J. OPERATOR THEORY
17(1987), 129–187

ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ ВОЗМУЩЕНИЯ И ФОРМУЛЕ СЛЕДОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПАР ОПЕРАТОРОВ

М. Г. КРЕЙН

В 1979 г. появилась статья В. М. Адамяна и Б. С. Павлова [1], основной результат которой излагается ниже.

Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторое гильбертово пространство. Если A — линейный оператор, действующий в $\mathfrak{H}$, то через $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{R}(A)$, $\rho(A)$ и $\sigma(A)$ мы, как обычно, будем обозначать соответственно область определения оператора A, область его значений, множество его регулярных точек и его спектр. А вообще, мы будем придерживаться обозначений из книги [7]. Через $\mathfrak{A}_+(\mathfrak{H})$ обозначим множество линейных операторов A, действующих в $\mathfrak{H}$ и обладающих следующими свойствами:

1) A — максимальный диссипативный оператор;

2) $\rho(A) \cap \mathbf{C}_+ \neq \emptyset \quad (\mathbf{C}_+ = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}\,\lambda > 0)$;

3) по крайней мере для одного $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \mathbf{C}_+$:

$$(A - \lambda_0 I)^{-1} - (A^* - \lambda_0 I)^{-1} \in \mathfrak{S}_1.$$

Легко видеть, что если условие 3) выполняется для одного λ_0 из множества $\rho(A) \cap \mathbf{C}_+$, то оно будет выполняться для всех λ из этого множества.

Под свойством диссипативности оператора A мы понимаем выполнение условия:

$$\mathrm{Im}(Af, f) \geqslant 0 \quad \forall f \in \mathfrak{D}(A).$$

В силу известной теоремы Р. Филлипса [29] из условия 1) следует, что $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}$ и открытая нижняя полуплоскость $\mathbf{C}_- \subset \rho(A)$. Поэтому $\mathbf{C}_+ \subset \rho(A^*)$ и при выполнении условия 1) левая часть в условии 3) имеет смысл.

Вид дальнейших формул упростится, если мы примем, что в условии 2) $\lambda_0 = \mathrm{i}$, так что

2′) $\mathrm{i} \in \rho(A)$.

Можно показать (см. ниже — формулу (0.5)), что при выполнении условий 1), 2′), 3) равенством

$$Q^2 := 2\mathrm{i}[(A - \mathrm{i}I)^{-1} - (A^* - \mathrm{i}I)^{-1}](A - \mathrm{i}I)(A + \mathrm{i}I)^{-1} \quad (\in \mathfrak{S}_1) \tag{0.1}$$

определяется неотрицательный сжимающий оператор Гильберта-Шмидта Q.

В согласии с общей теорией характеристических функций [17], [10] для оператора $A \in \mathfrak{A}_+(\mathfrak{H})$ характеристической называется оператор-функция

$$S(z) = (I - Q^2)^{-1/2}\left\{I - \frac{z + \mathrm{i}}{2\mathrm{i}} Q(A^* - \mathrm{i}I)(A^* - zI)^{-1}Q\right\}\Big|\,\overline{Q\mathfrak{H}}. \tag{0.2}$$

Эта функция, очевидно, голоморфна в $\mathbf{C}_+$. Так как она имеет вид $S(z) = I + C_z$, где C_z — оператор-функция с ядерными значениями и голоморфная в ядерной норме, то существует всюду в $\mathbf{C}_+$ определитель $\det S(z)$, являющийся там голоморфной и сжимающей функцией. Поэтому $\det S(z)$ допускает в $\mathbf{C}_+$ каноническую факторизацию:

$$\det S(z) = B_A(z)\exp\left\{\mathrm{i}a_A z + \mathrm{i}b + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1 + \lambda z}{\lambda - z}\cdot\frac{d\mu_A(\lambda)}{1 + \lambda^2}\right\}, \tag{0.3}$$

где $a_A \geqslant 0$, $b \in (-\infty, \infty)$, $\mu_A(\lambda)$ — неубывающая функция ограниченной вариации, а $B_A(z)$ — произведение Бляшке, составленное по полной последовательности $\{\lambda_j(A)\}$ нулей функции $\det S(z)$. Эпитет "полная" означает, что последовательность $\{\lambda_j(A)\}$ содержит все нули функции $\det S(z)$ в $\mathbf{C}_+$ и каждый нуль в нее входит столько раз, какова его кратность. Из теории возмущений операторов (в §§ 2, 3 все это подробно разъясняется) следует, что последовательность $\{\lambda_j(A)\}$ одновременно является полной последовательностью собственных чисел оператора A в $\mathbf{C}_+$. Эпитет "полная" понимается аналогично тому, как в предыдущем случае, — следует только учесть, что для A $(\in \mathfrak{A}_+(\mathfrak{H}))$ всякое собственное число $\lambda_0 \in \mathbf{C}_+$ является нормальным (и значит, изолированным) собственным числом и, стало быть, имеет конечную алгебраическую кратность, равную кратности λ_0 как нуля $\det S(z)$.

Если A и B линейные операторы в $\mathfrak{H}$, то через $F(A, B)$ мы будем обозначать множество всех функций $\Phi(z)$, локально голоморфных на $\sigma(A) \cup \sigma(B)$.

В. М. Адамян и Б. С. Павлов [1], используя теорию функциональных моделей, установили следующее предложение.

ТЕОРЕМА АП. *Пусть* $A \in \mathfrak{A}_+(\mathfrak{H})\,(\mathrm{i} \in \rho(A))$; *тогда для любой* $\Phi \in F(A, A^*)$ *оператор* $\Phi(A) - \Phi(A^*)$ *определен, является ядерным и при* $a_A = 0$:

$$\mathrm{sp}\{\Phi(A) - \Phi(A^*)\} = \sum_j \{\Phi(\lambda_j) - \Phi(\bar{\lambda}_j)\} + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\mathrm{d}\mu_A(\lambda); \tag{0.4}$$

если же $a_A > 0$, *то для того, чтобы имело место это равенство, в правой части следует добавить слагаемое* $a_A \lim\limits_{z\to\infty}[z^2\Phi'(z)]$.

Поясним, что, если $a_A > 0$, *то* $\infty \in \sigma(A)$, *и по условию функция* $\Phi(z)$ *голоморфна в окрестности точки* $z = \infty$, *так что написанный предел имеет смысл.*

В. М. Адамян и Б. С. Павлов любезно познакомили автора настоящей статьи со своей работой еще в рукописи. Вскоре (31 мая 1978 г.) автор выступил на объединенном семинаре профессоров М. Г. Крейна и Г. С. Литвинчука с докладом, в котором был сформулирован ряд предложений, обобщающих и дополняющих теорему АП. Летом того же года автор записал эти результаты. Осталось составить список цитированной литературы и окончательно отредактировать текст. Однако, другие дела отвлекли автора и почти готовая статья пролежала в его архиве семь лет. Недавно в беседе с Ю. П. Гинзбургом обнаружилось, что он и его ученица Л. В. Шевчук, используя методы теории мультипликативных интегралов, получили результаты, имеющие точки соприкосновения с некоторыми результатами этой статьи. Заинтересовавшись ею, Ю. П. Гинзбург предложил свои услуги по подготовке рукописи к печати, за что автор глубоко ему признателен.

Кратко поясним какого типа результаты содержатся в настоящей работе. Прежде всего, напомним, что если A максимальный замкнутый диссипативный оператор, то существует его преобразование Кэли $T = (\mathrm{i}I - A)(\mathrm{i}I + A)^{-1}$ с $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{H}$, являющееся сжатием: $\|Tf\| \leqslant \|f\|, \forall f \in \mathfrak{H}$. Если A удовлетворяет также условию 2'), то сжатие T непрерывно обратимо. Для оператора Q^2, определенного равенством (0.1), в этом случае легко получается

$$Q^2 = I - T^*T \tag{0.5}$$

и при выполнении 3) справедливо включение $I - T^*T \in \mathfrak{S}_1$.

Таким образом, для оператора $A \in \mathfrak{A}_+(\mathfrak{H})$ преобразование Кэли T — непрерывно обратимое сжатие с ядерным отклонением $I - T^*T \in \mathfrak{S}_1$; кроме того, -1 не является для T собственным числом. Последнее вытекает из соотношения $T + I = 2\mathrm{i}(A + \mathrm{i}I)^{-1}$. Обратно, если T — сжатие, обладающее перечисленными свойствами, то, как легко видеть, его преобразование $A = \mathrm{i}(I + T)(I - T)^{-1} \in \mathfrak{A}_+(\mathfrak{H})$. В силу этого (см. § 3) теорема АП эквивалентна основной части теоремы 2.1, в которой устанавливается формула для $\mathrm{sp}[\Psi(T) - \Psi(T^{*-1})]$, где T — непрерывно обратимое сжатие с $I - T^*T \in \mathfrak{S}_1$, а Ψ — локально голоморфная функция на объединении спектров $\sigma(T) \cup \sigma(T^{*-1})$. При этом выясняется, что последняя формула является простым следствием формулы (2.2) для определителя возмущения $\Delta_T(\zeta) := \det[(T - \zeta I)(T^{*-1} - \zeta I)^{-1}]$, приведенной в [16] (с. 195), [8] (с. 140—141).

Понятие определителя возмущения может быть введено (см. [7]) для любых двух линейных операторов A и B, для которых $\rho(A) \cap \rho(B)$ не пусто и существует $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$ такое, что $(A - zI)^{-1} - (B - zI)^{-1} \in \mathfrak{S}_1$, в частности, для пары A и A^*, если $A \in \mathfrak{A}_+(\mathfrak{H})$. Однако мы будем пользоваться этим понятием в более простой ситуации, а именно, когда:

1) $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(B)$,

2) $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \varnothing$ и

3) $(B - A)(A - zI)^{-1} \in \mathfrak{S}_1$

хотя бы для одного $z \in \rho(A)$.

В этом случае для всех $z \in \rho(A)$ будет выполняться условие 3); кроме того, это условие будет выполняться, если поменять ролями A и B. Поэтому в рассматриваемом случае будет иметь смысл локально голоморфная функция:

$$\Delta_{B/A}(z) = \det((B - zI)(A - zI)^{-1}) = \tag{0.6}$$
$$= \det[I + (B - A)(A - zI)^{-1}] \quad (z \in \rho(A) \cap \rho(B)),$$

которая и называется определителем возмущения пары операторов A и B.

Логарифмическая производная от левой и правой части (0.6) дает (см. [7], с. 219—220)

$$\mathrm{sp}\{(B - zI)^{-1} - (A - zI)^{-1}\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln \Delta_{B/A}(z) \quad (z \in \rho(A) \cap \rho(B)). \tag{0.7}$$

Начиная с работы [12], эта формула использовалась для установления так называемой формулы следов

$$\mathrm{sp}\{\Phi(B) - \Phi(A)\} = \ldots \tag{0.8}$$

где $\Phi(z)$ — функция некоторого класса, определенная на объединении спектров $\sigma(A) \cup \sigma(B)$, а справа стоит явное выражение функционала от Φ из левой части. Для получения такого выражения приходится предварительно выяснить теоретико-функциональную структуру определителя $\Delta_{B/A}(z)$ и получить для него достаточно хорошее выражение.

В случае, когда операторы A и B являются самосопряженными, формулу следов удается установить для весьма широкого класса функций Φ. Ниже за исключением §§ 7, 8, 9 мы всюду устанавливаем формулу следов для функций $\Phi \in F(A, B)$.

Если удается из (0.7) получить надлежащую формулу следов для $\Phi \in F(A, B)$, то это достигается следующим способом: равенство (0.7) почленно умножается на функцию $\Phi(z)$ и интегрируется по соответствующему, вообще говоря, несвязному контуру, окружающему объединенный спектр $\sigma(A) \cup \sigma(B)$ и лежащему в областях голоморфности Φ; при этом используется операционное исчисление Рисса-Данфорда.

Этим приемом пользовался Г. Лангер [28], впервые рассмотревший случай несамосопряженных и неунитарных пар операторов. Этим же приемом воспользовались авторы теоремы АП [1]. Он используется и в настоящей работе. В сочетании с методом "операторных мажорант" этот прием позволяет вывести формулу следов (0.8) для следующих пар:

I) $A = T$ — ограниченному обратимому оператору с ядерным отклонением $I - T^*T$; $B = T^{*-1}$ (§§ 5, 6);

II) $A = H + iG$, где H (возможно, неограниченный) самосопряженный оператор, $G = G^*$ — ядерный оператор; $B = A^*$ (§ 8);

III) $A = H - iG$, где $H = H^*$, $G \geqslant 0$ — ядерный оператор; $B = H$ (§ 9).

С помощью формул следов получаются некоторые спектральные свойства изучаемых операторов.

Формулу следов для случая, когда $B = A^*$ впервые рассмотрел Л. А. Сахнович [22]. Он предполагал, что A — ограниченный оператор с ядерной мнимой компонентой, имеющий вещественный спектр. Для этого случая он получил формулу следов (0.4), в которой, разумеется, отсутствовала сумма со слагаемыми $\Phi(\lambda_j) - \Phi(\bar{\lambda}_j)$ и интеграл в правой части шел по конечному интервалу, содержащему спектр $\sigma(A)$, причем μ_A была функция ограниченной вариации. Что же касается функции Φ, то вместо требования кусочной голоморфности функции Φ на спектре $\sigma(A)$, налагалось ограничение, чтобы она была рациональной функцией определенного класса.

Для диссипативного оператора в формуле Л. А. Сахновича функция $\mu_A(\lambda)$ оказывалась неубывающей. Этот автор заметил, что при дополнительном предположении абсолютной непрерывности функции μ_A можно, используя рассуждения из [15], расширить класс допустимых функций Φ

в формуле следов до класса, введенного в теореме 1 заметки [14] и состоящего из функций Φ, для которых

$$\Phi'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\, dp(t), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |dp(t)| < \infty.$$

Заметим, что в случае III) мы получаем формулу следов для функций именно этого класса при условии: $p(t) = \mathrm{const}$. на отрицательной полуоси. Для случая I) при дополнительном предположении подобия T унитарному оператору справедливость формулы следов устанавливается для класса функций, введенного в теореме 2 той же заметки [14].

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Если $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства, то через $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$ будет обозначаться множество всех линейных непрерывных операторов, отображающих $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. Если $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$, то вместо $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$ будем писать $[\mathfrak{H}]$.

Как известно, всякий самосопряженный оператор $H \in [\mathfrak{H}]$ единственным образом представляется в виде разности: $H = H_+ - H_-$ неотрицательных операторов $H_\pm \in [\mathfrak{H}]$, ортогональных друг другу: $H_+H_- = H_-H_+ = 0$. В частности, для любого $T \in [\mathfrak{H}]$:

$$I - T^*T = (I - T^*T)_+ - (I - T^*T)_- . \tag{1.1}$$

Определим неотрицательные операторы $R_\pm$ $(= R_\pm(T))$ равенствами:

$$R_\pm^2 = (I - T^*T)_\pm .$$

Тогда $R_+R_- = R_-R_+ = 0$ и согласно (1.1)

$$T^*T = I - R_+^2 + R_-^2 = (I - R_+^2)(I + R_-^2) = (I + R_-^2)(I - R_+^2). \tag{1.2}$$

Отсюда $I - R_+^2 = T^*T(I + R_-^2)^{-1} = (I + R_-^2)^{-1}T^*T \geqslant 0$. Если оператор T непрерывно обратим, то оператор $I - R_+^2$ также непрерывно обратим, и таким образом, имеет смысл оператор:

$$T_M := T(I - R_+^2)^{-1} \quad (= T^{*-1}(I + R_-^2)). \tag{1.3}$$

Его мы будем называть мажорантным оператором для непрерывно обратимого T.

Существенно, что T_M — растяжение, т.е. $\|T_M x\| \geqslant \|x\|$ $(\forall x \in \mathfrak{H})$ или, что одно и то же, $T_M^* T_M \geqslant I$. В самом деле, $T_M^* T_M = (I - R_+^2)^{-1} T^* T (I - R_+^2)^{-1} = (I + R_-^2)(I - R_+^2)^{-1} \geqslant I$. Мы использовали здесь мультипликативное представление (1.2) для T^*T.

Заметим еще, что операторы T и T^{*-1} имеют одинаковые мажорантные операторы:

$$T_M = (T^{*-1})_M. \tag{1.4}$$

Действительно, переход $T \to T^{*-1}$ индуцирует переходы $T^*T \to (T^*T)^{-1}$, $I - R_+^2 \to (I + R_-^2)^{-1}$, так что (1.4) есть следствие второго равенства (1.3).

Если T — растяжение, то, очевидно, $R_+ = 0$ и $T_M = T$; если T — сжатие, то $R_- = 0$ и $T_M = T^{*-1}$.

1°. *Пусть $T\,(\in[\mathfrak{H}])$ непрерывно обратим. Если оператор $(I - T^*T)_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ (т.е. вполне непрерывен), то спектр оператора T в диске $|\zeta| < 1$ либо пуст, либо состоит из дискретного множества нормальных собственных чисел.*

Аналогично, если $(I - T^*T)_- \in \mathfrak{S}_\infty$, то спектр оператора T в области $|\zeta| > 1$ либо пуст, либо состоит из дискретного множества нормальных собственных чисел.

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Так как T_M обратимое растяжение, то диск $\mathbf{D} = \{\zeta \mid \zeta \in \mathbf{C}, |\zeta| < 1\}$ входит в $\rho(T_M)$. С другой стороны, как легко видеть,

$$T = T_M + S,$$

где $S = -T(I - R_+^2)^{-1} R_+^2$, и если $R_+^2 \in \mathfrak{S}_\infty$, то $S \in \mathfrak{S}_\infty$.

Поскольку $0 \,\overline{\in}\, \sigma(T)$, первое утверждение есть прямое следствие общего предложения (см. [7], лемма 1.5.2) о возмущении оператора вполне непрерывным.

Если $(I - T^*T)_- \in \mathfrak{S}_\infty$, то для $T_1 = T^{*-1}$ будем иметь $(I - T_1^* T_1)_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ и к T_1 применимо первое утверждение, откуда и следует второе для T.

В предположении, что $R_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ $(R_- \in \mathfrak{S}_\infty)$ обозначим через $\mathfrak{E}_+(T)$ $(\mathfrak{E}_-(T))$ линейную замкнутую оболочку всех корневых подпространств $\mathfrak{C}_\alpha(T)$, отвечающих собственным числам α оператора T с $|\alpha| < 1$ $(|\alpha| > 1)$.

Если же $T - T^*T \in \mathfrak{S}_\infty$ (т.е. $R_\pm \in \mathfrak{S}_\infty$), то у оператора T всякая его неунитарная точка спектра α $(|\alpha| \neq 1)$ будет нормальным собственным числом, и линейную замкнутую оболочку корневых подпространств $\mathfrak{C}_\alpha(T)$, отвечающих таким α, обозначим через $\mathfrak{E}(T)$.

Очевидно, $\mathfrak{E}(T)$ есть линейная замкнутая оболочка $\mathfrak{E}_+(T)$ и $\mathfrak{E}_-(T)$. Обозначим через P_T, P_T^+, P_T^- ортопроекторы на $\mathfrak{E}(T)$, $\mathfrak{E}_+(T)$ и $\mathfrak{E}_-(T)$ соответственно.

Последовательность $\{\alpha_j(T)\}_1^N$ $(0 \leqslant N \leqslant \infty)$ неунитарных собственных чисел оператора T будем называть полной, если каждое неунитарное собственное число α оператора T входит в эту последовательность столько раз, какова его алгебраическая кратность ν_α $(= \dim \mathfrak{C}_\alpha(T))$.

