J. OPERATOR THEORY
16(1986), 349 — 353

PROPRIÉTÉS SPECTRALES D'UN OPÉRATEUR SANS SOUS-ESPACE INVARIANT

B. BEAUZAMY

Nous allons étudier ici les propriétés de l'opérateur introduit dans [1]. Les définitions et notations sont celles de [1]; nous nous contentons de rappeler brièvement la principale propriété de l'opérateur, noté T. Il consiste en la multiplication par la variable x sur l'espace des polynômes en x, complété pour une certaine norme $\|\cdot\|$ en un espace de Banach noté $\mathscr{B}$. L'opérateur T a donc un point cyclique: le polynôme 1 et $\|1\| = 1$. Par ailleurs, il existe deux suites strictement croissantes, $(L_j)_{j\geqslant 1}$ et $(N_j)_{j\geqslant 1}$, la première de réels > 2, la seconde d'entiers, toutes deux strictement croissantes vers $+\infty$, telles que:

(P_0) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, q \in \mathscr{B}$ avec $\|q\| = 1$, il existe L et N, avec $\|Lx^N q - 1\| < \varepsilon$,

où L est l'un des L_j, N l'un des N_j.

Il en résulte évidemment que l'opérateur n'a aucun sous-espace fermé invariant non trivial.

PROPOSITION 1. *On a* $\|T\| = 2$.

Démonstration. Par construction, $\|T\| \leqslant 2$. Montrons l'égalité. Considérons q_1, premier polynôme dans l'énumération (cf. [1]). Il est de degré 0. Nous allons montrer que la meilleure représentation de $l_1 q_1 - 1$ en norme $|\cdot|^{(1)}$:

$$l_1 q_1 - 1 = r + s(l_1 q_1 - 1) \tag{1}$$

est obtenue avec $r = 0$, $s = 1$, et de même que la meilleure représentation de $x(l_1 q_1 - 1)$ est obtenue avec $r = 0$, $s = x$: la proposition en résultera, car, puisque $d^0(l_1 q_1 - 1) = N_1$, $d^0 x(l_1 q_1 - 1) = N_1 + 1$, la proposition IV.2 de [1] montre que :

$$\|l_1 q_1 - 1\| = |l_1 q_1 - 1|^{(1)} = \varepsilon_1$$

$$\|x(l_1 q_1 - 1)\| = |x(l_1 q_1 - 1)|^{(1)} = 2\varepsilon_1 .$$

Reprenons (1) et décomposons $s = s_0 + s'$, où s_0 est une constante. Evidemment:

$$r = (1 - s_0)(l_1 q_1 - 1) - s'(l_1 q_1 - 1),$$

et

$$|r| = |s'|(L_1 + 1) + |1 - s_0|(L_1 + 1),$$

car $d^0 q_1 = 0$.

L'estimation donnée par (1) est donc

$$I_1 = |s'|(L_1 + 1) + |1 - s_0|(L_1 + 1) + |s_0|\varepsilon_1 + |s'|_{\mathrm{op}\,1}\varepsilon_1,$$

tandis que la décomposition

$$l_1 q_1 - 1 = (1 - s_0)(l_1 q_1 - 1) + s_0(l_1 q_1 - 1) \tag{2}$$

donne

$$I_2 = |1 - s_0|(L_1 + 1) + |s_0|\varepsilon_1,$$

ce qui est moins. Donc (2) est meilleure. Or I_2 est minimum pour $s_0 = 1$. Le calcul est le même pour $x(l_1 q_1 - 1)$.

Nous allons voir maintenant que l'espace $\mathscr{B}$ contient un sous-espace isométrique à ℓ^1. Mieux même, beaucoup des puissances x^n se comportent comme la base canonique de ℓ^1!

Si $P = \sum_j a_j x^j$, nous appellerons spectre de P l'ensemble $\{j, a_j \neq 0\}$.

