ; \|\alpha_p f_1(p) \otimes f^1(p) + u_1 f_2(p) \otimes f^2(p) + \ldots +$$

$$+ u_{n_p - 1} f_{n_p}(p) \otimes f^{n_p}(p)\| < 1\}$$

$$\Omega_p = \{u \in \mathbf{C}^{n_p - 1} ; \|(\alpha_p - u_1) f_2(p) \otimes f^2(p) + \ldots + (\alpha_p - u_{n_p - 1}) f_{n_p}(p) \otimes f^{n_p}(p)\| < s_p\}$$

avec $s_p = \min \left(\dfrac{1}{2p(p+1)} ; \dfrac{1}{2} \sin \dfrac{\pi}{p^2} \right)$.

On choisit alors $\lambda_1^{(p)}, \ldots, \lambda_{n_p - 1}^{(p)}$ dans l'ouvert non vide $O_p \cap \Omega_p \cap X_p^c$ et on note T_p l'opérateur sur H_p:

$$T_p = \alpha_p f_1(p) \otimes f^1(p) + \lambda_1^{(p)} f_2(p) \otimes f^2(p) + \ldots + \lambda_{n_p - 1}^{(p)} f_{n_p}(p) \otimes f^{n_p}(p).$$

On introduit l'espace $H = \bigoplus_{p \geqslant 2} H_p$ et on définit la contraction T sur H, $T = \bigoplus_{p \geqslant 2} T_p$.

THÉORÈME 2. *T est une contraction dont le spectre contient le tore, le calcul fonctionnel est isométrique et il existe un opérateur à trace qui n'est équivalent pour le bicommutant de T à aucun opérateur de rang fini.*

Preuve. Il est clair que T est une contraction complètement non unitaire puisque chaque T_p est de norme strictement inférieure à 1 et le spectre de T contient le tore puisqu'il contient déjà la suite $(z_{n,k})_{\substack{n \geqslant 1 \\ k = 1, \ldots, n^2}}$. Le calcul fonctionnel de Sz.-Nagy—Foiaş [4] est donc défini sur H^∞ tout entier; montrons qu'il est isométrique. Soit h une fonction de H^∞ et u un point du tore où la limite non tangentielle existe. Si $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ le secteur de sommet u et d'angle 2θ coupe le cercle de rayon $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ qui contient n^2 points de la suite $(\alpha_p)_{p \geqslant 2}$ en un arc de longueur supérieure à $\dfrac{2}{n} \operatorname{tg} \theta$, cet arc contient donc au moins un point de $(\alpha_p)_{p \geqslant 2}$ dès que $n > \dfrac{\pi}{\operatorname{tg} \theta}$.

On peut trouver une sous-suite $(\alpha_{p_k})_{k\geqslant 0}$ de la suite $(\alpha_p)_{p\geqslant 2}$ intérieure à l'angle qui converge vers u. Il vient alors en posant $x_k = \dfrac{f_1(p_k)}{\|f_1(p_k)\|}$

$$\|h(T)\| \geqslant \|h(T)x_k\| = |h(\alpha_{p_k})|$$

d'où

$$\|h(T)\| \geqslant |h(u)| \quad \text{et enfin} \quad \|h(T)\| \geqslant \|h\|_\infty .$$

L'inégalité inverse étant assurée par celle de von Neumann, le calcul fonctionnel pour T est bien isométrique. On prend pour opérateur nucléaire l'opérateur A de l'exemple précédent et l'on va montrer que A n'est équivalent pour le bicommutant de T à aucun opérateur de rang fini, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'opérateur de rang fini B tel que:

$$\forall S \in \{T\}'' \quad \mathrm{Tr}(SA) = \mathrm{Tr}(SB).$$

Il suffit de remarquer que le choix de s_p donne $\sigma(T) \cap B(\alpha_p, s_p] = \sigma(T_p)$ et d'écrire pour tout entier n:

$$\mathrm{Tr}(T_p^n B_p) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_p} z^n \mathrm{Tr}[(zI - T)^{-1}B]\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_p} z^n \mathrm{Tr}[(zI - T)^{-1}A]\mathrm{d}z = \mathrm{Tr}(T_p^n(\alpha_p A_p))$$

où γ_p est le cercle centré en α_p de rayon s_p.

On en déduit alors facilement que:

$$(\alpha_p A_p f_k(p) \,|\, f^k(p)) = (B_p f_k(p) \,|\, f^k(p))$$

pour $k = 1, \ldots, n_p$ et on achève la démonstration comme dans le cas précédent.

REMARQUE. B. Chevreau nous a fait remarquer que l'on pouvait dégager en termes d'algèbres une propriété intéressante des deux cas précédents. Si T désigne l'opérateur correspondant au théorème 1 on a: $\mathscr{A}_T = \{T\}' = \{T\}''$. Le calcul fonctionnel n'est pas isométrique pour T (c'est-à-dire $T \notin \mathbf{A}$ avec les notations de [1]) mais on peut toujours trouver avec le théorème 2 S dans $\{T\}'$ appartenant à $\mathbf{A}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. BERCOVICI, H.; FOIAŞ, C.; PEARCY, C., Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory, in CBMS Regional Conference Series in Math., No. **56**, A.M.S., Providence, 1985.
2. BROWN, S., Some invariant subspaces for subnormal operators, *Integral Equations Operator Theory*, **1**(1978), 310--333.
3. BROWN, S.; CHEVREAU, B.; PEARCY, C., Contractions with rich spectrum have invariant subspaces, *J. Operator Theory*, **1**(1979), 123–136.
4. SZ.-NAGY, B.; FOIAŞ, C., *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Masson et Cie, 1967.
5. ROBEL, G., Ph.D. Thesis, University of Michigan, 1982.
6. WESTWOOD, D., Weak operator and weak* topologies on singly generated algebras, *J. Operator Theory*, **15**(1986), 267–280.

GILLES CASSIER
Equipe d'Analyse,
Unité Associée au C.N.R.S. n° 754,
Université de Paris VI,
4, place Jussieu,
75230 Paris, Cedex 05,
France.

Permanent address:

Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle,
Département de Mathématiques,
Université Claude Bernard — Lyon 1,
43, bd. du 11 novembre 1918,
69622 Villeurbanne Cedex,
France.

Received December 2, 1985.