2. Важную роль в дальнейшем будет играть класс операторов $T \in [\mathfrak{H}]$, обладающих двумя свойствами:

1) оператор T непрерывно обратим и

2) его отклонение $I - T^*T$ ядерно: $I - T^*T \in \mathfrak{S}_1$.

Этот класс операторов мы обозначим через $[\mathfrak{H}]_1$.

Известно следующее предложение (см. [7], лемма V.3.1).

2°. *Если* $T \in [\mathfrak{H}]_1$, *то*

$$\det[P_T T^* T | P_T \mathfrak{H}] = \prod_{j=1}^{N} |\alpha_j(T)|^2, \tag{1.5}$$

где $\{\alpha_j(T)\}_1^N$ — *полная последовательность неунитарных собственных чисел оператора* T.

В частности, если $\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{H}$, то

$$\det(T^*T) = \prod_{j=1}^{N} |\alpha_j(T)|^2. \tag{1.6}$$

В силу 2° для любого $T \in [\mathfrak{H}]_1$ сходится произведение Бляшке:

$$B_T(\zeta) = \prod_j \frac{\alpha_j(T) - \zeta}{1 - \overline{\alpha_j(T)}\zeta} \cdot \frac{|\alpha_j(T)|}{\alpha_j(T)}. \tag{1.7}$$

Если T $(\in [\mathfrak{H}]_1)$ — сжатие $(\|T\| \leqslant 1)$, то предложение 2° можно уточнить. Предварительно напомним, что сжатие T называется вполне неунитарным, если его сужение $T|\mathfrak{C}$ на любом его инвариантном подпространстве $\mathfrak{C}$ не является унитарным оператором. Как известно [27], [25], любое сжатие T единственным образом распадается в ортогональную сумму $T = T_0 \oplus U$, где T_0 — вполне неунитарный оператор, а U — унитарный оператор.

3°. ([7], теорема V.3.2). *Пусть* T $(\in [\mathfrak{H}]_1)$ — *сжатие; тогда*

$$\det(T^*T) \leqslant \prod_j |\alpha_j(T)|^2. \tag{1.8}$$

Если к тому же T — *вполне неунитарное сжатие, то знак* $=$ *в* (1.8) *имеет место точно тогда, когда* $\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{H}$.

3. Если $T \in [\mathfrak{H}]_1$, то $T - T^{*-1} = T^{*-1}(T^*T - I) \in \mathfrak{S}_1$ и при $\zeta \,\overline{\in}\, \sigma(T^{*-1})$ имеет смысл определитель возмущения:

$$\begin{aligned} \Delta_T(\zeta) &:= \Delta_{T/T^{*-1}}(\zeta) = \det((T - \zeta I)(T^{*-1} - \zeta I)^{-1}) = \\ &= \det((T - \zeta I)(I - \zeta T^*)^{-1} T^*). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Вычислим квадрат его модуля: имеем (ср. с [8], с. 441)

$$\overline{\Delta_T(\zeta)} = \det(T(I-\bar\zeta T)^{-1}(T^* - \bar\zeta I)) = \det((T^* - \bar\zeta I)T(I-\bar\zeta T)^{-1}).$$

Поэтому

$$\overline{\Delta_T(\zeta)}\Delta_T(\zeta) = \det((T^* - \bar\zeta I)T(I-\bar\zeta T)^{-1}(T-\zeta I)(I-\zeta T^*)^{-1}T^*) =$$
$$= \det(T^*(I-\zeta T^*)^{-1}(T^*-\bar\zeta I)T(I-\bar\zeta T)^{-1}(T-\zeta I)) =$$
$$= \det(T^*T_\zeta^* T T_\zeta),$$

где $T_\zeta := (T-\zeta I)(I-\bar\zeta T)^{-1}$. Элементарной выкладкой проверяется тождество:

$$I - T_\zeta^* T_\zeta = (1-|\zeta|^2)(I-\zeta T^*)^{-1}(I-T^*T)(I-\bar\zeta T)^{-1}. \tag{1.10}$$

Оно показывает, что если T — сжатие и $|\zeta| < 1$ ($|\zeta| > 1$), то T_ζ — сжатие (растяжение) и если $I - T^*T \in \mathfrak{S}_1$, то и $I - T_\zeta^* T_\zeta \in \mathfrak{S}_1$. Окончательно получаем:

$$|\Delta_T(\zeta)|^2 = \det(T^*T)\det(T_\zeta^* T_\zeta) \quad (\zeta \,\bar\in\, \sigma(T^{*-1})). \tag{1.11}$$

Между полными последовательностями $\{\alpha_j(T)\}$ и $\{\alpha_j(T_\zeta)\}$ неунитарного спектра операторов T и T_ζ имеется (при надлежащей нумерации) соответствие:

$$\alpha_j(T_\zeta) = (\alpha_j(T) - \zeta)(1 - \bar\zeta\alpha_j(T))^{-1} \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

причем соответствующим собственным числам $\alpha_j(T)$ и $\alpha_j(T_\zeta)$ отвечают одинаковые корневые подпространства у операторов T и T_ζ, так что $\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{E}(T_\zeta)$ и $P_T = P_{T_\zeta}$.

Согласно предложению 2° можно утверждать:

$$\det(P_T T_\zeta^* T_\zeta | P_T \mathfrak{H}) = \prod_j |\alpha_j(T_\zeta)|^2 = \prod_j \left| \frac{\alpha_j(T) - \zeta}{1 - \bar\alpha_j(T)\zeta} \right|^2 = |B_T(\zeta)|^2.$$

В частности, если $\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{H}$, получаем

$$\det(T_\zeta^* T_\zeta) = |B_T(\zeta)|^2 \quad (\zeta \,\bar\in\, \sigma(T^{*-1})). \tag{1.12}$$

Сопоставление этого равенства с (1.11) дает предложение.

ЛЕММА 1.1. *Пусть $T \in [\mathfrak{H}]_1$. Для того, чтобы $\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{H}$, необходимо (а если T, кроме того, вполне неунитарное сжатие, то и достаточно), чтобы*

$$\Delta_T(\zeta) = \sqrt{\det(T^*T)}\, B_T(\zeta) \quad (\zeta \,\bar\in\, \sigma(T^{*-1})). \tag{1.13}$$

Доказательство. В самом деле, если $\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{H}$, то имеет место (1.12), что вместе с (1.11) дает равенство модулей левой и правой части (1.13) при всех $\zeta \overline{\in} \sigma(T^{*-1})$. С другой стороны, $\Delta_T(0) = \det(T^*T)$, а $B_T(0) = \prod_j |\alpha_j(T)|$, и согласно 2° левая и правая части (1.13) равны при $\zeta = 0$.

Тем самым первое утверждение леммы доказано.

Соотношение (1.13) при $\zeta = 0$ дает (1.8) со знаком $=$, а для вполне неунитарного сжатия $T \in [\mathfrak{H}]_1$ это равенство эквивалентно равенству $\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{H}$.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Нетрудно убедиться в том, что, если $T\,(\in [\mathfrak{H}]_1)$ — вполне неунитарное сжатие, то для того чтобы $\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство модулей левой и правой части (1.13) в произвольно фиксированной неунитарной точке $\zeta_0 \overline{\in} \sigma(T^{*-1})$.

2. ФОРМУЛА СЛЕДОВ ДЛЯ СЖАТИЯ $T \in [\mathfrak{H}]_1$ И ЕГО СОПРЯЖЕННОГО T^*

1. Чтобы разгрузить доказательство основной теоремы этого параграфа, докажем сначала следующее элементарное предложение:

ЛЕММА 2.1. *Пусть $\{\alpha_j\}_1^\infty$ — последовательность комплексных чисел, отличных от нуля, такая, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big| 1 - |\alpha_j| \big| < \infty. \tag{2.1}$$

Тогда для любой функции $\Phi(\zeta)$, локально голоморфной в некоторой окрестности замыкания $\mathscr{E}$ множества $\{\alpha_j\}_1^\infty \cup \{\bar{\alpha}_j^{-1}\}_1^\infty$, ряд

$$\sum_j \{\Phi(\alpha_j) - \Phi(\bar{\alpha}_j^{-1})\}$$

абсолютно сходится.

Доказательство. В силу (2.1) предел $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n| = 1$, так что все предельные точки объединения $\mathscr{E}$ лежат на единичной окружности, а поэтому существуют константы $C_1\ (>0)$ и C_2 такие, что

$$C_1 < |\alpha_j| < C_2 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $\zeta_0 \in \mathscr{E}$ ($|\zeta_0| = 1$). По условию найдется такая окрестность K_0 точки ζ_0, которая вместе со своим замыканием $\bar{K}_0$ попадает в область голоморфности функции Φ. Без ограничения общности можно предположить, что окрестность K_0 расположена симметрично относительно единичной окружности. Положим

$$M = \max_{\xi \in \bar{K}_0} |\Phi'(\zeta)|.$$

Если некоторое $\alpha_j \in K_0$, то и $\bar{\alpha}_j^{-1} \in K_0$ и

$$|\Phi(\alpha_j) - \Phi(\bar{\alpha}_j^{-1})| = \left| \int_{\alpha_j}^{\bar{\alpha}_j^{-1}} \Phi'(\zeta)\,d\zeta \right| \leqslant M |\alpha_j - \bar{\alpha}_j^{-1}| =$$

$$= \frac{M}{|\alpha_j|} \left| |\alpha_j|^2 - 1 \right| \leqslant \frac{M}{C_1} (C_2 + 1) \left| |\alpha_j| - 1 \right|.$$

Поэтому в силу (2.1)

$$\sum_{\alpha_j \in K_0} |\Phi(\alpha_j) - \Phi(\bar{\alpha}_j^{-1})| < \infty.$$

По лемме Гайне-Бореля найдется конечное число окрестностей K_i ($i = 0, 1, \ldots, m$), типа K_0, объединение которых $\mathbf{K} = \bigcup K_i$ будет покрывать множество всех предельных точек множества $\mathscr{E}$. Вне $\mathbf{K}$ будет находиться конечное число точек из $\mathscr{E}$. Если отбросить слагаемые в сумме $\sum |\Phi(\alpha_j) - \Phi(\bar{\alpha}_j^{-1})|$, соответствующие этим точкам, то оставшаяся сумма будет не больше

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha_j \in K_i} |\Phi(\alpha_j) - \Phi(\bar{\alpha}_j^{-1})| < \infty.$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть T — сжатие из $[\mathfrak{H}]_1$. Тогда в диске $|\zeta| < 1$*

$$\Delta_T(\zeta) = \det{}^{1/2}(T^*T) B_T(\zeta) \exp\left(- \oint \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta}\, d\tau_T(\theta) \right), \tag{2.2}$$

где τ_T — некоторая неотрицательная мера на единичной окружности).*

Если некоторая открытая дуга γ единичной окружности не содержит точек спектра $\sigma(T)$, то $\tau_T(\gamma) = 0$.

Для любой функции $\Psi(\zeta)$, локально голоморфной в некоторой окрестности объединения спектров $\Sigma_T = \sigma(T) \cup \sigma(T^{*-1})$, оператор $\Psi(T)$ —

---

*) Знаком $\oint$ обозначается, что интеграл берется по мере, заданной на единичной окружности.

— $\Psi(T^{*-1}) \in \mathfrak{S}_1$ *и имеет место "формула следов":*

$$(2.3)\quad \mathrm{sp}\{\Psi(T) - \Psi(T^{*-1})\} = \sum_j \{\Psi(\alpha_j) - \Psi(\bar\alpha_j^{-1})\} + \frac{2}{i}\oint \frac{d\Psi(e^{i\theta})}{d\theta}\, d\tau_T(\theta),$$

где $\{\alpha_j\} = \{\alpha_j(T)\}$ *— полная последовательность неунитарного спектра оператора* T.

Доказательство. Представление (2.2) уже отмечалось в [16] и [8]. Оно непосредственно следует из (1.11) и того, что $\|T_\zeta\| < 1$ при $|\zeta| < 1$, $B_T(0) > 0$ и $\Delta_T(0) > 0$.

Если некоторая открытая дуга γ единичной окружности не содержит точек спектра $\sigma(T)$, то она будет входить в некоторую область голоморфности функций $\Delta_T(\zeta)$ и T_ζ. Для $\zeta \in \gamma$ имеет $T_\zeta = -\zeta I$ и согласно (1.11): $|\Delta_T(\zeta)| = \det^{1/2}(T^*T)$.

Так как, кроме того, $B_T(\zeta)$ регулярна на γ и $|B_T(\zeta)| = 1$ при $\zeta \in \gamma$, то мы заключаем, что интеграл, стоящий под знаком exp в правой части (2.2) дает функцию, голоморфную в диске $|\zeta| < 1$, которая аналитически продолжается через дугу γ, принимая на ней чисто мнимые значения. Отсюда уже следует, что $\tau_T(\gamma) = 0$.

Для получения формулы следов (2.3) возьмем логарифмическую производную по ζ от обеих частей равенства (2.2), предполагая, что $\zeta \bar\in \sigma(T)$, $|\zeta| < 1$, тогда получим (см. [7], с. 219, 220)

$$(2.4)\quad \begin{aligned} \mathrm{sp}\{(T - \zeta I)^{-1} - (T^{*-1} - \zeta I)^{-1}\} &= -\sum_j \left\{\frac{1}{\zeta - \alpha_j} - \frac{1}{\zeta - \bar\alpha_j^{-1}}\right\} + \\ &+ \oint \frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - \zeta)^2}\, d\tau_T(\theta). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что комплексно сопряженной к левой части (2.4) будет величина:

$$\mathrm{sp}\{(T^* - \bar\zeta I)^{-1} - (T^{-1} - \bar\zeta I)^{-1}\} = \mathrm{sp}\{T^{*-1}(I - \bar\zeta T^{*-1})^{-1} - T(I - \bar\zeta T)^{-1}\} =$$

$$= \frac{1}{\bar\zeta}\,\mathrm{sp}\{(I - \bar\zeta T^{*-1})^{-1} - (I - \bar\zeta T)^{-1}\} =$$

$$= \frac{1}{\bar\zeta^2}\,\mathrm{sp}\left\{\left(T - \frac{1}{\bar\zeta} I\right)^{-1} - \left(T^{*-1} - \frac{1}{\bar\zeta} I\right)^{-1}\right\}.$$

Поэтому, если в равенстве (2.4) перейти к комплексно сопряженным величинам и помножить его почленно на $\bar\zeta^2$, то после простых преобразований в правой части мы придем к тому же равенству (2.4) с заменой в нем ζ на $\bar{\zeta}^{-1}$.

Если $(0<)\ |\zeta| \leqslant 1$ и $\zeta \bar{\in} \sigma(T)$, то $|\bar{\zeta}^{-1}| \geqslant 1$ и $\bar{\zeta}^{-1} \bar{\in} \sigma(T^{*-1})$.

Мы убеждаемся, что равенство (2.4) имеет место при всех $\zeta \bar{\in} \sigma(T) \cup \cup\, \sigma(T^{*-1})$ (в том числе и унитарных).

Если $\Psi(\zeta)$ — кусочно голоморфная функция в некоторой окрестности объединения спектров $\Sigma_T := \sigma(T) \cup \sigma(T^{*-1})$, то найдется гладкий (вообще говоря, несвязный) контур Γ, охватывающий Σ_T и покрываемый областями голоморфности функции Ψ. Тогда согласно операционным формулам Ф. Рисса будем иметь

$$\Psi(T) - \Psi(T^{*-1}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Psi(\zeta)\{(T-\zeta I)^{-1} - (T^{*-1}-\zeta I)^{-1}\}d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Psi(\zeta)(I-\zeta T^*)^{-1}(I-T^*T)(T-\zeta I)^{-1}\,d\zeta.$$

Так как $I - T^*T \in \mathfrak{S}_1$, то подинтегральное выражение в последнем интеграле есть ядерный оператор, непрерывный в ядерной норме в каждой точке $\zeta \bar{\in} \Sigma_T$. Поэтому $\Psi(T) - \Psi(T^{*-1}) \in \mathfrak{S}_1$ и

$$\text{(2.5)}\qquad \operatorname{sp}\{\Psi(T) - \Psi(T^{*-1})\} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Psi(\zeta)\operatorname{sp}\{(T-\zeta I)^{-1} - (T^{*-1}-\zeta I)^{-1}\}d\zeta.$$

Для вычисления правой части воспользуемся равенством (2.4); тогда найдем, что она равна

$$\sum_j \{\Psi(\alpha_j) - \Psi(\bar{\alpha}_j^{-1})\} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Psi(\zeta)\left(\oint \frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-\zeta)^2}\,d\tau_T(\theta)\right)d\zeta.$$

Меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим, что он равен

$$\oint 2e^{i\theta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Psi(\zeta)}{(\zeta-e^{i\theta})^2}\,d\zeta\right)d\tau_T(\theta) = \frac{2}{i}\oint \frac{d\Psi(e^{i\theta})}{d\theta}\,d\tau_T(\theta).$$

Тем самым формула следов (2.3) установлена.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в представлении (2.2) положить $\zeta = 0$, то получим

$$\det{}^{1/2}(T^*T) = \prod_j |\alpha_j(T)| \exp\left(-\oint d\tau_T(\theta)\right) \quad \left(\leqslant \prod_j |\alpha_j(T)|\right). \tag{2.6}$$

Это равенство позволяет по-новому истолковать предложение 3° (§1) о неравенстве (1.8).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Для непрерывно обратимого сжатия* $T \in [\mathfrak{H}]_1$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1) *мера* $\tau_T = 0$ $(\operatorname{Var} \tau_T = 0)$,
2) $\Delta_T(\zeta) = \det^{1/2}(T^*T)B_T(\zeta)$ $(\zeta \in \sigma(T^{*-1}))$,
3) $\det(T^*T) = \prod_j |\alpha_j(T)|^2$,
4) *пространство* $\mathfrak{H}_u := \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{E}(T)$ *инвариантно относительно оператора* T *и сужение* $T | \mathfrak{H}_u$ *унитарно.*

В самом деле, 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) (в силу (2.2) и (2.6)), а согласно предложению 3°: 3) $\Leftrightarrow$ 4).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ АП

1. Теорема АП и теорема 2.1 (без второго утверждения) эквивалентны в том смысле, что из одной путем простого пересчета получается другая. Покажем, как, например, из теоремы 2.1 выводится теорема АП.