PROPOSITION 2. *Si P est à spectre dans $\bigcup_{j \geqslant 1} \left[\frac{1}{4} N_j, N_j\right[$, on a $\|P\| = |P|$.*

Démonstration. Calculons $|P|^{(n)}$. Pour cela, soit

$$P = r + \sum_{k=1}^{n} s_k(l_k q_k - 1) \tag{3}$$

l'expansion de P en norme $|\cdot|^{(n)}$. Rappelons que, dans s_k, $|\alpha| \leqslant \gamma_k = \mathrm{Log}_2(2^k C_k \theta_k)$ (proposition III.1 de [1]).

Décomposons chaque s_k en:

$$s_k = s_{0,k} + l_n s_{1,k} + l_n^2 s_{2,k} + \dots; \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{4}$$

Les termes où apparaît l_n sont isolés dans r. En effet, P n'a pas de coefficients entre N_n et $\frac{1}{4} N_{n+1}$, et tous les termes où apparaît l_n sont de degré au plus $\gamma_n N_n + n < \frac{1}{4} N_{n+1}$. Donc, si on remplace (3) par:

$$P = r' + \sum_{k=1}^{n-1} s_{0,k}(l_k q_k - 1), \tag{5}$$

l'estimation diminuera d'au moins:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\left|\sum_{j\geqslant 1}\sum_{k=1}^{n} l_n^j s_{j,k}(l_k q_k - 1) + l_n s_{0,n} q_n\right| + \\ &+ \sum_{j\geqslant 1}\sum_{k=1}^{n} C_n^{2j} |s_{j,k}|_{\mathrm{op}\,n}\varepsilon_k + |s_{0,n}|_{\mathrm{op}\,n}\varepsilon_n \end{aligned}$$

et augmentera d'au plus $|s_{0,n}|$.

Mais les termes en l_n seul sont isolés dans (6), et par ailleurs $C_n^2|s_{1,n}|_{\mathrm{op}\,n}\varepsilon_n \geqslant$ $\geqslant C_n|s_{1,n}|$; il suffit donc de montrer que:

$$C_n|s_{0,n}q_n + \sum_{1}^{n-1} s_{1,k}(l_k q_k - 1)| + C_n^2 \sum_{k=1}^{n-1} |s_{1,k}|_{\mathrm{op}\,n}\varepsilon_k +$$
$$+ |s_{0,n}|_{\mathrm{op}\,n}\varepsilon_k \geqslant |s_{0,n}|,$$

ce qui est assuré par la proposition IV.2.a) de [1].

On a donc montré ainsi que (5) était meilleure, donc:

$$|P|^{(n-1)} = |P|^{(n)};$$

l'assertion en résulte.

Une autre conséquence de la démonstration ci-dessus est:

PROPOSITION 3. *Soit $P = P_0 + P_1$, avec $d^0P_0 \leqslant N_n$ et P_1 à spectre dans $\left[\frac{1}{4} N_{n+1}, N_{n+1}\right[$. Alors:*

$$\|P\| = |P_0|^{(n)} + |P_1|.$$

Nous allons maintenant étudier le spectre de T.

THÉORÈME 4. *Le spectre de T est $\overline{\mathbf{D}}$, disque unité fermé.*

La démonstration se décomposera en plusieurs lemmes.

LEMME 5. *Le rayon spectral $r(T)$ est $\leqslant 1$.*

Démonstration du lemme 5. Soit $q \in \mathscr{B}$, $\|q\| = 1$ et $q_{n_j} \to q$. Par construction, il existe L et une suite N_{n_j} telle que

$$\|Lx^{N_{n_j}} q_{n_j} - 1\| < \frac{1}{2}$$

et

$$\|Lx^{N_{n_j}}\|_{\mathrm{op}} \leqslant L^2, \text{ donc } \|x^{N_j}\|_{\mathrm{op}} \leqslant L$$

d'où $\|x^{N_{n_j}}\|_{\mathrm{op}}^{1/N_{n_j}} \leqslant L^{1/N_{n_j}} \to 1.$

LEMME 6. *Le cercle unité* $\mathbf{T}$ *est contenu dans* $\sigma(T)$.