Если диссипативный оператор A удовлетворяет условиям теоремы АП, т.е. $A \in \mathfrak{A}_+(\mathfrak{H})$, то ему соответствует по формуле $T = (iI - A)(iI + A)^{-1}$ обратимое сжатие T с ядерным отклонением, для которого имеет место формула следов (2.3). Если функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условиям теоремы АП, то функция $\Psi(\zeta)$, связанная с ней соотношениями

$$\Psi(\zeta) = \Phi\left(i\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right), \quad \Phi(z) = \Psi\left(\frac{i-z}{i+z}\right) \tag{3.1}$$

будет удовлетворять условиям теоремы 2.1 и для нее будет иметь место формула следов (2.3). Предположим сначала, что в точке $\zeta = -1$ мера τ_T не имеет сосредоточенной массы. Тогда, переходя в этой формуле от оператора T к оператору A путем соответствующих подстановок, получим формулу следов

$$\operatorname{sp}\{\Phi(A) - \Phi(A^*)\} = \sum_j \{\Phi(\lambda_j) - \Phi(\bar\lambda_j)\} + i\int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\, d\omega_A(\lambda) \tag{3.2}$$

$$\text{(3.3)}\qquad d\omega_A(\lambda) = \frac{d\tau_T(\theta)}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}} \qquad \left(d\tau_T(\theta) = \frac{d\omega_A(\lambda)}{1+\lambda^2}\right),$$

где

$$\lambda = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \qquad -\pi < \theta < \pi,\ -\infty < \lambda < \infty.$$

Соотношения (3.2), (3.3) вытекают из того, что согласно (3.1)

$$2\oint \frac{d\Psi(e^{i\theta})}{d\theta}\, d\tau_T(\theta) = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\Phi\left(\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right)}{d\theta}\, d\tau_T(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\, \frac{d\tau_T(\theta)}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}.$$

Если же в точке $\zeta = -1$ сосредоточена масса $\tau_T[-1]$ (>0), то формулу (2.3) можно переписать в виде

$$\text{(3.4)}\qquad \begin{aligned} \operatorname{sp}[\Psi(T) - \Psi(T^{*-1})] &= \sum_j \{\Psi(\lambda_j) - \Psi(\bar{\alpha}_j^{-1})] + \\ &+ \frac{2}{i}\oint \frac{d\Psi(e^{i\theta})}{d\theta}\, d\overset{0}{\tau}_T(\theta) + \frac{2}{i}\,\tau_T[-1]\Psi'(-1), \end{aligned}$$

где мера $\overset{0}{\tau}_T$ получается из меры τ_T путем выбрасывания сосредоточенной массы $\tau_T[-1]$.

Здесь мы использовали то обстоятельство, что, поскольку $-1 \in \sigma)T$, функция $\Psi(\zeta)$ голоморфна в некоторой окрестности точки $\zeta = -1$ Но тогда функция $\Phi(z)$ голоморфна в некоторой окрестности точки $z = \infty$ и при этом

$$\frac{2}{i}\Psi'(-1) = \frac{2}{i}\lim_{\zeta\to-\infty}\Psi'(\zeta) = \lim_{z\to\infty}[\Phi'(z)(i+z)^2] = \lim_{z\to\infty}[z^2\Phi'(z)].$$

Если теперь перейти в формуле (2.3) от оператора A, то полуми формулу (0.1) с дополнительным слагаемым в правой части, равныя $\tau_T[-1]\lim\limits_{z\to\infty} z^2\Phi'(z)$. Для завершения доказательства теоремы АП остаетсм проверить справедливость соотношений $d\omega_A = d\mu_A$ и $a_A = \tau_T[-1]$.

С этой целью перепишем формулу (2.2) в виде

$$\Delta_T(\zeta) = \det{}^{1/2}(T^*T)B_T(\zeta)\exp\left(-\int \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\, d\overset{0}{\tau}_T(\theta) + \tau_T[-1]\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right).$$

Если здесь положить $\zeta = (\mathrm{i} - z)(\mathrm{i} + z)^{-1}$ и воспользоваться соотношениями (3.3), то получим

$$\Delta_T\left(\frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}\right) =$$

(3.5)

$$= \det{}^{1/2}(T^*T)B_T\left(\frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}\right)\exp\left\{-\mathrm{i}\tau_T[-1]z + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1 + \lambda z}{\lambda - z}\frac{\mathrm{d}\omega_A(\lambda)}{1 + \lambda^2}\right\}.$$

Легко видеть, что $B_T((\mathrm{i} - z)(\mathrm{i} + z)^{-1})$ может отличаться только постоянным множителем от $B_A(z)$. Так как

$$\Delta_T(\zeta) := \det[(T - \zeta I)(T^{*-1} - \zeta I)^{-1}] = \det(T^*(T - \zeta I)(I - \zeta T^*)^{-1}) =$$

$$= \det[I - (I - T^*T)(I - \zeta T^*)^{-1}],$$

то

$$\Delta_T\left(\frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}\right) = \det\left[I - Q^2\left(I - \frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}T^*\right)^{-1}\right] =$$

$$= \det\left[I - Q\,\frac{\mathrm{i} + z}{2\mathrm{i}}(A^* - zI)^{-1}(A^* - \mathrm{i}I)Q\right]$$

и, стало быть (см. (0.2)),

$$\det S(z) = \det(I - Q^*Q)^{-1/2}\Delta_T\left(\frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}\right). \tag{3.6}$$

Сравнивая представление (0.3) для $\det S(z)$ и представление (3.5) для Δ_T с учетом, что $\det S$ и Δ_T отличаются положительным множителем, найдем, что $\mathrm{d}\omega_A = \mathrm{d}\mu_A$ и $a = \tau_T[-1]$.

Тем самым теорема AII доказана.

Заметим, что если в исходном выражении для $\Delta_T(\zeta)$ положить $\zeta = (\mathrm{i} - z)(\mathrm{i} + z)^{-1}$, а $T = (A - \mathrm{i}I)(A + \mathrm{i}I)^{-1}$, то легко получим на основании (3.6), что

$$\det S(z) = \det{}^{-1/2}(I - Q^*Q)\det[(\mathrm{i}I + A)^{-1}(A - zI)(A^* - zI)^{-1}(\mathrm{i}I + A^*)].$$

4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВОЗМУЩЕНИЯ Δ_{T/T_M}, Δ_{T^{*-1}/T_M}

1. Нам понадобится понятие характеристической функции $\Theta_T(\zeta)$ непрерывно обратимого оператора $T \in [\mathfrak{H}]$ в том виде, как оно определено в [5].

Для оператора T указанного типа всегда можно ввести гильбертово пространство $\mathfrak{G}$, оператор $R \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{G}]$ и сигнатурный оператор $J \in [\mathfrak{G}]$ ($J = J^*, J^2 = I_{\mathfrak{G}}$) так, что будет иметь место равенство

$$(4.1) \qquad I - T^*T = R^*JR.$$

После этого найдется непрерывно обратимый оператор $K \in [\mathfrak{G}]$, такой, что

$$(4.2) \qquad J - RR^* = KJK^*,$$

и характеристическая функция $\Theta_T(\zeta)$ при любом $\zeta \bar{\in} \sigma(T^{*-1})$ будет определяться равенством: *)

$$(4.3) \qquad \Theta_T(\zeta) = (JK)^{-1}[I_{\mathfrak{G}} - JR(I - \zeta T^*)^{-1}R^*].$$

Очевидно, $\Theta_T(\zeta)$ есть оператор-функция со значениями из $[\mathfrak{G}]$. Оказывается, для нее справедливы следующие тождества:

$$(4.4) \qquad \begin{cases} J - \Theta_T^*(\eta)J\Theta_T(\zeta) = (1 - \zeta\bar{\eta})R(I - \bar{\eta}T)^{-1}(I - \zeta T^*)^{-1}R^* \\ J - \Theta_T(\zeta)J\Theta_T^*(\eta) = (I - \zeta\bar{\eta})S^*(I - \zeta T^*)^{-1}(I - \bar{\eta}T)^{-1}S, \end{cases}$$

где $S = TR^*K^{*-1}$, $\zeta, \eta \bar{\in} \sigma(T^{*-1})$.

Этих сведений относительно характеристической функции достаточно для дальнейшего.

Нам удобно будет специальным образом выбрать $\mathfrak{G}$, R, J и K. При этом мы будем предполагать, что ни T, ни T^{-1} не являются сжатиями, а следовательно, оператор $I - T^*T$ является знакопеременным.

В качестве $\mathfrak{G}$ выберем $\overline{(I - T^*T)\mathfrak{H}}$, т.е. ортогональное дополнение к множеству нулей оператора $I - T^*T$. Затем положим $J := P_+ - P_- = \operatorname{sign}[(I - T^*T)|\mathfrak{G}]$ и

$$(4.5) \qquad R := R_+ + R_-,$$

где $R_\pm$ — неотрицательные операторы, введенные в §1 : $R_\pm^2 = \pm P_\pm(I - T^*T)$.

Так как $R_\pm\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, то мы можем считать, что $R \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{G}]$, и тогда будем иметь $R^* = R|\mathfrak{G}$.

*) В [5] определение $\Theta_T(\zeta)$ отличается тем, что выражение, стоящее в правой части (4.3) умножено слева на J и, кроме того, операторы $K(K^*)$ и $R(R^*)$ обозначены соответственно через $K^*(K)$ и $R^*(R)$.

Оператор $K \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ определим равенством

$$K = K^* := [(P_+ - R_+^2)^{1/2} - (P_- + R_-^2)^{1/2}]|\mathfrak{G}.$$

Иначе оператор K можно записать еще в виде

$$K = [(P_+(T^*T)P_+)^{1/2} - (P_-(T^*T)P_-)^{1/2}]|\mathfrak{G}. \tag{4.6}$$

Легко видеть, что при таком выборе $\mathfrak{G}, J, R$ и K будут выполняться соотношения (4.1) и (4.2).

Если $R_+^2 \in \mathfrak{S}_1$, то имеет смысл определитель

$$\begin{gathered} \det{}_+(T^*T) := \det(I - R_+^2) = \\ = \det([I_+ - P_+(I - T^*T)]|\mathfrak{G}_+) = \det(P_+T^*T|\mathfrak{G}_+). \end{gathered} \tag{4.7}$$

Здесь подразумевается, что $\mathfrak{G}_\pm = P_\pm \mathfrak{G}$, $I_\pm = I_{\mathfrak{G}_\pm}$.

Полный спектр ненулевых собственных чисел оператора $I_+ - R_+^2$ совпадает с полным спектром ненулевых собственных чисел, меньших единицы, оператора $T^*T = I - R_+^2 + R_-^2 = I_+ - R_+^2 + I_- + R_-^2 + P_0$ ($P_0 = I - P_+ - P_-$). Поэтому имеем

$$\det{}_+(T^*T) = \prod_{|\lambda_j|<1} \lambda_j(T^*T), \tag{4.8}$$

где через $\lambda(T^*T)$ обозначается собственное число оператора T^*T, причем в произведении каждое собственное число $\lambda(T^*T)<1$ фигурирует столько раз, какова его кратность.

Согласно предложению 1.1° при $R_+^2 \in \mathfrak{S}_1$ спектр T внутри диска $|\zeta|<1$ состоит из нормальных собственных чисел. Их полную последовательность обозначим через $\{\alpha_j^+\}$ и с помощью нее составим формальное произведение Бляшке:

$$B_T^+(\zeta) = \prod_j \frac{\alpha_j^+ - \zeta}{1 - \bar{\alpha}_j^+\zeta} \cdot \frac{|\alpha_j^+|}{\alpha_j^+}. \tag{4.9}$$

Ниже будет показано, что оно сходится, если $R_+^2 \in \mathfrak{S}_1$.

Аналогично, если $R_-^2 \in \mathfrak{S}_1$, то имеет смысл определитель

$$\det{}_-(T^*T) := \det(I_- + R_-^2) = \prod_{|\lambda_j|>1} \lambda_j(T^*T). \tag{4.10}$$

В этом случае спектр оператора T в области $|\zeta|>1$ будет состоять из нормальных собственных чисел и по полной их последовательности $\{\alpha_j^-\}$ можно будет составить произведение

$$B_T^-(\zeta)=\prod_j \frac{\alpha_j^- - \zeta}{1-\bar{\alpha}_j^- \zeta}\cdot\frac{|\alpha_j^-|}{\alpha_j^-}.$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть T ($\in[\mathfrak{H}]$) — непрерывно обратимый оператор. Если $(I-T^*T)_+\in\mathfrak{S}_1$, то сходится произведение $B_T^+(\zeta)$ ($|\zeta|<1$) и имеет место формула:*

$$(4.11)\quad \Delta_{T/T_M}(\zeta)=\det\nolimits_+^{1/2}(T^*T)B_T^+(\zeta)\exp\left(-\oint\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\tau_T^+(\theta)\right)\quad (|\zeta|<1),$$

где τ_T^+ — некоторая неотрицательная мера на единичной окружности (оператор T_M определен в §1).

Аналогично, если $(I-T^*T)_-\in\mathfrak{S}_1$, то сходится произведение $B_T^-(\zeta)$ ($|\zeta|<1$, $\zeta\in\sigma(T^{*-1})$) и имеет место формула

$$(4.12)\quad \Delta_{T^{*-1}/T_M}(\zeta)=\det\nolimits_-^{-1/2}(T^*T)(B_T^-(\zeta))^{-1}\exp\left(-\oint\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\tau_T^-(\theta)\right),$$

где τ_T^- — неотрицательная мера на единичной окружности.

Доказательство. Так как для $T_1=T^{*-1}$ имеем $(T_1)_M=T_M$, а

$$\det\nolimits_\pm(T^*T)=\det\nolimits_\mp^{-1}(T_1^*T_1),$$

то достаточно доказать одно из утверждений теоремы, — другое получится из него переходом от T к T^{*-1}. Докажем второе утверждение.

Рассмотрим функцию

$$F(\zeta)=\det\nolimits_-^{1/2}(T^*T)\Delta_{T^{*-1}/T_M}(\zeta).$$

Так как T_M — растягивающий непрерывно обратимый оператор, то он не имеет точек спектра внутри единичного круга. Поэтому $F(\zeta)$ — голоморфная функция внутри этого круга. Если мы покажем, что

$$(4.13)\quad |F(\zeta)|\leqslant 1\quad (|\zeta|<1),$$

то каноническая факторизация $F(\zeta)$ и даст представление (4.12). Следует только пояснить, что $F(0)>0$, ибо

$$F(0)=\det\nolimits_-^{1/2}(T^*T)\det(T^{*-1}T_M^{-1})=\det\nolimits_-^{1/2}(T^*T)\det(I_-+R_-^2)^{-1}=\det\nolimits_-^{-1/2}(T^*T),$$

и что полная последовательность нулей функции $F(\zeta)$ внутри единичного круга совпадает с полной последовательностью внутри этого круга собственных чисел оператора T^{*-1}, так что произведение Бляшке для $F(\zeta)$ совпадает с $B^{+}_{T*-1}(\zeta) = (B^{-}_{T}(\zeta))^{-1}$.

Для доказательства (4.13) воспользуемся тождествами (4.4). При $\eta = \zeta$, $|\zeta| < 1$, $\zeta \bar{\in} \sigma(T^{*-1})$ из них следует, что $\Theta_T(\zeta)$ — двояко J - несжимающий оператор, т.е.

(4.14) $$J - \Theta_T^*(\zeta)J\Theta_T(\zeta) \geqslant 0, \quad J - \Theta_T(\zeta)J\Theta_T^*(\zeta) \geqslant 0.$$

В соответствии с разложением $\mathfrak{G} = P_+\mathfrak{G} \oplus P_-\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_+ \oplus \mathfrak{G}_-$ оператор-функция $\Theta_T(\zeta)$ допускает матричное представление

$$\Theta_T(\zeta) = \begin{bmatrix} \Theta_{11}(\zeta) & \Theta_{12}(\zeta) \\ \Theta_{21}(\zeta) & \Theta_{22}(\zeta) \end{bmatrix}.$$

Если мы запишем первое из неравенств (4.14), используя это матричное представление $\Theta_T(\zeta)$, то получим

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & \Theta_{22}^*(\zeta)\Theta_{22}(\zeta) - \Theta_{12}^*(\zeta)\Theta_{12}(\zeta) - I_- \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

где звездочками обозначены неинтересующие нас элементы матрицы. Отсюда находим, что $\Theta_{22}^*(\zeta)\Theta_{22}(\zeta) \geqslant I_-$. Аналогично из второго неравенства (4.14) получается, что $\Theta_{22}(\zeta)\Theta_{22}^*(\zeta) \geqslant I_-$. Полученные соотношения показывают, что $\Theta_{22}(\zeta)\,(\in[\mathfrak{G}_-])$ имеет в $[\mathfrak{G}_-]$ обратный элемент $\Theta_{22}^{-1}(\zeta) \in [\mathfrak{G}_-]$ и, более того,

(4.15) $$\|\Theta_{22}^{-1}(\zeta)\| \leqslant 1, \quad |\zeta| < 1, \quad \zeta \bar{\in} \sigma(T^{*-1}).$$

Выпишем, исходя из (4.3), (4.5) и (4.6), выражение для $\Theta_{22}(\zeta) = P_-\Theta_T(\zeta)|\mathfrak{G}_-$. С этой целью заметим, что

$$\begin{aligned} P_-(JK)^{-1} &= P_-\{[(P_+ - R_+^2)^{1/2} + (P_- + R_-^2)^{1/2}]|\mathfrak{G}\}^{-1} = \\ &= P_-[((P_+ - R_+^2)|\mathfrak{G}_+)^{-1/2} + ((P_- + R_-^2)|\mathfrak{G}_-)^{-1/2}] = \\ &= [(P_- + R_-^2)|\mathfrak{G}_-]^{-1/2}, \end{aligned}$$

а $P_-(JR) = -P_-R = -R_-$, $R^*P_- = R_-$, в силу чего получаем

(4.16) $$\Theta_{22}(\zeta) = (I_- + R_-^2)^{-1/2}[I_- + R_-(I - \zeta T^*)^{-1}R_-].$$

Так как $R_-^2 \in \mathfrak{S}_1$, то для каждого из множителей в правой части существует определитель и, учитывая (4.10), можно будет написать

$$\det \Theta_{22}(\zeta) = \det_-^{-1/2}(T^*T)\det[I_- + R_-(I - \zeta T^*)^{-1}R_-] =$$
$$= \det_-^{-1/2}(T^*T)\det[I_- + P_-(I - \zeta T^*)^{-1}R_-^2].$$

Положим $Z := (I - \zeta T^*)^{-1}R_-^2$, и далее $Z_{22} := P_-Z|\mathfrak{G}_- = P_-(I - \zeta T^*)^{-1}R_-^2|\mathfrak{G}_-$, $Z_{12} := P_+Z|\mathfrak{G}_-$, $Z_{21} := P_-Z|\mathfrak{G}_+ = 0$ и $Z_{11} := P_+Z|\mathfrak{G}_+ = 0$ (ибо $Z = ZP_-$). Поэтому

$$\det(I + (I - \zeta T^*)^{-1}R_-^2) = \det(I + Z) = \det\begin{pmatrix} I_+ & Z_{12} \\ 0 & I_- + Z_{22} \end{pmatrix} =$$
$$= \det(I_- + Z_{22}) = \det(I_- + P_-(I - \zeta T^*)^{-1}R_-^2).$$

С другой стороны, вспоминая определение (1.3) мажорантного оператора T_M, находим

$$I + (I - \zeta T^*)^{-1}R_-^2 = (T^{*-1} - \zeta I)^{-1}(T^{*-1}R_-^2 + T^{*-1} - \zeta I) =$$
$$= (T^{*-1} - \zeta I)^{-1}(T_M - \zeta I).$$

Таким образом,

$$\det \Theta_{22}(\zeta) = \det_-^{-1/2}(T^*T)\Delta_{T_M/T^{*-1}}(\zeta) \quad (|\zeta| < 1, \zeta \in \sigma(T^{*-1})),$$

а следовательно,

$$\det \Theta_{22}^{-1}(\zeta) = \det_-^{1/2}(T^*T)\Delta_{T^{*-1}/T_M}(\zeta) = F(\zeta).$$

Согласно (4.15) имеем $|\det \Theta_{22}^{-1}(\zeta)| < 1$ $(|\zeta| < 1)$, так что (4.12) установлено и теорема доказана.

Полагая $\zeta = 0$ в (4.11) и (4.12), получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Пусть T $(\in[\mathfrak{H}])$ непрерывно обратимый оператор. Тогда, если $(I - T^*T)_+ \in \mathfrak{S}_1$, то*

$$\det_+^{1/2}(T^*T) = \prod_j |\alpha_j^+| \exp(-\operatorname{Var} \tau_T^+) \tag{4.17}$$

и, стало быть,

$$\det_+(T^*T) \leqslant \prod_j |\alpha_j^+|^2. \tag{4.18}$$

Аналогично, если $(I - T^*T)_- \in \mathfrak{S}_1$, *то*

$$\det\nolimits_-^{1/2}(T^*T) = \prod_j |\alpha_j^-| \exp(\operatorname{Var} \tau_T^-) \tag{4.19}$$

и, стало быть,

$$\det\nolimits_-(T^*T) \geqslant \prod_j |\alpha_j^-|^2. \tag{4.20}$$

2. Ниже будет выяснено, когда в (4.18) или (4.20) будет иметь место знак "$=$", т.е. $\tau_T^+ = 0$ или $\tau_T^- = 0$.

ЛЕММА 4.1. *Пусть T — непрерывно обратимый оператор из* $[\mathfrak{H}]$ *с* $(I - T^*T)_- \in \mathfrak{S}_1$ $((I - T^*T)_+ \in \mathfrak{S}_1)$, $\mathfrak{C}$ — *инвариантное подпространство для T и T^{-1}, такое, что сужение $T_1 = T|\mathfrak{C}$ — растяжение (сжатие). Тогда для того, чтобы*

$$\det\nolimits_-(T^*T) = \det(T_1^*T_1) \quad (\det\nolimits_+(T^*T) = \det(T_1^*T_1)), \tag{4.21}$$

необходимо и достаточно, чтобы подпространство $\mathfrak{C}^\perp = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{C}$ было инвариантным относительно T и сужение $T_2 = T|\mathfrak{C}^\perp$ было сжатием (растяжением).

Доказательство. Достаточность условий проверяется тривиальным образом. Докажем их необходимость в первом варианте (T_1 — растяжение); во втором (T_1 — сжатие) — рассуждения аналогичны.

Обозначим через $s_1^2(T) \geqslant s_2^2(T) \geqslant \ldots$ и $s_1^2(T_1) \geqslant s_2^2(T_1) \geqslant \ldots$ полные последовательности собственных чисел, больших единицы, соответственно оператора T^*T (или, что одно и то же, оператора $I + R_-^2$) и $T_1^*T_1$ $(\in[\mathfrak{C}])$. Не исключается, что одна из последовательностей (или обе) содержит конечное число элементов. Для нас существенно, что элементы этих последовательностей суть последовательные минимаксы отношений $(Tf, Tf)/(f,f)$ $(f \in \mathfrak{H})$ и $(T_1g, T_1g)/(g,g)$ $(g \in \mathfrak{C})$. Учитывая, что $(T_1g, T_1g) = (Tg, Tg)$ для $g \in \mathfrak{C}$, заключаем, что

$$s_j(T_1) \leqslant s_j(T) \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{4.22}$$

Отсюда, в частности, следует, что последовательность $\{s_j(T)\}$ содержит не меньше членов, чем последовательность $\{s_j(T_1)\}$.

Первое равенство (4.21) означает, что

$$\prod_j s_j^2(T) = \prod_j s_j^2(T_1).$$

В сопоставлении с (4.22) это дает

$$s_j(T_1) = s_j(T) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Числам s_j $(j = 1, 2, \ldots)$ отвечает ортонормированная система векторов $\varphi_j \in \mathfrak{C}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, такая, что

$$T^*T\varphi_j = T_1^*T_1\varphi_j = s_j^2\varphi_j \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{4.23}$$

Обозначим через $\mathfrak{C}_s$ — линейную замкнутую оболочку векторов φ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ и положим $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C} \ominus \mathfrak{C}_s$. Так как $T_1^*T_1$ — растяжение, то $\mathfrak{C}_0$ будет состоять из неподвижных векторов ψ этого оператора:

$$\mathfrak{C}_0 = \{\psi : T_1^*T_1\psi = \psi\}.$$

Но тогда

$$(\psi, \psi) = (T_1\psi, T_1\psi) = (T\psi, T\psi) = (T^*T\psi, \psi) \quad (\psi \in \mathfrak{C}_0),$$

откуда $PT^*T\psi = \psi$, где P — ортопоектор из $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{C}_0$.

Если найдется такое $\psi_0 \in \mathfrak{C}_0$, что $T^*T\psi_0 \neq \psi_0$, то будем иметь

$$\|T^*T\psi_0\| > \|\psi_0\|. \tag{4.24}$$

Рассмотрим подпространство $\mathfrak{C}_s^\perp = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{C}_s$. В силу (4.23) $T^*T\mathfrak{C}_s = \mathfrak{C}_s$. Так как T^*T — самосопряженный оператор, то также $T^*T\mathfrak{C}_s^\perp = \mathfrak{C}_s^\perp$. Самосопряженный оператор $W = T^*T \mid \mathfrak{C}_s^\perp$ отличается от единичного на ядерный, и, если верно (4.24), имеем $\|W\| > 1$, ибо $\psi_0 \in \mathfrak{C}_s^\perp$. Но тогда $s'^2 = \|W\| > 1$ будет собственным числом оператора W, отвечающим некоторому вектору $\chi \in \mathfrak{C}_s^\perp \setminus \{0\}$, так что $T^*T\chi = s'^2\chi$. Так как $s' > 1$ и $\chi \perp \varphi_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, то система $\{s_j^2(T)\}$ собственных чисел, больших единицы, оператора T^*T оказывается неполной, вопреки предположению.

Тем самым установлено, что $T^*T\psi = \psi$ $(\psi \in \mathfrak{C}_0)$.

Вспоминая (4.23), заключаем, что $T^*Tf = T_1^*T_1 f$ $(f \in \mathfrak{C})$ и, стало быть, $T^*\mathfrak{C} = T^*T\mathfrak{C} = T_1^*T_1\mathfrak{C} = \mathfrak{C}$. Отсюда уже следует, что $T\mathfrak{C}^\perp \subset \mathfrak{C}^\perp$. Так как оператор T по условию непрерывно обратим, то $T\mathfrak{C}^\perp = \mathfrak{C}^\perp$. Остается показать, что $T_2 = T \mid \mathfrak{C}^\perp$ — сжатие. Если бы $s'^2 = \|T_2\|^2 > 1$, то, рассуждая как и выше при доказательстве невозможности неравенства (4.24), мы покажем, что система больших единицы собственных чисел $\{s_j^2(T)\}$ оператора T^*T не является полной, вопреки предположению.

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии дополнить следствие 4.1 следующим предложением.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть T — непрерывно обратимый оператор из* $[\mathfrak{H}]$. *Если* $(I - T^*T)_+ \in \mathfrak{S}_1$ $((I - T^*T)_- \in \mathfrak{S}_1)$, *то равенство*

$$\det{}_+(T^*T) = \prod_j |\alpha_j^-(T)|^2 \quad (\det{}_-(T^*T) = \prod_j |\alpha_j^-(T)|^2) \tag{4.25}$$

имеет место в том и только том случае, когда $T\,|\,\mathfrak{E}_+(T)$ *сжатие* ($T\,|\,\mathfrak{E}_-(T)$ — *растяжение*) *и* $\mathfrak{E}_+^\perp(T) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{E}_+(T)$ $(\mathfrak{E}_-^\perp(T) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{E}_-(T))$ *инвариантно относительно T, причем* $T\,|\,\mathfrak{E}_+^\perp(T)$ — *растяжение* ($T\,|\,\mathfrak{E}_-^\perp(T)$ — *сжатие*).

Если $I - T^*T \in \mathfrak{S}_1$, *то оба равенства* (4.25) *имеют место одновременно в том и только том случае, когда $\mathfrak{H}$ распадается в прямую ортогональную сумму инвариантных относительно T подпространств*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_+(T) \oplus \mathfrak{E}_-(T) \oplus \mathfrak{H}_u,$$

причем сужения $T\,|\,\mathfrak{E}_+(T)$, $T\,|\,\mathfrak{E}_-(T)$ и $T\,|\,\mathfrak{H}_u$ *суть соответственно сжатие, растяжение и унитарный оператор.*

Доказательство. Положим $T_\pm = T\,|\,\mathfrak{E}_\pm(T)$. Очевидно, $\overline{T_\pm\mathfrak{E}_\pm} = \mathfrak{E}_\pm$ и так как по условию оператор T непрерывно обратим, то $T_\pm\mathfrak{E}_\pm = \mathfrak{E}_\pm$ и операторы $T_\pm$ непрерывно обратимы. Обозначим через $P_\pm$ ортопроекторы соответственно на $\mathfrak{E}_\pm$. Поскольку сопряженные операторы $T_\pm^*$ определяются равенствами $T_\pm^* = P_\pm T^*\,|\,\mathfrak{E}_\pm$, имеем $I_\pm - T_\pm^* T_\pm = P_\pm(I - T^*T)\,|\,\mathfrak{E}_\pm = P_\pm(I - T^*T)P_\pm\,|\,\mathfrak{E}_\pm$, так что

$$\|I_\pm - T_\pm^* T_\pm\|_1 = \|P_\pm(I - T^*T)P_\pm\|_1 \leqslant \|I - T^*T\|_1 < \infty.$$

Итак, $T_\pm$ суть непрерывно обратимые операторы с ядерным отклонением. К ним применимо 1.2°, в силу чего

$$\det(T_+^*T_+) = \prod_{|\alpha_j|<1} |\alpha_j(T)|^2, \quad \det(T_-^*T_-) = \prod_{|\alpha_j|>1} |\alpha_j(T)|^2. \tag{4.26}$$

С другой стороны, имеем

$$\det{}_+(T^*T) \leqslant \det{}_+(T_+^*T_+) \leqslant \det(T_+^*T_+).$$

Поэтому, если имеет место первое соотношение (4.25), то

$$\det{}_+(T^*T) = \det{}_+(T_+^*T_+) = \det(T_+^*T_+). \tag{4.27}$$

Из второго равенства следует, что T_+ сжатие (вполне неунитарное, если учесть (4.26)).

После этого из первого равенства (4.27) на основании леммы 4.1 вытекает первое утверждение теоремы.

Аналогично показывается, что если имеет место второе равенство (4.25), то

$$\det_-(T^*T) = \det_-(T_-^*T_-) = \det(T_-^*T_-),$$

откуда заключаем, что в этом случае T_- — вполне неунитарное растяжение, и с помощью леммы 4.1 устанавливаем справедливость второго варианта первого утверждения теоремы.

Если имеют место оба равенства (4.25), то, согласно первому утверждению, операторы $T_\pm$ суть соответственно сжатие и растяжение, $\mathfrak{E}_\pm \subset \mathfrak{E}_\mp^\perp$, так что $\mathfrak{E}_+ \perp \mathfrak{E}_-$. Положим $\mathfrak{H}_u = \mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{E}_+ \oplus \mathfrak{E}_-)$, тогда $\mathfrak{E}_+ \oplus \mathfrak{H}_u$ и $\mathfrak{E}_- \oplus \mathfrak{H}_u$ инвариантны относительно T и в первом пространстве T индуцирует сжатие, а во втором — растяжение. Но тогда $\mathfrak{H}_u = (\mathfrak{E}_+ \oplus \mathfrak{H}_u) \cap (\mathfrak{E}_- \oplus \mathfrak{H}_u)$ инвариантно относительно T, и T индуцирует в $\mathfrak{H}$ оператор T_u, который одновременно является сжатием и растяжением. Так как, кроме того, T_u непрерывно обратимый оператор (вместе с операторами T, $T_\pm$), то T_u — унитарный оператор.

Теорема доказана.

5. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВОЗМУЩЕНИЯ $\Delta_T(\zeta)$ И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ФОРМУЛА СЛЕДОВ

1. Из теоремы 4.1 легко получается

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть T непрерывно обратимый оператор с ядерным отклонением.*

Тогда при $\zeta \overline{\in} \sigma(T^{*-1})$, $|\zeta| < 1$

$$\Delta_T(\zeta) = \det{}^{1/2}(T^*T)B_T(\zeta)\exp\left(-\oint \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\, d\tau_T(\theta)\right), \tag{5.1}$$

где τ_T — некоторая вещественная мера на единичной окружности.

Мера τ_T равна нулю внутри всякой открытой дуги γ_T единичной окружности, не содержащей точек спектра оператора T.

Кроме того, имеет место оценка:

$$\operatorname{Var}\tau_T \leqslant \frac{1}{2}\ln\Big(\prod_{|\alpha_j|<1}|\alpha_j(T)|^2/\det{}_+(T^*T)\Big) + \frac{1}{2}\ln\Big(\det{}_-(T^*T)/\prod_{|\alpha_j|>1}|\alpha_j(T)|^2\Big). \tag{5.2}$$

Для любой функции $\Psi(\zeta)$, локально голоморфной в некоторой окрестности объединения спектров $\Sigma_T := \sigma(T) \cup \sigma(T^{*-1})$, оператор $\Psi(T) - \Psi(T^{*-1}) \in \mathfrak{S}_1$ и имеет место формула следов

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sp}\{\Psi(T) - \Psi(T^{*-1})\} &= \sum_j \{\Psi(\alpha_j) - \Psi(\bar{\alpha}_j^{-1})\} + \\
&+ \frac{2}{\mathrm{i}} \oint \frac{\mathrm{d}\Psi(e^{\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{d}\theta} \mathrm{d}\tau_T(\theta),
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

где $\{\alpha_j\} = \{\alpha_j(T)\}$ — полная последовательность неунитарного спектра оператора T.

Доказательство. Так как по условию $I - T^*T \in \mathfrak{S}_1$, то $(I - T^*T)_\pm \in \mathfrak{S}_1$ и, стало быть, имеют место представления (4.11) и (4.12). Поскольку $\Delta_T(\zeta) := \Delta_{T/T^{*-1}}(\zeta)$, а $\det(T^*T) = \det_+(T^*T)\det_-(T^*T)$, почленное деление равенства (4.11) на (4.12) дает (5.1) с

$$\tau_T = \tau_T^+ - \tau_T^- .$$

Из (4.17) и (4.18) следует:

$$\frac{1}{2}\ln[\prod |\alpha_j^+(T)|^2/\det_+(T^*T)] = \operatorname{Var}\tau_T^+,$$

$$\frac{1}{2}\ln[\det_-(T^*T)/\prod |\alpha_j^+(T)|^2] = \operatorname{Var}\tau_T^-,$$

и поскольку $\operatorname{Var}\tau_T \leqslant \operatorname{Var}\tau_T^+ + \operatorname{Var}\tau_T^-$, отсюда уже следует оценка (5.2).

Второе утверждение теоремы доказывается дословно так же, как и доказанная первая часть (достаточная) теоремы 2.1.

Формула следов (5.3) является непосредственным обобщением формулы следов (2.3) для сжатий. После того, как установлено представление (5.1) (обобщающее представление (2.2)), вывод формулы следов (5.1) ничем не отличается от вывода формулы (2.3).

Теорема доказана.

2. Представлением (5.1) однозначно определяется вещественная (регулярная) мера τ_T на единичной окружности.

Естественно возникает вопрос, определяется ли мера τ_T формулой следов (5.3), т.е. тем, что для нее справедливо равенство (5.3) при любой функции $\Psi \in F(T, T^{*-1})$?

Вообще говоря, ответ отрицательный.

Пусть τ — какая-либо вещественная мера, которой можно заменить меру τ_T в (5.3) с тем, чтобы эта формула осталась справедливой для всех $\Psi \in F(T, T^{*-1})$. Тогда при $\Psi(\lambda) = (\lambda - \zeta)^{-1} \in F(T, T^{*-1})$ ($\zeta \bar{\in} \sigma(T) \cup \sigma(T^{*-1})$) эта формула даст

$$\mathrm{sp}\{(T - \zeta I)^{-1} - (T^{*-1} - \zeta I)^{-1}\} =$$

(5.4)
$$= \sum_j \left(\frac{1}{\alpha_j - \zeta} - \frac{1}{\frac{1}{\bar{\alpha}_j} - \zeta} \right) + \oint \frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - \zeta)^2} d\tau(\theta).$$

Напомним (см. §2), что эта формула при $\tau = \tau_T$ получается из (5.1) путем взятия логарифмической производной от обеих частей этого равенства. Проделав обратные операции, мы из равенства (5.4) при $\tau = \tau_T$ получим выражение для $\Delta_T(\zeta)$ с точностью до постоянного множителя.

С другой стороны, именно из формулы (5.4) (ср. §2) была получена формула следов (5.3). Отметим еще, что формула (5.4) в свою очередь эквивалентна последовательности равенств, получаемых из формулы следов при $\Psi(\zeta) = \zeta^k$ ($k = 1, 2, \ldots$), а именно:

$$\mathrm{sp}(T - T^{*-k}) = \sum_j \{\alpha_j^k - \bar{\alpha}_j^{-k}\} + 2\oint e^{ik\theta} d\tau(\theta) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Этими равенствами вещественная мера τ определяется единственным образом с точностью до слагаемого, кратного лебеговой мере, так что

(5.5)
$$d\tau(\theta) = d\tau_T(\theta) + a d\theta,$$

где a — произвольное вещественное число.

Рассмотрим два случая:

1) на единичной окружности имеется открытая дуга γ, свободная от точек спектра $\sigma(T)$;

2) вся единичная окружность входит в спектр $\sigma(T)$.

В первом случае функция $\Psi_0(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{-1}$, где $\zeta_0 \in \gamma$, входит в класс $F(T, T^{*-1})$, вместе с тем, интеграл, стоящий в правой части (5.3) с заменой τ_T на τ, не будет иметь смысла, если $d\tau$ имеет вид (5.5) с $a \neq 0$.

Таким образом, в этом случае мера τ определяется единственным образом формулой следов: $\tau = \tau_T$.

Во втором случае всякая функция $\Psi \in F(T, T^{*-1})$ голоморфна в некотором кольце, содержащем единичную окружность, и интеграл из (5.3) (с заменой τ_T на τ) будет иметь вид

$$\oint \frac{d\Psi(e^{i\theta})}{d\theta}\, d\tau(\theta) = \oint \frac{d\Psi(e^{i\theta})}{d\theta}\, d\tau_T(\theta) + a \oint \frac{d\Psi(e^{i\theta})}{d\theta}\, d\theta = \oint \frac{d\Psi(e^{i\theta})}{d\theta}\, d\tau_T(\theta)$$

при любом $a \in (-\infty, \infty)$.

Таким образом, во втором случае общий вид вещественной меры τ, годной для формулы следов, задается формулой (5.5).

Во всех случаях мера τ из формулы следов будет определяться единственным образом, если добавить требование:

$$\det{}^{1/2}(T^*T) = \prod_j |\alpha_j| \exp\left(-\oint d\tau_T(\theta)\right).$$

К изложенному выше, пожалуй, стоит добавить следующие замечания.

Пусть $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система в $\mathfrak{H}$, c — некоторое комплексное число $\neq 0$. Этим данным соответствует оператор $S_c \in [\mathfrak{H}]$, определяемый равенствами

$$S_c\varphi_j = \begin{cases} \varphi_{j+1} & (j = \pm 1, \pm 2, \ldots) \\ c\varphi_1 & (j = 0) \end{cases}.$$

При $|c| = 1$ оператор S_c унитарен и этот случай не представляет для нас интереса. При $|c| < 1$ ($|c| > 1$) оператор S_c будет сжатием (растяжением).