Démonstration du lemme 6. Pour $\theta \in \mathbf{R}$, écrivons, pour $n = N_j$:

$$x^n - e^{in\theta} = (x - e^{i\theta})(x^{n-1} + e^{i\theta}x^{n-2} + \ldots + e^{i(n-1)\theta}), \tag{7}$$

d'après la proposition 2,

$$\|x^{\frac{n}{4}} e^{i\left(\frac{3}{4}n-1\right)\theta} + \ldots + x^k e^{i(n-k-1)\theta} + \ldots + x^{n-1}\| = \frac{3}{4} \cdot n$$

et $\|e^{i(n-1)\theta} + \ldots + x^{\frac{1}{4} \cdot n-1} e^{i\frac{3}{4}n\theta}\| \leqslant \frac{n}{4}$, car $\|\cdot\| \leqslant |\cdot|$.

Posons $y_j = x^{N_j-1} + e^{i\theta}x^{N_j-2} + \ldots + e^{i(N_j-1)\theta}$; on obtient $\|y_j\| \geqslant \frac{1}{2} N_j$,

et par ailleurs:

$$\|(x - e^{i\theta})y_j\| \leqslant 2, \quad \text{puisque } \|x^{N_j} - e^{iN_j\theta}\| \leqslant 2. \tag{8}$$

Ceci prouve que $e^{i\theta} \in \sigma(T)$.

LEMME 7. *Tout* $\lambda, 0 < |\lambda| < 1$, *est contenu dans* $\sigma(T)$.

Démonstration du lemme 7. Nous aurons besoin de la propriété suivante de la construction:

(9) Pour tout $\mu, 0 < \mu < 1$, il existe des sous-suites C'_j et N'_j (extraites de C_j et N_j respectivement), telles que $C'_j \to +\infty$, $C'_j\mu^{N'_j} \to 0$, $C'_j x^{N'_j} \to 1$

(rappelons que C_j est obtenue par réarrangement de L_j; voir [1]).

Démonstration de (9). On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_{(\varepsilon)}$ et une suite $(N_j^{(\varepsilon)})_{j\geqslant 1}$ extraite de (N_j) avec:

$$\|C_{(\varepsilon)}x^{N_j(\varepsilon)} - 1\| < \varepsilon.$$

On réalise ceci avec $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$. Par construction, la suite C'_j obtenue pour $\varepsilon = 1/2^j$ tend vers l'infini (à chaque fois qu'on a un ε plus petit, on a un nouveau système). On choisit à chaque fois un $N_j^{(j)} > N_{j-1}^{(j-1)}$ assez grand pour que

$$C'_j\mu^{N_j^{(j)}} < \frac{1}{j} \cdot$$

La suite N'_j est la suite $N_j^{(j)}$ ainsi obtenue.

Démontrons maintenant le lemme 7. Soit $\lambda, 0 < |\lambda| < 1$. Posons:

$$z_j = C'_j[\lambda^{\frac{1}{2}N'_j-1} x^{\frac{1}{2}N'_j} + \ldots + \lambda^{k-1}x^{N'_j-k} + \ldots + x^{N'_j-1}].$$

D'après la proposition 2, $\|z_j\| \geqslant C'_j \to +\infty$. Mais $(x-\lambda)z_j = C'_j(x^{N'_j} - (\lambda x)^{\frac{1}{2}N'_j})$.

Or $C'_j x^{N'_j}$ est borné, et $C'_j\ \lambda^{\frac{1}{2}N'_j} \to 0$, d'après (9) appliqué à $\sqrt{|\lambda|}$.

Ceci achève la démonstration du théorème. Il en résulte évidemment que l'opérateur T n'est pas inversible. C'était clair sur la construction, puisqu'il existe des sous-suites $L_{n'_j}$ et $N_{n'_j}$ telles que $L_{n'_j} x^{N_{n'_j}} \to 1$, $L_{n'_j} \to +\infty$, et $\|x^{N_{n'_j}-1}\| = 1$ (proposition 2).

BIBLIOGRAPHIE

1. BEAUZAMY, B., Un opérateur sur un espace de Banach sans sous-espace invariant: simplification de l'exemple de P. Enflo, *Integral Equations Operator Theory*, **8**(1985), 314–384.

B. BEAUZAMY
Département de Mathématiques,
Université de Lyon,
43, Boulevard du 11 Novembre 1918,
69622 Villeurbanne-Cedex,
France.

Received February 10, 1986.