Простые вычисления показывают, что

$$(S_c - \zeta I)(S_c^{*-1} - \zeta I)^{-1} = I - (1 - |c|^2)(\cdot, \varphi_0)(I - \zeta S_c^*)^{-1}\varphi_0,$$

а следовательно,

$$\Delta_{S_c}(\zeta) = 1 - (1 - |c|^2)(\varphi_0, (I - \bar\zeta S_c)^{-1}\varphi_0).$$

При $|\zeta| < 1$

$$(I - \bar\zeta S_c)^{-1}\varphi_0 = \varphi_0 + \sum_1^\infty \bar\zeta^k S_c^k\varphi_0 = \varphi_0 + c\sum_1^\infty \bar\zeta^k \varphi_k,$$

так что

$$\Delta_{S_c}(\zeta) = |c|^2, \quad \det(S_c^* S_c) = \Delta_{S_c}(0) = |c|^2 \quad (|\zeta| < 1).$$

Таким образом, представление (5.1) для Δ_{S_c} принимает вид

$$\Delta_{S_c}(\zeta) = |c| \exp\left(-\oint \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} \, d\theta\right),$$

где $a = -\dfrac{1}{2\pi} \ln |c|$, и, стало быть, $d\tau_{S_c}(\theta) = a\, d\theta$.

Легко видеть, что если $T_k \in [\mathfrak{H}_k]_1$ $(k = 1, 2)$, где $\mathfrak{H}_k$ $(k = 1, 2)$ — некоторые гильбертовы пространства, то оператор $T = T_1 \oplus T_2 \in [\mathfrak{H}]_1$ $(\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$; при этом $\Delta_T(\zeta) = \Delta_{T_1}(\zeta)\Delta_{T_2}(\zeta)$ $(|\zeta| < 1)$ (см. лемму 6.1) и, следовательно, $d\tau_T = d\tau_{T_1} + d\tau_{T_2}$.

Поэтому, если ортогонально добавить к оператору $T \in [\mathfrak{H}]_1$ оператор $S_c \in [\mathfrak{H}_1]_1$, то получим оператор $T' = T \oplus S_c \in [\mathfrak{H}']_1$ $(\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_1)$, для которого $d\tau_{T'} = d\tau_T + a d\theta$. При этом за счет выбора c (даже положительного) можно добиться того, чтобы $a = -\dfrac{\ln|c|}{2\pi}$ имело любое вещественное значение. Таким образом, мы получили операторную интерпретацию равенства (5.5).

Отметим еще, что два оператора S_{c_1} и S_{c_2} унитарно эквивалентны точно тогда, когда $|c_1| = |c_2|$. Достаточность условия тривиально проверяется, а его необходимость следует из того, что унитарно эквивалентные операторы должны иметь равные определители возмущения.

Любопытно, что всякие два оператора S_{c_1} и S_{c_2} $(c_1, c_2 \neq 0)$ подобны, т.е. найдется непрерывно обратимое $W \in [\mathfrak{H}]$ такое, что $W^{-1} S_{c_1} W = S_{c_2}$; в частности, всякое сжатие S_{c_1} $(0 < |c_1| < 1)$ подобно всякому растяжению S_{c_2} $(|c_2| > 1)$.

Проверка этого предоставляется читателю.

6. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ $\Delta_T(\zeta)$

1. Пусть $T \in [\mathfrak{H}]_1$ и $\mathfrak{C}$ — инвариантное для T и T^{-1} подпространство, т.е. $T\mathfrak{C} = \mathfrak{C}$. Тогда соответственно разложению

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C}^\perp$$

оператор T допускает треугольное представление

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

где, в частности, $T_1 = T|\mathfrak{C}$, $T_2 = P^\perp T|\mathfrak{C}^\perp$ ($P^\perp$ — ортопроектор на $\mathfrak{C}^\perp$).

Так как по условию операторы T и T_1 непрерывно обратимы, то как нетрудно видеть, и оператор T_2 — непрерывно обратим. Легко видеть, что $T_2^* = T^*|\mathfrak{C}^\perp$.

Из представления (6.1) следует

$$I - T^*T = \begin{bmatrix} I_1 - T_1^*T_1 & -T_1^*T_{12} \\ -T_{12}^*T_1 & I_2 - T_2^*T_2 - T_{12}^*T_{12} \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

Так как оператор $I - T^*T$ ядерный, то все элементы матрицы — ядерные операторы. Поскольку оператор T_1 непрерывно обратим, из ядерности $I_1 - T_1^*T_1$ следует, что $T_1 \in [\mathfrak{C}]_1$, а из $T_1^*T_{12} \in \mathfrak{S}_1$ следует $T_{12} \in \mathfrak{S}_1$, $T_{12}^*T_{12} \in \mathfrak{S}_1$. После этого из ядерности нижнего углового элемента матрицы (6 2) следует ядерность оператора $I_2 - T_2^*T_2$, так что $T_2 \in [\mathfrak{C}^\perp]_1$.

Согласно лемме 3.2 из [7] (стр. 286) можно также утверждать, что

$$\det(T^*T) = \det(T_1^*T_1)\det(T_2^*T_2). \tag{6.3}$$

ЛЕММА 6.1. *Пусть $\mathfrak{C}$ — инвариантное подпространство для $T \in [\mathfrak{H}]_1$, и, более того, $T\mathfrak{C} = \mathfrak{C}$. Тогда*

$$\Delta_T(\zeta) = \Delta_{T_1}(\zeta)\Delta_{T_2}(\zeta) \quad (|\zeta| < 1), \tag{6.4}$$

где $T_1 = T|\mathfrak{C}$, $T_2^* = T^*|\mathfrak{C}^\perp$ ($\mathfrak{C}^\perp = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{C}$).

Поэтому

$$B_T(\zeta) = B_{T_1}(\zeta)B_{T_2}(\zeta), \quad \tau_T = \tau_{T_1} + \tau_{T_2}. \tag{6.5}$$

Доказательство. При $\zeta = 0$ все три определителя в (6.4) положительны. Поэтому остается доказать, что

$$|\Delta_T(\zeta)| = |\Delta_{T_1}(\zeta)|\,|\Delta_{T_2}(\zeta)| \quad (|\zeta| < 1). \tag{6.6}$$

По аналогии с равенством $T_\zeta = (T - \zeta I)(I - \bar\zeta T)^{-1}$ положим

$$T_{k;\zeta} = (T_k - \zeta I)(I_k - \bar\zeta T_k)^{-1} \quad (k = 1,2);$$

тогда на основании (6.3) и тождества (1.10) можно будет утверждать, что равенство (6.6) эквивалентно следующему

$$\det(T_\zeta^* T_\zeta) = \det(T_{1;\zeta}^* T_{1;\zeta}) \det(T_{2;\zeta}^* T_{2;\zeta}). \tag{6.7}$$

С другой стороны, из представления (6.1) для T, как легко видеть, вытекает аналогичное представление для T_ζ, а именно:

$$T_\zeta = \begin{bmatrix} T_{1;\zeta} & * \\ 0 & T_{2;\zeta} \end{bmatrix}.$$

Поэтому равенство (6.7) выражает то же, что и (6.3) при замене T на T_ζ.

Если в равенстве (6.4) мы представим определитель $\Delta_T(\zeta)$ по формуле (5.1) и каждый из определителей $\Delta_{T_k}(\zeta)$ $(k = 1,2)$ по этой формуле, заменяя T на T_k $(k = 1,2)$ и учтем (6.3), то получим соотношения (6.5).

2. Если $\mathfrak{E}(T) \neq \{0\}$, то в качестве $\mathfrak{C}$ можно, в частности, взять $\mathfrak{E}(T)$. В самом деле, T отображает $\mathfrak{E}(T)$ в его плотную часть, а так как оператор T непрерывно обратим, то $T\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{E}(T)$.

Для $\mathfrak{C} = \mathfrak{E}(T)$ треугольное представление (6.1) будем записывать в виде:

$$T = \begin{bmatrix} T_{\mathrm{d}} & T_{12} \\ 0 & T_{\mathrm{u}} \end{bmatrix}, \tag{6.8}$$

где, таким образом,

$$T_{\mathrm{d}} = T|\mathfrak{E}(T), \quad T_{\mathrm{u}} = (I - \mathscr{P}_T)T|\mathfrak{H}_{\mathrm{u}};$$

при этом $\mathscr{P}_T$ есть ортопроектор на $\mathfrak{E}(T)$, $\mathfrak{H}_{\mathrm{u}} = (I - \mathscr{P}_T)\mathfrak{H} = \mathfrak{E}^{\perp}(T)$.

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть* $T \in [\mathfrak{H}]_1$. *Тогда*

$$\Delta_T(\zeta) = \Delta_{T_{\mathrm{d}}}(\zeta)\Delta_{T_{\mathrm{u}}}(\zeta), \tag{6.9}$$

причем

$$\Delta_{T_{\mathrm{d}}}(\zeta) = \sqrt{\det(T_{\mathrm{d}}^* T_{\mathrm{d}})}\, B_T(\zeta), \tag{6.10}$$

$$\Delta_{T_{\mathrm{u}}}(\zeta) = \sqrt{\det(T_{\mathrm{u}}^* T_{\mathrm{u}})} \exp\left(- \oint \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta}\, d\tau_T(\theta) \right). \tag{6.11}$$

Кроме того,

$$\det(T_{\mathrm{d}}^* T_{\mathrm{d}}) = \prod_j |\alpha_j(T)|^2, \quad \det(T_{\mathrm{u}}^* T_{\mathrm{u}}) = \det(T^* T)/\prod_j |\alpha_j(T)|^2. \tag{6.12}$$

Доказательство. Равенство (6.9) имеет место согласно лемме 6.1, а равенство (6.10) согласно лемме 1.1.

Из (6.9), (6.10) и (5.1), а также того, что

$$\det(T^* T) = \det(T_{\mathrm{d}}^* T_{\mathrm{d}}) \det(T_{\mathrm{u}}^* T_{\mathrm{u}}), \tag{6.13}$$

следует (6.11). Из равенства (6.10) при $\zeta = 0$ вытекает первое соотношение (6.12), а второе уже следует из него и (6.13).

Теорема доказана.

Таким образом, шпур-мера $\tau_T = \tau_{T_{\mathrm{u}}}$.

3. Дальнейшие рассуждения будем вести для оператора $T \in [\mathfrak{H}]_1$ с унитарным спектром. Если некоторый оператор $T \in [\mathfrak{H}]_1$ не удовлетворяет этому условию, то все наши рассуждения будут применимы к его "компоненте" T_{u}.

Если спектр T $(\in [\mathfrak{H}]_1)$ унитарен, то имеет место оценка для его резольвенты

$$\ln \|(T - \zeta I)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{1 - |\zeta|}\right) \quad (|\zeta| \to 1).$$

Для сжатия $T \in [\mathfrak{H}]_1$ вывод этой оценки имеется, например, в [8] (Дополнение, теорема 3.3). Этот вывод легко переносится на общий случай $T \in [\mathfrak{H}]_1$.

Указанная оценка на основании известных результатов ([19] и др.) позволяет, в частности, утверждать следующее:

Пусть l — некоторая замкнутая дуга единичной окружности Γ. Тогда у $T \in [\mathfrak{H}]_1$ найдется максимальное инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_l$ со свойствами:

1) $T\mathfrak{H}_l = \mathfrak{H}_l$,

2) спектр $\sigma(T|\mathfrak{H}_l) \subset l$,

3) спектр $\sigma(P_l^{\perp} T|\mathfrak{H}_l^{\perp}) \subset l'$, где l' — дополнительная к l замкнутая дуга единичной окружности $\Gamma: l' = \Gamma \setminus l$, а $P_l^{\perp}$ ортопроектор на $\mathfrak{H}_l^{\perp} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_l$.

Положим $T_l = T|\mathfrak{H}_l$; тогда разложению $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_l \oplus \mathfrak{H}_l^{\perp}$ будет соответствовать треугольное представление

$$T = \begin{bmatrix} T_l & * \\ 0 & T_l' \end{bmatrix}, \tag{6.14}$$

где $T_l' = P_l^{\perp} T^* | \mathfrak{H}_l^{\perp}$. Таким образом, в силу 3) будем иметь $\sigma(T_l') \subset l'$.

Согласно лемме 6.1

$$\tau_T = \tau_{T_l} + \tau_{T'_l}. \tag{6.15}$$

Так как все внутренние точки дуги l (l') суть регулярные точки для оператора T'_l (T_l), то вся мера τ_{T_l} сосредоточена на дуге l, а мера $\tau_{T'_l}$ — на дуге l'.

Предположим теперь, что T ($\in [\mathfrak{H}]_1$) — сжатие. Тогда меры τ_T, τ_{T_l} и $\tau_{T'_l}$ — неотрицательны. Примем еще, что концы дуги l суть точки непрерывности меры τ_T (эти концы не несут сосредоточенных масс распределения τ_T). Тогда в силу (6.15) концы дуги l будут точками непрерывности и слагаемых мер, и мы будем иметь

$$\tau_T(l) = \tau_{T_l}(l) = \operatorname{Var}\tau_{T_l}.$$

С другой стороны, величина $\operatorname{Var}\tau_{T_l}$ может быть получена из формулы (2.6), если в ней заменить T на T_l. В результате получим

$$\tau_T(l) = -\frac{1}{2}\ln\det(T_l^*T_l) = -\frac{1}{2}\ln\det(P_lT^*T|P_l\mathfrak{H}),$$

или в эквивалентной форме:

$$\tau_T(l) = -\frac{1}{2}\ln\det(I - P_l(I - T^*T)P_l). \tag{6.16}$$

Здесь P_l обозначает ортопроектор на $\mathfrak{H}_l$ и учтено, что

$$TP_l = P_lTP_l, \quad P_lT^*TP_l = (P_lTP_l)^*(P_lTP_l).$$

При выводе формулы (6.16) мы предполагали, что концы дуги l суть точки непрерывности меры τ_T. Но коль скоро формула (6.16) установлена для этого случая, то отсюда следует ее справедливость в общем случае — любой замкнутой дуги l. Это можно получить предельным переходом, рассматривая дугу l как пересечение последовательности дуг $l_1 > l_2 > \ldots$ с концами, которые являются точками непрерывности меры τ_T.

4. Теперь мы можем уточнить второе утверждение теоремы 2.1.

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ 2.1. *Мера τ_T сжатия $T \in [\mathfrak{H}]_1$ равна нулю внутри некоторой дуги единичной окружности в том (а если T — вполне неунитарное сжатие, — только том) случае, когда дуга l не содержит точек спектра $\sigma(T_u)$.*

Доказательство. Так как согласно теореме 6.2 (см. формулу (6.11)) $\tau_T = \tau_{T_u}$, то нам остается доказать (учитывая второе утверждение теоремы 2.1), что если T — вполне неунитарное сжатие с унитарным спектром и некоторая открытая дуга l содержит точки спектра $\sigma(T)$, то $\tau_T(l) > 0$. Без ограничения общности можно считать, что концы дуги l суть точки непрерывности неотрицательной меры τ_T, иначе мы заменили бы дугу l меньшей дугой $l_1 \subset l$, уже удовлетворяющей этому условию и содержащей по-прежнему точки спектра $\sigma(T)$.

Но тогда согласно (6.16)

$$\tau_T(l) = -\frac{1}{2}\ln\det(I - H_l), \tag{6.17}$$

где $H_l = P_l(I - T^*T)P_l$. Очевидно, $0 \leqslant H_l \leqslant P_l$. Если $H_l \neq 0$, то $0 < \det(I - H_l) < 1$, ибо

$$\det(I - H_l) = \prod_j (1 - \lambda_j(H_l)),$$

где $\lambda_1(H_l) \geqslant \lambda_2(H_l) \geqslant \ldots$ суть последовательные ненулевые собственные числа (<1) ядерного оператора H_l. Таким образом, в этом случае $\tau_T(l) > 0$.

Если же $H_l = 0$, то $(P_lTP_l)^*(P_lTP_l) = P_lT^*TP_l = P_l$, так что сужение $T_l = P_lT|P_l\mathfrak{H}$ полуунитарно: $T_l^*T_l = I_l$. С другой стороны, по построению $\sigma(T_l) \subset l$ и, стало быть, оператор T_l непрерывно обратим. Таким образом, оператор T_l унитарен. Последнее противоречит условию полной неунитарности оператора T.

Дополнение доказано.

Очевидно, унитарный спектр оператора T ($\in[\mathfrak{H}]_1$) состоит из $\sigma(T_u)$ и множества всех предельных точек для неунитарных собственных чисел оператора T. Отсюда явствует, что Дополнение усиливает теорему 2.1.

5. Мера τ_T для T ($\in [\mathfrak{H}]_1$), не являющегося сжатием или растяжением, очень слабо характеризует спектр оператора. Легко видеть, что всегда $\tau_T = -\tau_{T^{*-1}}$. Поэтому, если оператор T допускает треугольное представление (6.1), в котором оператор T_2 унитарно эквивалентен T_1^{*-1}, то $\tau_T = 0$, и в этом случае, вообще говоря, ничего нельзя сказать о спектре оператора T, исходя из меры τ_T.

Справедливость формулы (6.15) была установлена для любого $T \in [\mathfrak{H}]_1$. Однако, дальнейшие рассуждения не проходят в общем случае. В самом деле, если l дуга единичной окружности, концы которой суть точки непрерывности меры τ_T, то в общем случае нельзя уже утверждать, что эти концы будут точками непрерывности для мер τ_{T_l} и $\tau_{T_l'}$ (хотя бы на основании примера T с $\tau_T = 0$).

Вместе с тем, автором совместно с В. М. Бродским было показно, что формула (6.16) для любого $T \in [\mathfrak{H}]_1$. Это вытекает из соотношения

$$\Delta_T(\zeta) = \det(T^*T)\det\Theta_T(\zeta), \tag{6.18}$$

и мультипликативного представления характеристической функции $\Theta_T(\zeta)$, полученного в [4] (см. теорему 6.2; в этой работе были допущены некоторые неточности, исправленные в [2]).

Соотношение (6.18) устанавливается совсем легко. В самом деле, согласно определению (4.3)

$$\det\Theta_T(\zeta) = \det(JK)^{-1}\det[I_{\mathfrak{G}} - JR(I - \zeta T^*)^{-1}R^*].$$

Первый определитель из правой части существует, так как согласно (4.6)

$$JK = [P_+(T^*T)P_+ + P_-(T^*T)P_-]|\mathfrak{G} = T^*T|\mathfrak{G},$$

$$\det(JK)^{-1} = \det(T^*T)^{-1}.$$

Второй определитель из правой части согласно (4.1) равен

$$\det[I - R^*JR(I - \zeta T^*)^{-1}] = \det[I - (I - T^*T)(I - \zeta T^*)^{-1}] =$$

$$= \det[T^*(T - \zeta I)(I - \zeta T^*)^{-1}] = \Delta_T(\zeta).$$

Поэтому имеет место (6.18).

Мультипликативное представление функции $\Theta_T(\zeta)$ записывается весьма сложно и в этой статье мы прибегать к нему не будем.

Отметим, что формула (6.16) для сжатия $T \in [\mathfrak{H}]_1$ была впервые приведена в докладе [16].

7. ФОРМУЛА СЛЕДОВ ДЛЯ ОПЕРАТОРА T, ПОДОБНОГО УНИТАРНОМУ

1. Согласно известной теореме Б. С.-Надя оператор $T \in [\mathfrak{H}]$ подобен унитарному в том и только том случае, когда он непрерывно обратим и

$$M_T := \sup\{\|T^n\|,\ n = 0, \pm 1, \ldots\} < \infty. \tag{7.1}$$

Если выполняется это условие и, кроме того, $T^{*-1} - T \in \mathfrak{S}_1$, то из тождества

$$T_1^n - T_2^n = \sum_{k=1}^{n} T_1^{n-k}(T_1 - T_2)T_2^{k-1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7.2}$$

при $T_1 = T$, $T_2 = T^{*-1}$ вытекает, что

$$\|T^n - T^{*-n}\|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|T^{n-k}\| \|T - T^{*-1}\|_1 \|T^{*-k+1}\| \leqslant nM_T\|T - T^{*-1}\|_1.$$

Если мы положим в (7.2): $T_1 = T^{-1}$, $T_2 = T^*$, то убедимся, что оценка

$$\|T^n - T^{*-n}\|_1 \leqslant |n| M_T \|T - T^{*-1}\|_1 \tag{7.3}$$

справедлива при всех целых n (при $n = 0$ она тривиальна).

Если оператор $T(\in[\mathfrak{H}])$ подобен унитарному оператору, то, очевидно, его спектр $\sigma(T)$ лежит на единичной окружности, и он непрерывно обратим.

Обозначим через W_1 класс функций $\Psi(\zeta)$ на единичной окружности $|\zeta| = 1$, допускающих разложение

$$\Psi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \zeta^n, \quad \text{где} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n|C_n| < \infty. \tag{7.4}$$

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть оператор T, имеющий ядерное отклонение, подобен унитарному; тогда для любой функции $\Psi \in W_1$ справедливы включение $\Psi(T) - \Psi(T^{*-1}) \in \mathfrak{S}_1$ и формула*

$$\operatorname{sp}\{\Psi(T) - \Psi(T^{*-1})\} = \frac{2}{i} \oint \Psi'(e^{i\theta}) d\tau_T(\theta). \tag{7.5}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что операторы $\Psi(T)$ и $\Psi(T^{*-1})$ имеют смысл в силу (7.4). В силу оценки (7.3)

$$\|\Psi(T) - \Psi(T^{*-1})\|_1 \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n| \, \|T^n - T^{*-n}\|_1 \leqslant M_T \sum_{-\infty}^{\infty} |n| \, |C_n| \, \|T - T^{*-1}\|_1 < \infty$$

и имеет смысл левая часть (7.5).

Если мы заменим в формуле (7.5) функцию Ψ ее отрезком ряда Фурье

$$\Psi_N = \sum_{n=-N}^{N} C_n \zeta^n \quad (N = 1, 2, \ldots),$$

то получим правильное равенство в силу последнего утверждения теоремы 5.1 (оператор $T \in [\mathfrak{H}]_1$).

Оценка (7.3), вместе с условием (7.4), позволяет тривиальным образом получить равенство (7.5) для любой функции $\Psi \in W_1$ путем предельного перехода при $N \to \infty$.

Теорема 7.1 похожа по содержанию и доказательству на теорему 2 из [14].

2. В докладе [16] был указан следующий признак подобия сжатия T унитарному оператору.

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть T — сжатие с ядерным отклонением и без спектра внутри единичного круга. Тогда для того, чтобы оператор T был подобен некоторому унитарному оператору, достаточно, а если* $\dim[(I - T^*T)\mathfrak{H}] < \infty$, *и необходимо, чтобы мера τ_T была липшицевой, т.е. при некотором L (>0) удовлетворяла условию:*

(7.6)
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}\tau_T(\theta) \leqslant L(\theta_1 - \theta_2) \quad (0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi).$$

Доказательство. В самом деле, при выполнении этого условия, полагая $\mathrm{d}_T(\zeta) = \det^{-\frac{1}{2}}(T^*T)\Delta_T(\zeta)$, согласно (2.2) будем иметь

(7.7)
$$|d_T(\zeta)^{-1}| = \exp\left\{\oint \mathrm{Re}\frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta}\,\mathrm{d}\tau_T(\theta)\right\} \leqslant \exp(2\pi L) \qquad (|\zeta| < 1).$$

С другой стороны, согласно (1.9):

$$|d_T(\zeta)|^{-2} = \det(T_\zeta^{*-1}T_\zeta^{-1}) = \prod_{j=1}^{\infty} s_j^2(T_\zeta^{-1}) \geqslant s_1^2(T_\zeta^{-1}) = \|T_\zeta^{-1}\|^2$$

(здесь мы использовали, что T_ζ^{-1} $(|\zeta| < 1)$ есть растяжение и, следовательно, все его s-числа $\geqslant 1$).

Так как $T_\zeta^{-1} = (T - \zeta I)^{-1}(I - \bar\zeta T)$, то получаем:

(7.8)
$$\exp(2\pi L) \geqslant \|(I - \bar\zeta T)(T - \zeta I)^{-1}\| = \|-\bar\zeta I + (1 - |\zeta|^2)(T - \zeta I)^{-1}\| \geqslant$$
$$\geqslant (1 - |\zeta|^2)\|(T - \zeta I)^{-1}\| - 1 \qquad (|\zeta| < 1).$$

Таким образом

(7.9)
$$\sup_{|\zeta|<1}(1 - |\zeta|)\|(T - \zeta I)^{-1}\| < \infty,$$

а это соотношение является необходимым и достаточным условием подобия сжатия T унитарному оператору (см. [9], с. 44 или [25], с. 382; в статье [30] дано простое, не использующее теории характеристических функций, доказательство этого предложения).

Если $N = \dim(I - T^*T)\mathfrak{H} < \infty$, то согласно (1.11) $(I - T_\zeta^* T_\zeta)\mathfrak{H}$ имеет размерность, равную N; но тогда такую же размерность будет иметь и $(T_\zeta^{*-1}T_\zeta^{-1} - I)\mathfrak{H} = T_\zeta^{*-1}(I - T_\zeta^* T_\zeta)T_\zeta^{-1}\mathfrak{H}$. Поэтому у оператора T_ζ^{-1} будет не более, чем N s-чисел, больших единицы $(s_1(T_\zeta^{-1}) \geqslant s_2(T_\zeta^{-1}) \geqslant \ldots \geqslant s_N(T_\zeta^{-1}))$;

а остальные s-числа будут равны единице, так что

$$\det(T_\zeta^{*-1}T_\zeta^{-1}) = \prod_1^N s_j(T_\zeta^{-1}) \leqslant s_1^N(T_\zeta^{-1}) = \|T_\zeta^{-1}\|^N.$$

С другой стороны, если оператор T подобен унитарному, то имеет место (7.9) и, стало быть, согласно среднему равенству в (7.8): $\sup\{\|T_\zeta^{-1}\|, |\zeta| < 1\} < \infty$.

Таким образом, $M := \sup\{|d_T(\zeta)|^{-1}, |\zeta| < 1\} < \infty$, а это в силу равенства (7.7) влечет липшицевость меры τ_T с константой $L = \frac{1}{2\pi}\ln M$.

Теорема доказана.

3. Пусть некоторый оператор $T(\in[\mathfrak{H}]_1)$ распадается в ортогональную сумму операторов $T_k = [\mathfrak{H}_k]_1$ $(k = 1, 2)$: $T = T_1 \oplus T_2$ $(\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$, причем оператор T_2 унитарно эквивалентен оператору T_1^{-1}. Тогда $\tau_{T_2} = -\tau_{T_1}$ и $\tau_T = \tau_{T_1} + \tau_{T_2} = 0$. Этот пример показывает, что по τ_T, если $T(\in[\mathfrak{H}]_1)$ не является сжатием или растяжением, никак нельзя судить, подобен или нет данный оператор T некоторому унитарному оператору.

Иначе обстоит дело, если мы привлечем к рассмотрению меры $\tau_T^\pm$. Опираясь на установленный Л. А. Сахновичем [23] признак линейного подобия непрерывно обратимого оператора T некоторому унитарному оператору, можно доказать следующее предложение:

ТЕОРЕМА 7.3. *Если у данного оператора $T(\in[\mathfrak{H}]_1)$ (с унитарным спектром) обе меры $\tau_T^\pm$ липшицевы, то этот оператор подобен унитарному.*

Мы опускаем доказательство теоремы. Однако поясним, что условие липшицевости мер $\tau_T^\pm$ влечет, а в случае $\dim(I - T^*T)\mathfrak{H} < \infty$ эквивалентно условию равномерной ограниченности характеристической функции $\Theta_T(\zeta)$ $(|\zeta| < 1)$. Последнее же условие по теореме Л. А. Сахновича [23] является достаточным, для того, чтобы оператор T был подобен унитарному.

К этому добавим следующее. Если воспользоваться соответствующим признаком подобия оператора $T \in [\mathfrak{H}]$ какому-либо сжатию, то можно показать, что липшицевость меры τ_T^+ (τ_T^-) для $T \in [\mathfrak{H}]_1$ есть достаточное условие того, чтобы оператор T был подобен некоторому сжатию (растяжению). Таким признаком является признак Л. А. Сахновича [24], полученный в обобщение признака Дэйвиса-Фояша [26].

8. СЛУЧАЙ ОПЕРАТОРА $A = H + \mathrm{i}G$

Ниже мы будем рассматривать операторы A вида $A = H + \mathrm{i}G$, где H — самосопряженный оператор, а $G = G^*$ — ядерный ($G \in \mathfrak{S}_1$), $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(H)$.

Как известно [6], всякая невещественная точка λ_0 спектра такого оператора A есть нормальное собственное число (т.е. собственное число с нормально отщепляющимся корневым подпространством $\mathfrak{C}_{\lambda_0}(A)$). Эти точки образуют изолированное множество $\sigma_{\text{нев}}(A)$ в $\mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-$, где $\mathbf{C}_+$ ($\mathbf{C}_-$) — открытая верхняя (нижняя) полуплоскость: $\operatorname{Im}\lambda > 0$ ($\operatorname{Im}\lambda < 0$). Это множество можно расположить в последовательность $\{\lambda_j(A)\}_1^N$ ($0 \leqslant N \leqslant \infty$), причем так, чтобы каждое собственное число $\lambda_0 \in \sigma_{\text{нев}}(A)$ фигурировало в этой последовательности столько раз, какова его алгебраическая кратность ν_{λ_0} ($= \dim \mathfrak{C}_{\lambda_0}(A)$).

В [6] (теорема 5.3) было показанно, что

$$\sum_1^N |\operatorname{Im}\lambda_j(A)| \leqslant \|\operatorname{Im} A\|_1, \tag{8.1}$$

а если система корневых подпространств $\{\mathfrak{C}_{\lambda_j}(A)\}$ полна в $\mathfrak{H}$, то

$$\sum \operatorname{Im}\lambda_j(A) = \operatorname{sp}(\operatorname{Im} A). \tag{8.2}$$

Последнее утверждение доказывалось в [6] только для диссипативного оператора A, но легко видеть, что оно проходит в общем случае.

Заметим, что для диссипативного оператора соотношение (8.1) дает

$$\sum_1^N \operatorname{Im}\lambda_j \leqslant \operatorname{sp} G.$$

ЛЕММА 8.1. *Пусть $\{\lambda_j\}_1^\infty$ — последовательность невещественных чисел такая, что*

$$\sum_{j=1}^\infty |\operatorname{Im}\lambda_j| < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{y\uparrow\infty} y^2 \sum_1^\infty \frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{(\mathrm{i}y - \lambda_j)(\mathrm{i}y - \bar\lambda_j)} = -\sum_1^\infty \operatorname{Im}\lambda_j. \tag{8.3}$$

Произведение Бляшке

$$B(z) := \prod_{j=1}^\infty \frac{z - \lambda_j}{z - \bar\lambda_j}$$

равномерно сходится на любом замкнутом множестве $\mathscr{E} \subset \mathbf{C}$, *находящемся на положительном расстоянии от последовательности* $\{\bar{\lambda}_j\}_1^\infty$.

При этом для $z = x + iy$ *равномерно относительно* $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{y\uparrow\infty} B(z) = 1, \quad \lim_{y\uparrow\infty} y \ln |B(z)| = -2 \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \lambda_j. \tag{8.4}$$

Доказательство. Проверка соотношения (8.3) производится элементарными средствами и опускается.

Равномерная (и абсолютная) сходимость $B(z)$ на любом $\mathscr{E} \subset \mathbf{C}$ с $d_{\mathscr{E}} := \operatorname{dist}(\mathscr{E}, \{\lambda_j\}) > 0$ следует из оценки

$$\left| 1 - \frac{z - \lambda_j}{z - \bar{\lambda}_j} \right| = \left| \frac{2 \operatorname{Im} \lambda_j}{z - \bar{\lambda}_j} \right| \leqslant \frac{2}{d_{\mathscr{E}}} |\operatorname{Im} \lambda_j|.$$

Произведение $B(z)$ можно представить в виде частного произведений Бляшке:

$$B(z) = B_+(z)/B_-(z), \quad \text{где } B_+(z) = \prod_{\operatorname{Im} \lambda_j > 0} \frac{z - \lambda_j}{z - \bar{\lambda}_j}, \quad B_-(z) = \prod_{\operatorname{Im} \lambda_j < 0} \frac{z - \bar{\lambda}_j}{z - \lambda_j};$$

поэтому лемма будет доказана, коль скоро она будет доказана для случая, когда все $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$.

В этом случае при $y = \operatorname{Im} z > 0$ имеет место оценка

$$1 - \left| \frac{z - \lambda_j}{z - \bar{\lambda}_j} \right| \leqslant \left| 1 - \frac{z - \lambda_j}{z - \bar{\lambda}_j} \right| \leqslant \frac{2 \operatorname{Im} \lambda_j}{y},$$

из которой уже следует:

$$|B(z) - 1| \leqslant \exp\left(\frac{2 \sum \operatorname{Im} \lambda_j}{y} \right) - 1, \quad |B(z)| \geqslant \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2 \operatorname{Im} \lambda_j}{y} \right). \tag{8.5}$$

Из первой оценки следует первое соотношение (8.4). Из второй оценки вытекает, что для любого $q > 1$ найдется такое N_q, что

$$|B(z)| \geqslant \exp\left(-\frac{2q}{y} \sum_1^\infty \operatorname{Im} \lambda_j \right) \quad \text{при } y > N_q.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для любого $q > 1$:

$$1 - \xi > \exp(-q\xi) \quad \text{при} \quad 0 < \xi < q^{-1} \ln q.$$

Таким образом

$$\varliminf_{y\uparrow\infty} y \ln|B(z)| \geqslant -2q \sum_{1}^{\infty} \operatorname{Im}\lambda_j. \tag{8.6}$$

С другой стороны, так как для любого натурального n:

$$|B(z)| \leqslant |B_n(z)|, \quad \text{где} \quad B_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z-\lambda_j}{z-\bar{\lambda}_j} \qquad (\operatorname{Im} z > 0),$$

то

$$\varlimsup_{y\uparrow\infty} y \ln|B(z)| \leqslant \lim_{y\uparrow\infty} y \ln|B_n(z)| = -2 \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im}\lambda_j.$$

Поскольку здесь n — любое натуральное число, а в (8.6) q — произвольное число > 1, то отсюда уже следует второе соотношение (8.4).

ЛЕММА 8.2. *Пусть* $H = H^*$, $G \in \mathfrak{S}_1$; *тогда*

$$\lim_{y\uparrow\infty} y^2 \operatorname{sp}[(H - \mathrm{i}yI)^{-1}G(H - \mathrm{i}yI)^{-1}] = -\operatorname{sp} G. \tag{8.7}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать это соотношение для $G = G^*$. Пусть

$$G = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(\cdot, \varphi_j)\varphi_j, \quad (\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots)$$

спектральное разложение для G, как что

$$\operatorname{sp} G = \sum_{1}^{N} \alpha_j, \quad \sum_{1}^{N} |\alpha_j| = \|G\|_1 < \infty \quad (N \leqslant \infty).$$

Легко проверить, что для всякой функции $\tau(\lambda)$ ограниченной вариации

$$\lim_{y\uparrow\infty} y^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tau(\lambda)}{(\lambda - \mathrm{i}y)^2} = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau(\lambda). \tag{8.8}$$

Пользуясь этим, нетрудно доказать соотношение (8.7) для случая, когда $N = \dim G\mathfrak{H} < \infty$. В самом деле, обозначая через $E(\lambda)$ спектральную функцию оператора H, будем иметь

$$\operatorname{sp}[(H - \mathrm{i}yI)^{-1}G(H - \mathrm{i}yI)^{-1}] = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}(E(\lambda)\varphi_j, \varphi_j)}{(\lambda - \mathrm{i}y)^2}.$$

Поэтому согласно (8.8) левая часть в (8.7) равна

$$-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}(E(\lambda)\varphi_j,\varphi_j)=-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j=-\operatorname{sp}G.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $N=\infty$. Для произвольно заданного $\varepsilon>0$ выберем такое n, чтобы

$$\sum_{n+1}^{\infty}|\alpha_k|<\frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Тогда

$$\|G-G_n\|_1<\frac{\varepsilon}{3}$$

для

$$G_n=\sum_{1}^{n}\alpha_j(\cdot,\varphi_j)\varphi_j$$

и, стало быть,

$$|y^2\operatorname{sp}[(H-\mathrm{i}yI)^{-1}(G-G_n)(H-\mathrm{i}yI)^{-1}]|\leqslant y^2\|(H-\mathrm{i}yI)^{-1}\|\|G-G_n\|_1<\frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Обозначим через $\mathscr{I}_y(G)$ выражение, стоящее под знаком предела в (8.7). Согласно выше написанному

$$|\mathscr{I}_y(G)-\mathscr{I}_y(G_n)|=|\mathscr{I}_y(G-G_n)|<\frac{\varepsilon}{3};$$

с другой стороны

$$|\mathscr{I}_y(G)+\operatorname{sp}G|\leqslant|\operatorname{sp}(G-G_n)|+|\mathscr{I}_y(G-G_n)|+|\mathscr{I}_y(G_n)+\operatorname{sp}G_n|,$$

где в правой части первые два слагаемые меньше $\varepsilon/3$, а последнее может быть сделано меньше $\varepsilon/3$ за счет достаточно большого y.

Таким образом, $|\mathscr{I}_y(G)+\operatorname{sp}G|<\varepsilon$ при достаточно больших y.

Лемма доказана.

ЛЕММА 8.3. *Пусть* $A=H+\mathrm{i}G$ $(H=H^*, G=G^*\in\mathfrak{S}_1)$ *и* $\pm\mathrm{i}\,\overline{\in}\,\sigma(A)$. *Тогда при* $\zeta=(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})^{-1}$ $(z\,\overline{\in}\,\sigma(A))$

$$\Delta_{A/A^*}(z)=\varepsilon\Delta_T(\zeta)\det{}^{-1/2}(T^*T),\tag{8.9}$$

где

$$T=(A-\mathrm{i}I)(A+\mathrm{i}I)^{-1},$$

а $|\varepsilon| = 1$. *Кроме того,*

$$B_A(z) = \eta B_T(\zeta), \tag{8.10}$$

где $\eta = 1$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что правая часть в (8.9) имеет смысл, так как оператор $T \in [\mathfrak{H}]_1$: он непрерывно обратим и его отклонение

$$I - T^*T = 2(A^* + iI)^{-1}G(A + iI)^{-1} \in \mathfrak{S}_1.$$

Далее, имеем

$$(A - zI)(A^* - zI)^{-1} = \left(A - i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}I\right)\left(A^* - i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}I\right)^{-1} =$$

$$= (-\zeta(A + iI) + (A - iI))(-\zeta(A^* + iI) + (A^* - iI))^{-1} =$$

$$= (T - \zeta I)(A + iI)(A^* + iI)^{-1}(T^{*-1} - \zeta I)^{-1}.$$

Применим к начальному и последнему выражению операцию det. Переставляя соответствующим образом множители, получим

$$\Delta_{A/A^*}(z) = \Delta_{T/T^{*-1}}(\zeta)\det[(A + iI)(A^* + iI)^{-1}]. \tag{8.11}$$

Так как

$$|\det[(A + iI)(A^* + iI)^{-1}]|^2 = \det[(A^* - iI)(A - iI)^{-1}(A + iI)(A^* + iI)^{-1}] =$$

$$= \det[(A^* + iI)^{-1}(A^* - iI)(A - iI)^{-1}(A + iI)^{-1}] = \det(T^{*-1}T^{-1}),$$

то

$$|\det[(A + iI)(A^* + iI)^{-1}]| = \det{}^{-1/2}(T^*T). \tag{8.12}$$

Таким образом, в силу (8.11) и (8.12) имеет место (8.9) при некотором унитарном ε.

Очевидно, $\mathfrak{E}(A) = \mathfrak{E}(T)$ и если $\{\lambda_j(A)\}$ — полная последовательность невещественного спектра оператора A, то $\{\alpha_j(T)\}$, где

$$\alpha_j(T) = (\lambda_j(A) - i)(\lambda_j(A) + i)^{-1}$$

будет полной последовательностью неунитарного спектра оператора T.

Поэтому

$$B_A(z) := \prod_j \frac{z - \lambda_j(A)}{z + \lambda_j(A)} = \prod_j \frac{(\alpha_j(T) - \zeta)\overline{\alpha_j(T)}}{1 - \overline{\alpha_j(T)}\zeta} \cdot \frac{\lambda_j(A) + i}{\overline{\lambda_j(A)} + i}$$

и, так как

$$\left|\overline{\alpha_j(T)}\frac{\lambda_j(A)+\mathrm{i}}{\overline{\lambda_j(A)}+\mathrm{i}}\right| = \left|\alpha_j(T)\frac{\lambda_j(A)+\mathrm{i}}{\lambda_j(A)-\mathrm{i}}\right| = 1,$$

то имеет место (8.10) с некоторым унитарным η.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. *Если в* (8.9) *положить* $z = \mathrm{i}$, $\zeta = 0$, *то найдем, что*

$$\varepsilon = \exp(\mathrm{i}\arg\det[(A^* + \mathrm{i}I)(A + \mathrm{i}I)^{-1}]).$$

Аналогично, если в (8.10) *положить* $z = \mathrm{i}$, $\zeta = 0$, *то получим*

$$\eta = \exp(\mathrm{i}\arg B_A(\mathrm{i})).$$

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть* $A = H + \mathrm{i}G$ $(H = H^*)$ *диссипативный оператор с ядерной мнимой компонентой* $G \in \mathfrak{S}_1$. *Тогда*

$$\Delta_{A/A^*}(z) = \prod_j \frac{z-\lambda_j}{z-\overline{\lambda}_j}\exp\left(\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_A(\lambda)}{\lambda - z}\right) \quad (\operatorname{Im} z > 0), \tag{8.13}$$

где $\omega_A(\lambda) = \omega_A(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty,\ \omega_A(-\infty) = 0)$ — *неубывающая функция ограниченной вариации, а* $\{\lambda_j\}$ — *полная последовательность невещественных собственных чисел оператора* A, *при этом*

$$\operatorname{sp} G = \sum_j \operatorname{Im}\lambda_j + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_A(\lambda). \tag{8.14}$$

Если некоторый интервал (a, b) *не содержит точек спектра* $\sigma(A)$, *то функция* ω_A *постоянна на этом интервале.*

Если диссипативный оператор A *вполне несамосопряжен, то равенство*

$$\sum_j \operatorname{Im}\lambda_j = \operatorname{sp} G \tag{8.15}$$

имеет место точно тогда, когда $\mathfrak{E}(A) = \mathfrak{H}$ [1].

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $\mathrm{i}\,\overline{\in}\,\sigma(A)$, иначе мы могли бы добиться этого заменой A на $A - aI$ с

---

[1] Последнее утверждение для случая ограниченного H было доказано М. С. Лившицем [18]. Отметим, что теорема 8.1 пересекается с результатами работ [11], [12].

подходящим $a \in (-\infty, \infty)$. Так как оператор A диссипативен, то всегда $-\mathrm{i} \bar{\in} \sigma(A)$ и к оператору A будет применима лемма 8.3. Учитывая, что для диссипативного A оператор T будет сжатием, заключаем на основании формулы (8.9) и теоремы 2.1, что

$$(8.16) \qquad |\varDelta_{A/A^*}(z)| < 1 \text{ при } \operatorname{Im} z > 0.$$

Отсюда следует, что

$$(8.17) \qquad \varDelta_{A/A^*}(z) = B_A(z)\exp\{\mathrm{i}F(z)\},$$

где $F(z)$ R-функция, т.е. функция, голоморфная внутри верхней полуплоскости и имеющая там $\operatorname{Im} F(z) \geqslant 0$.

Для любого $X \in \mathfrak{S}_1$ имеет место следующая оценка

$$|\det(I + X)| \geqslant \exp(-q\|X\|_1) \quad \text{при } \|X\|_1 \leqslant \delta_q,$$

где q — произвольное число > 1, а $\delta_q = q^{-1}\ln q$.

Оценка легко следует из неравенства $1-\lambda > \exp(-q\lambda)$ при $0 < \lambda < \delta_q$, однажды уже использованного (см. доказательство леммы 8.1).

Так как

$$\varDelta_{A/A^*}(z) = \det(I + X(z)), \quad \text{где } X(z) = 2\mathrm{i}G(A^* - zI)^{-1}$$

и

$$\|X(z)\| \leqslant 2\operatorname{sp} G\|(A^* - zI)^{-1}\| \leqslant 2\operatorname{sp} G/y,$$

то

$$|\varDelta_{A/A^*}(z)| \geqslant \exp(-2q \operatorname{sp} G/y) \quad \text{при } y \geqslant N_q.$$

Учитывая еще (8.16), находим

$$\lim_{y\uparrow\infty} \varDelta_{A/A^*}(z) = 1, \ \ln|\varDelta_{A/A^*}(z)| \geqslant -\frac{2q}{y}\operatorname{sp} G \quad \text{при } y > N_q.$$

С другой стороны, согласно (8.17):

$$\ln|\varDelta_{A/A^*}(z)| = \ln|B_A(z)| - \operatorname{Im} F(z),$$

так что

$$\operatorname{Im} F(z) \leqslant -\ln|\varDelta_{A/A^*}(z)| \leqslant \frac{2q}{y}\operatorname{sp} G \quad (y > N_q).$$

Полученная оценка для мнимой части R-функции F, как известно, показывает, что функция F представима в виде

$$F(z) = \gamma + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_A(\lambda)}{\lambda - z} \quad (\operatorname{Im} z > 0),$$

где ω_A — неубывающая функция ограниченной вариации, а $\gamma \in (-\infty, \infty)$ ($\gamma = \lim F(z)$ при $y \uparrow \infty$).

Если мы в соотношении (8.17) устремим y к $+\infty$ и вспомним, что по лемме 8.1 $\lim\limits_{y\uparrow\infty} B_A(z) = 1$, то получим $\exp(i\gamma) = 1$. Стало быть, мы можем положить $\gamma = 0$.

Таким образом, представление (8.13) для определителя возмущения $\Delta_{A/A^*}(z)$ получено, однако пока еще без соотношения (8.14), которое как мы покажем, из него вытекает.

В самом деле, логарифмическая производная от левой и правой части соотношения (8.13) дает:

$$\operatorname{sp}\{(A - zI)^{-1} - (A^* - zI)^{-1}\} = \sum_j \left\{\frac{1}{z - \lambda_j} - \frac{1}{z - \bar{\lambda}_j}\right\} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_A(\lambda)}{(\lambda - z)^2},$$

или

$$\operatorname{sp}\{(A - zI)^{-1} G (A^* - zI)^{-1}\} = \sum_j \frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{(z - \bar{\lambda}_j)(z - \lambda_j)} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_A(\lambda)}{(\lambda - z)^2}.$$

Положим здесь $z = iy$, помножим обе части на $-y^2$ и устремим y к $+\infty$. Согласно (8.8) и лемме 8.1 этот предельный переход в правой части даст правую часть (8.14). Остается показать, что

$$\lim_{y\uparrow\infty} y^2 \operatorname{sp}\{(A - iyI)^{-1} G (A^* - iyI)^{-1}\} = -\operatorname{sp} G. \tag{8.18}$$

Для $y > \|G\|$ имеем $\|(H - zI)^{-1} G\| \leqslant \frac{1}{y} \|G\| < 1$ и так как

$$(A - zI)^{-1} = (I + i(H - zI)^{-1} G)^{-1} (H - zI)^{-1},$$

то

$$\Gamma(z) := (A - zI)^{-1} - (H - zI)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-i(H - zI)^{-1} G)^k (H - zI)^{-1}.$$

В силу оценки $\|(H - zI)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{y}$:

$$\|\Gamma(z)\| \leqslant \frac{1}{y}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\|G\|}{y}\right)^k = \frac{\|G\|}{y^2}\left(1 - \frac{\|G\|}{y}\right)^{-1} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{y^2}\right) \quad \text{при } y\uparrow\infty.$$

Аналогично показывается, что

$$(A^* - zI)^{-1} = (H - zI)^{-1} + \Gamma_1(z), \quad \text{где } \|\Gamma_1(z)\| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{y^2}\right) \text{при } y\uparrow\infty.$$

Поэтому предел, стоящий в левой части (8.18), существует и имеет то значение, которое он получит при замене A и A^* на H. При такой замене равенство (8.18) переходит в равенство (8.7) леммы 8.2, тем самым равенство (8.18) установлено.

Второе утверждение теоремы устанавливается так же, как аналогичное второе утверждение теоремы 2.1. А можно его получить, используя связь между мерами τ и ω_A:

$$\mathrm{d}\tau_T(\theta) = \frac{\mathrm{d}\omega_A(\lambda)}{1 + \lambda^2} \quad \left(\lambda = \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\right).$$

Связь эта легко устанавливается, если в равенстве (8.9) использовать выражение (8.13) для $\Delta_{A/A^*}(z)$ и выражение (2.2) для $\Delta_T(\zeta)$.

Если диссипативный оператор A вполне несамосопряжен, то в этом и только этом случае соответствующее сжатие T будет вполне неунитарным.

Равенство (8.15) эквивалентно равенству $\operatorname{Var}\omega_A = 0$, а последнее эквивалентно тому, что $\operatorname{Var}\tau_T = 0$, что для вполне неунитарного сжатия равносильно (см. следствие 2.1) $\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{H}$. Так как, очевидно, $\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{E}(A)$, то последнее утверждение также доказано.

Теорема 8.1 в определенном смысле аналогична теореме 2.1. Ниже мы установим теоремы 8.2 и 8.3, являющиеся аналогами теорем 4.1 и 5.1. Для этого нам понадобятся две леммы (такого рода предложения впервые были сформулированы в заметке [13]; см. также [7], гл. IV, § 5).

ЛЕММА 8.4. *Пусть H, F, G — самосопряженные операторы из $[\mathfrak{H}]$, причем операторы $F \pm G$ неотрицательны. Тогда если оператор $\mathscr{L} = H + \mathrm{i}F$ имеет обратный $\mathscr{L}^{-1} \in [\mathfrak{H}]$, то оператор*

$$W = I - \mathrm{i}(F - G)^{1/2}\mathscr{L}^{-1}(F - G)^{1/2} \tag{8.19}$$

является сжатием.

Если к тому же $F - G \in \mathfrak{S}_1$, *то для* $M = H + iG$ *оператор* $M\mathscr{L}^{-1} - I \in \mathfrak{S}_1$ *и*

(8.20) $$|\det(M\mathscr{L}^{-1})| \leqslant 1.$$

Доказательство. Положим $K = F - G$; тогда

$$I - W^* W = I - (I + iK^{1/2}\mathscr{L}^{*-1}K^{1/2})(I - iK^{1/2}\mathscr{L}^{-1}K^{1/2}) =$$

$$= - iK^{1/2}\mathscr{L}^{*-1}K^{1/2} + iK^{1/2}\mathscr{L}^{-1}K^{1/2} - K^{1/2}\mathscr{L}^{*-1}K\mathscr{L}^{-1}K^{1/2} =$$

$$= iK^{1/2}(\mathscr{L}^{-1} - \mathscr{L}^{*-1})K^{1/2} - K^{1/2}\mathscr{L}^{*-1}(F - G)\mathscr{L}^{-1}K^{1/2},$$

а так как $\mathscr{L}^{-1} - \mathscr{L}^{*-1} = \mathscr{L}^{*-1}(\mathscr{L}^* - \mathscr{L})\mathscr{L}^{-1} = - 2i\mathscr{L}^{*-1}F\mathscr{L}^{-1}$, то

$$I - W^* W = K^{1/2}\mathscr{L}^{*-1}(F + G)\mathscr{L}^{-1}K^{1/2} \geqslant 0, \quad \|W\| \leqslant 1.$$

Если $F - G \in \mathfrak{S}_1$, то $W - I \in \mathfrak{S}_1$ и имеет смысл $\det W$. Поскольку $\|W\| \leqslant 1$, $|\det W| \leqslant 1$. С другой стороны, так как $\det(I + XY) = \det(I + YX)$, коль скоро $X, Y \in [\mathfrak{H}], XY, YX \in \mathfrak{S}_1$, то

$$\det W = \det(I - i(F - G)\mathscr{L}^{-1}) = \det(M\mathscr{L}^{-1}).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 8.5. *Пусть* $A_1 = H + iG$, $A_2 = H - iF$, *где* $H = H^*$, *а* $F, G \in [\mathfrak{H}]$, *причем* $F \pm G \geqslant 0$ *и* $F - G \in \mathfrak{S}_1$.

Тогда

(8.21) $$|\Delta_{A_1/A_2}(z)| < 1 \quad \text{при } \operatorname{Im} z > 0.$$

Доказательство. К операторам $\mathscr{L} = H - xI + i(yI + F)$ и $M = H - xI + i(yI - G)$ при $y > 0$ и $x \in (-\infty, \infty)$ применима лемма 8.4 и, стало быть, для них $|\det(M\mathscr{L}^{-1})| < 1$. Но тогда и $|\det(M^*\mathscr{L}^{*-1})| < 1$, а так как

$$\det(M^*\mathscr{L}^{*-1}) = \det((A_1 - zI)(A_2 - zI)^{-1}) = \Delta_{A_1/A_2}(z),$$

то лемма доказана.

Заметим, что неравенство (8.16) есть частный случай неравенства (8.21) (при $A_1 = A, A_2 = A^*$).

Для оператора $A = H + iG$ ($H = H^*, G = G^* \in \mathfrak{S}_1$) введем понятие *s*-мажорантного оператора A^M, полагая $A^M = H - i|G|$, где $|G| = G_+ + G_-$, а $G_\pm$ ортогональные неотрицательные слагаемые разложения: $G = G_+ - G_-$.

Очевидно, $(A^*)^M = A^M$.

В § 1 было введено понятие мажорантного оператора T_M для $T \in [\mathfrak{H}]_1$. Если случайно оператор $A \in [\mathfrak{H}]_1$, то для него будет иметь смысл A_M и A^M, но это будут существенно различные операторы и поэтому для них приняты различные обозначения (хотя и близкие) и различные названия.

ТЕОРЕМА 8.2. *Пусть* $A = H + \mathrm{i}G$ $(H = H^*, G = G^* \in [\mathfrak{H}])$. *Если* $G_+ \in \mathfrak{S}_1$, *то*

$$(8.22)\qquad \Delta_{A/A^M}(z) = B_A^+(z)\exp\left(\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega_A^+(\lambda)}{\lambda - z}\right) \quad (\operatorname{Im} z > 0),$$

где $\omega_A^+(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — *некоторая неубывающая функция ограниченной вариации, при этом*

$$(8.23)\qquad \operatorname{sp} G_+ = \sum_j \operatorname{Im}\lambda_j^+(A) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega_A^+(\lambda).$$

Аналогично, если $G_- \in \mathfrak{S}_1$, *то*

$$(8.24)\qquad \Delta_{A^*/A^M}(z) = B_A^-(z)\exp\left(\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega_A^-(\lambda)}{\lambda - z}\right) \quad (\operatorname{Im} z > 0),$$

где $\omega_A^-(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — *некоторая неубывающая функция ограниченной вариации, при этом*

$$(8.25)\qquad \operatorname{sp} G_- = -\sum_j \operatorname{Im}\lambda_j^-(A) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega_A^-(\lambda).$$

Здесь через $B_A^+(z)$ $(B_A^-(z))$ *обозначены произведения Бляшке, построенные по полным последовательностям собственных чисел оператора* A, *находящихся в* $\mathbf{C}_+$ $(\mathbf{C}_-)$.

Доказательство. Легко видеть, что при $G_+ \in \mathfrak{S}_1$ к паре $A_1 = A$, $A_2 = A^M$ применима лемма 8.5.

Таким образом, при $\operatorname{Im} z > 0$

$$|\Delta_{A/A^M}(z)| = |\det(I + 2\mathrm{i}G_+(A^M - zI)^{-1}| \leqslant 1.$$

Эта оценка позволяет повторить для определителя $\Delta_{A/A^M}(z)$ все рассуждения, проведенные в отношении определителя $\Delta_{A/A^*}(z)$ для диссипативного оператора A, и в результате получить (8.22).

Беря логарифмическую производную от обеих частей равенства (8.22), найдем

$$-\mathrm{sp}\{(A-zI)^{-1}-(A^M-zI)^{-1}\}=\sum\left\{\frac{1}{z-\lambda_j^+}-\frac{1}{z-\overline{\lambda_j^+}}\right\}+\mathrm{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega_A(\lambda)}{(\lambda-z)^2}.$$

Так как

$$(A-zI)^{-1}-(A^M-zI)^{-1}=(A-zI)^{-1}(A^M-A)(A^M-zI)^{-1}=$$

$$=-2\mathrm{i}(A-zI)^{-1}G_+(A^M-zI)^{-1},$$

то мы сможем снова воспользоваться приемом, которым было получено соотношение (8.14), и на этот раз получить (8.23).

Если $G_-\in\mathfrak{S}_1$, то мы сможем применить доказанное первое утверждение теоремы к оператору A^*. Если при этом учесть, что последовательность $\{\lambda_j^+(A^*)\}$ совпадает с последовательностью $\{\overline{\lambda_j^-}(A)\}$, то получим (8.24) и (8.25).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. При условии $G_+\in\mathfrak{S}_1$ из (8.23) вытекает неравенство

$$\mathrm{sp}\,G_+\geqslant\sum_j\mathrm{Im}\,\lambda_j^+(A). \tag{8.26}$$

Используя рассуждения типа тех, которые имеются в [7] (гл. V §2), можно доказать, что знак "=" здесь достигается тогда и только тогда, когда сужение $A\,|\,\mathfrak{E}_+(A)$ — максимальный диссипативный оператор, подпространство $\mathfrak{H}_-=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{E}_+(A)$ инвариантно относительно A и сужение $A\,|\,\mathfrak{H}_-$ — максимальный аккумулятивный оператор (с мнимой компонентой, равной $-G_-$).

Аналогичные утверждения можно сделать в случае, когда $G_-\in\mathfrak{S}_1$.

ТЕОРЕМА 8.3. *Пусть* $A=H+\mathrm{i}G$ $(H=H^*, G=G^*\in\mathfrak{S}_1)$, *причем* G — *индефинитный оператор. Тогда*

$$\Delta_{/A^*}(z)=B_A(z)\exp\left(\mathrm{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega_A(\lambda)}{\lambda-z}\right), \tag{8.27}$$

где $\omega_A(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — некоторая вещественная функция ограниченной вариации; при этом

$$\operatorname{sp} G = \sum_j \operatorname{Im} \lambda_j(A) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_A(\lambda). \tag{8.28}$$

Функция $\omega_A(\lambda)$ постоянна внутри всякого интервала (a, b), не содержащего точек спектра $\sigma(A)$.

Имеет место оценка

$$\operatorname{sp} |G| \geqslant \sum_j |\operatorname{Im} \lambda_j(A)| + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |d\omega_A(\lambda)|. \tag{8.29}$$

Если $\mathfrak{E}(A) = \mathfrak{H}$, то $\operatorname{Var} \omega_A = 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{sp} G = \sum_j \operatorname{Im} \lambda_j(A). \tag{8.30}$$

Равенство

$$\operatorname{sp} |G| = \sum_j |\operatorname{Im} \lambda_j(A)|$$

имеет место точно тогда, когда $\mathfrak{H}$ распадается в прямую ортогональную сумму инвариантных для A подпространств:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_+(A) \oplus \mathfrak{E}_-(A) \oplus \mathfrak{H}_{\mathfrak{h}},$$

причем сужение $A|\mathfrak{E}_+(A)$ — максимальный диссипативный оператор, $A|\mathfrak{E}_-(A)$ — максимальный аккумулятивный оператор, а $A|\mathfrak{H}_{\mathfrak{h}}$ — самосопряженный оператор.

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{S}_1$, то и $G_\pm \in \mathfrak{S}_1$, а следовательно, определители $\Delta_{A/A^M}(z)$ и $\Delta_{A^*/A^M}(z)$ допускают представления (8.22) и (8.24). Так как отношение первого из этих определителей ко второму равно $\Delta_{A/A^*}(z)$, а $B_A(z) = B_A^+(z) B_A^-(z)$, то отсюда следует (8.27) с

$$\omega_A(\lambda) = \omega_A^+(\lambda) - \omega_A^-(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{8.31}$$

Равенство (8.28) получается почленным вычитанием (8.23) и (8.25).

Второе утверждение теоремы о постоянстве ω_A в люках спектра оператора A на единичной окружности доказывается аналогично тому как соответствующее утверждение в теореме 4.1.

Почленное сложение равенств (8.23) и (8.25) дает

$$\operatorname{sp}|G| = \sum_j |\operatorname{Im}\lambda_j(A)| + \frac{1}{2}(\operatorname{Var}\omega_A^+ + \operatorname{Var}\omega_A^-),$$

а так как в силу (8.31) на любом интервале $|\operatorname{Var}\omega_A| \leqslant \operatorname{Var}\omega_A^+ + \operatorname{Var}\omega_A^-$, то отсюда следует (8.29).

Без ограничения общности можно принять, что $\pm\mathrm{i} \,\overline{\in}\, \sigma(A)$ и, следовательно, имеет смысл оператор $T = (A - \mathrm{i}I)(A + \mathrm{i}I)^{-1} \in [\mathfrak{H}]_1$.

Если $\mathfrak{E}(A) = \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{E}(A) = \mathfrak{H}$ и по лемме 1.1 будет иметь место равенство (1.13). В сочетании с леммой 8.3 это даст

$$\Delta_{A/A^*}(z) = \varepsilon\eta^{-1}B_A(z),$$

а так как имеет место (8.27), то

$$\varepsilon\eta^{-1} = \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega_A(\lambda)}{\lambda - z}\right) \quad (\operatorname{Im} z > 0).$$

Отсюда следует: $\varepsilon = \eta$ и $\operatorname{Var}\omega_A = 0$ и, стало быть, равенство (8.30).

Последнее утверждение для случая ограниченного оператора A доказано в [7] (теорема V 2.2). Это элементарное доказательство распространяется и на случай неограниченного A и оно в определенном смысле аналогично доказательству теоремы 4.2. Кстати, теорему 4.2 следует рассматривать как некоторый аналог последнего утверждения настоящей теоремы.

Из представления (8.27) почти непосредственно следует формула следов для пары A и A^*.

ТЕОРЕМА 8.4. *Пусть* $A = H + \mathrm{i}G$, $(H = H^*, G \in \mathfrak{S}_1)$. *Тогда для любой функции* Φ *вида:* $\Phi(z) = \mathrm{const}\, z +$ *функция, локально голоморфная в некоторой окрестности объединения* $\sigma(A) \cup \sigma(A^*)$ *справедлива формула следов:*

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\operatorname{sp}\{\Phi(A) - \Phi(A^*)\} = \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_j \{\Phi(\lambda_j) - \Phi(\bar\lambda_j)\} + \int_{-\infty}^{\infty}\Phi'(\lambda)\mathrm{d}\omega_A(\lambda), \tag{8.32}$$

где $\{\lambda_j\} = \{\lambda_j(A)\}$.

Доказательство. Для $\Phi(z) = cz$ $(c \neq 0)$ равенство (8.32) эквивалентно соотношению (8.28).

Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда $\Phi(z)$ — функция, локально голоморфная в некоторой окрестности объединенного спектра $\sigma(A) \cup \sigma(A^*)$.

Логарифмическая производная по z от членов равенства (8.27) дает

$$\operatorname{sp}\{(A - zI)^{-1} - (A^* - zI)^{-1}\} =$$
$$= \sum_j \left\{\frac{1}{\lambda_j - z} - \frac{1}{\overline{\lambda}_j - z}\right\} + \mathrm{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_A(\lambda)}{(\lambda - z)^2}. \tag{8.33}$$

Это равенство имеет место при $\operatorname{Im} z > 0$, $z \overline{\in} \{\lambda_j(A)\}$. Переход в нем к комплексно сопряженным величинам показывает, что оно справедливо и при $\operatorname{Im} z < 0$, $z \overline{\in} \{\lambda_j(A)\}$. Разумеется, оно имеет место и при вещественных $z \overline{\in} \operatorname{supp} \omega_A$.

Умножая почленно равенство (8.33) на $\Phi(z)$ и интегрируя его по соответственно подобранному контуру Γ (ср. с доказательством теоремы 2.1), мы получим формулу (8.32). При этом придется учесть, что оператор-функция

$$\Phi(z)\{(A - zI)^{-1} - (A^* - zI)^{-1}\} = \Phi(z)(A - zI)^{-1}G(A^* - zI)^{-1}$$

непрерывна в ядерной норме при любом $z \in \Gamma$.

Теорема доказана.

Разумеется, ее можно было получить из теоремы 5.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $G \geqslant 0$ теорема 8.4 показывает как уточняется теорема АП при замене условия $(A - \lambda_0 I)^{-1} - (A^* - \lambda_0 I)^{-1} \in \mathfrak{S}_1$ при некотором $\lambda_0 \in \mathbf{C}_+ \cap \rho(A)$ на более жесткое: $\operatorname{Im} A \in \mathfrak{S}_1$.

Легко видеть, что в отличие от формулы (0.4) в теореме АП и формулы (5.3) нормированная функция $\omega_A(\lambda) = \omega_A(\lambda - 0)$ $(\omega_A(-\infty) = 0)$ определяется единственным образом равенством (8.32) на расширенном (линейной функцией) классе функций Φ.

9. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВОЗМУЩЕНИЯ $\Delta_{H/A}$ ДЛЯ АККУМУЛЯТИВНОГО ОПЕРАТОРА $A = H - \mathrm{i}G$

Начнем со следующего предложения.

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть $A = H - \mathrm{i}G$ $(H = H^*)$ — аккумулятивный оператор с ядерной мнимой компонентой $G \in \mathfrak{S}_1$ $(G \geqslant 0)$. Тогда*

$$\Delta_{H/A}(z) = \exp\left(\mathrm{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(\lambda; H, G)}{\lambda - z}\right) \quad (\operatorname{Im} z > 0), \tag{9.1}$$

где $\omega(\lambda; H, G) = \omega(\lambda - 0; H, G)$ $(\omega(-\infty; H, G) = 0)$ — *неубывающая функция ограниченной вариации, при этом*

$$\mathrm{sp}\, G = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega(\lambda; H, G). \tag{9.2}$$

Кроме того, ω *при фиксированном* H *является неубывающим функционалом от* G, т.е., *если* $0 \leqslant G_1 \leqslant G_2$ $(\in \mathfrak{S}_1)$, *то при любом* $\lambda \in (-\infty, \infty)$

$$\mathrm{d}\omega(\lambda; H, G_1) \leqslant \mathrm{d}\omega(\lambda; H, G_2). \tag{9.3}$$

Доказательство. К операторам $A_1 = H$ и $A_2 = A$ применима лемма 8.5. Это дает неравенство $|\Delta_{H/A}(z)| < 1$, а следовательно, имеет место представление $\Delta_{A/H}(z) = \exp(\mathrm{i}F(z))$, где $F(z)$ — некоторая R-функция.

Аналогично тому, как это было проделано для $\Delta_{A/A^*}(z)$ при доказательстве теоремы 8.1, легко показывается, что $F(z)$ имеет вид, приводящий к формуле (9.1) с указанными свойствами функции ω. Остается только пояснить, как получается соотношение (9.2). Оно выводится так же, как соотношение (8.14). Логарифмическая производная от левой и правой части (9.1) дает:

$$\mathrm{sp}\{(A - zI)^{-1} - (H - zI)^{-1}\} = \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega(\lambda; H, G)}{(\lambda - z)^2}, \tag{9.4}$$

или

$$\mathrm{sp}\,\{(H - zI)^{-1}G(A - zI)^{-1}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega(\lambda; H, G)}{(\lambda - z)^2}.$$

Положим здесь $z = \mathrm{i}y$, помножим обе части на $-y^2$ и устремим y к $+\infty$. При таком предельном переходе в правой части мы получим правую часть (9.2), а в левой части $-\mathrm{sp}\, G$, ибо

$$\lim_{y\uparrow\infty} \{y^2 \mathrm{sp}\{(H - \mathrm{i}yI)^{-1}G(A - \mathrm{i}yI)^{-1}\} = -\mathrm{sp}\, G.$$

Это равенство устанавливается аналогично тому, как соотношение (8.18).

Остается доказать последнее утверждение теоремы. Положим $A_1 = H - \mathrm{i}G_1$ и $A_2 = H - \mathrm{i}G_2$, тогда $\Delta_{H/A_2}(z)/\Delta_{H/A_1}(z) = \Delta_{A_1/A_2}(z)$. С другой стороны, если $0 \leqslant G_1 \leqslant G_2\,(\in \mathfrak{S}_1)$, то к операторам A_k $(k = 1, 2)$ применима лемма 8.5. Это дает неравенство $|\Delta_{A_1/A_2}(z)| < 1\ (z \in \mathbf{C}_+)$, а поэтому $|\Delta_{H/A_2}(z)/\Delta_{H/A_1}(z)| < 1\ (z \in \mathbf{C}_+)$. Как легко видеть, последнее соотношение эквивалентно соотношению (9.3).

ТЕОРЕМА 9.2. *Пусть $A = H - \mathrm{i}G$ ($H = H^*$) — аккумулятивный оператор с ядерной мнимой компонентой $G \in \mathfrak{S}_1$ ($G \geqslant 0$). Тогда для любой функции $\Phi(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) вида*

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda} - 1}{-\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}p(t),$$

где $p(t)$ ($0 \leqslant t < \infty$) — комплекснозначная функция с ограниченной вариацией:

$$\int_0^\infty |\mathrm{d}p(t)| < \infty,$$

имеет место равенство

$$\operatorname{sp}\{\Phi(A) - \Phi(H)\} = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\mathrm{d}\omega(\lambda; H, G). \tag{9.5}$$

Доказательство *). Поясним прежде всего, что под $\Phi(A)$ для аккумулятивного (в частности, самосопряженного) оператора A здесь понимается оператор, определенный при $f \in \mathfrak{D}(A)$ равенством

$$\Phi(A)f = \int_0^\infty \Psi(A; t) f\,\mathrm{d}p(t),$$

где $\Psi(A; 0)f = Af$; $\Psi(A; t)f = \dfrac{1}{-\mathrm{i}t}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA} - I)f$ $(t > 0)$; здесь $U_A(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}$ $(t \geqslant 0)$ — сильно непрерывная полугруппа сжатий (унитарных операторов), порожденная аккумулятивным (самосопряженным) оператором A. Естественно, что аналогичным образом понимается $\Phi(\lambda)$ для $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$.

Воспользуемся известной формулой для резольвенты порождающего оператора полугруппы:

$$R_A(\lambda) = \mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda} U_A(t)\mathrm{d}t \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0).$$

*) Приведенное доказательство принадлежит Ю. П. Гинзбургу; оно значительно проще первоначального.

Отсюда

$$R_A(\lambda)-R_H(\lambda)=\mathrm{i}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}[U_A(t)-U_H(t)]\mathrm{d}t. \tag{9.6}$$

Рассмотрим оператор-функцию

$$U_A(t)-U_H(t)=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}-I)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}. \tag{9.7}$$

Так как оператор $V(t):=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}$ при любом $t\geqslant 0$ есть сжатие, то при любом $f\in\mathfrak{H}$ имеет смысл выражение $V(t)f$, а если $f\in\mathfrak{D}(H)=\mathfrak{D}(A)$, то оно обладает производной

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}-I)f=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}\,G\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}f\quad(t\geqslant 0).$$

Стало быть,

$$(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}-I)f=-\int_0^t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sA}\,G\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}sH}f\,\mathrm{d}s\quad(f\in\mathfrak{D}(A)). \tag{9.8}$$

С другой стороны, вместе с $G\in\mathfrak{S}_1$ также $F(s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sA}\,G\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}sH}\in\mathfrak{S}_1$, причем $\|F(s)\|_1\leqslant\|G\|_1$; нетурдно видеть, что $F(s)$ $(s\geqslant 0)$ — непрерывная в ядерной норме оператор-функция. Так как $\overline{\mathfrak{D}(A)}=\mathfrak{H}$, то из (9.7), (9.8) и только что сказанного следует, что ядерно-непрерывна функция

$$U_A(t)-U_H(t)=\left[-\int_0^t F(s)\mathrm{d}s\right]U_H(t) \tag{9.9}$$

и

$$\|U_A(t)-U_H(t)\|_1\leqslant t\|G\|_1. \tag{9.10}$$

Отсюда и из (9.6) вытекает справедливость при $\operatorname{Im}\lambda>0$ равенства

$$\mathrm{sp}[R_A(\lambda)-R_H(\lambda)]=\mathrm{i}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{sp}[U_A(t)-U_H(t)]\mathrm{d}t. \tag{9.11}$$

Так как $\mathrm{sp}[R_A(z)-R_H(z)]=O((\operatorname{Im}z)^{-2})$ в верхней полуплоскости, то при $t>0$ справедлива формула обращения

$$\mathrm{sp}[U_A(t)-U_H(t)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{i}\gamma-\infty}^{\mathrm{i}\gamma+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt}\mathrm{sp}[R_A(z)-R_H(z)]\mathrm{d}z$$

(здесь γ — произвольно выбранное положительное число).

Из формулы (9.4) следует

$$\mathrm{sp}[U_A(t) - U_H(t)] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(\lambda)}{(\lambda - z)^2} \right) e^{-izt}\, dz =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{e^{-izt}\, dz}{(\lambda - z)^2} \right] d\omega(\lambda)$$

(здесь и далее $\omega(\lambda) = \omega(\lambda;\, H,\, G)$).

Выражение в квадратных скобках, как легко видеть, равно $-i \dfrac{d}{d\lambda} e^{-i\lambda t}$ и, следовательно,

$$\mathrm{sp}[e^{-itA} - e^{-itH}] = -i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} e^{-i\lambda t} d\omega(\lambda),$$

а значит, при $t > 0$

$$\mathrm{sp}[\Psi(A;\, t) - \Psi(H;\, t)] = -i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} \Psi(\lambda;\, t) d\omega(\lambda). \tag{9.12}$$

Так как $\Psi(A; 0) - \Psi(H; 0) = -iG$, а $\Psi(\lambda; 0) = \lambda$, то в силу (9.2) формула (9.12) справедлива и при $t = 0$. Отсюда

$$\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{sp}[\Psi(A;\, t) - \Psi(H;\, t)] dp(t) = -i \int\limits_{0}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} \Psi(\lambda;\, t) d\omega(\lambda) \right] dp(t),$$

или

$$\begin{aligned} &\mathrm{sp}\left[\int\limits_{0}^{\infty} \Psi(A;\, t) dp(t) - \int\limits_{0}^{\infty} \Psi(H;\, t) dp(t) \right] = \\ &= -i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} \int\limits_{0}^{\infty} \Psi(\lambda;\, t) dp(t) \right] d\omega(\lambda), \end{aligned} \tag{9.13}$$

что совпадает с (9.5). Поясним, что законность перехода от левой части (9.12) к левой части (9.13) основана на вытекающих из (9.10) и (9.9) ядерных ограниченности и непрерывности функции $\Psi(A;t)-\Psi(H;t)$ на замкнутом луче $[0, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Теорему 9.2 можно было бы обобщить, сформулировав ее для пары H_1 и $H-iG$, где H_1, H и G ($\geqslant 0$) — самосопряженные операторы, причем $H_1-H\in\mathfrak{S}_1$, $G\in\mathfrak{S}_1$. Дело в том, что для H_1 и H формула следов имеет место даже с более общим классом функций Φ.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. По-видимому, техника, развитая М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяком [3], а совсем недавно В. В. Пеллером [20], может позволить расширить класс функций Φ, для которых справедлива формула следов.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.3. Недавно автор обнаружил, что появилась статья [21], в которой при определенных ограничениях установлена формула следов для самосопряженного и максимального диссипативного операторов методом моделей и в предположении аналитичности функции Φ на спектре.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Адамян, В. М.; Павлов, Б. С., Формула следов для диссипативных операторов, *Вестн. Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., мех., астрон.*, **2**:7(1979), 5—8.
2. Баранов, Н. И.; Бродский, М. С., Треугольные представления операторов с унитарным спектром, *Функц. анализ и его прилож.*, **16**:1(1982), 58—59.
3. Бирман, М. Ш.; Соломяк, М. З., Замечания о функции спектрального сдвига, *Записки научн. семин. ЛОМИ*, **27**(1972), 33—46.
4. Бродский, В. М.; Гохберг, И. Ц.; Крейн, М. Г., Общие теоремы о треугольных представлениях операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций, *Функц. анализ и его прилож.*, **3**:4(1969), 1—27.
5. Бродский, В. М.; Гохберг, И. Ц.; Крейн, М. Г., О характеристических функциях обратимого оператора, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **32**:1—2(1971), 141—164.
6. Гохберг, И. Ц.; Крейн, М. Г., Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, *Успехи матем. наук*, **12**:2(1957), 43—118.
7. Гохберг, И. Ц.; Крейн, М. Г., *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, М., "Наука", 1965.
8. Гохберг, И. Ц.; Крейн, М. Г., *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*, М., "Наука", 1967.
9. Гохберг, И. Ц.; Крейн, М. Г., Об одном описании операторов сжатия, подобных унитарным, *Функц. анализ и его прилож.*, **1**:1(1967), 38—60.
10. Губреев, Г. М., Определение и основные свойства характеристической функции W — узла, *Доклады АН УССР, сер. А*, **1**(1978), 3—6.
11. Губреев, Г. М.; Коваленко, А. И., Об одном новом свойстве определителя возмущения слабого сжатия, *J. Operator Theory*, **10**(1983), 39—49.

12. Крейн, М. Г., О формуле следов в теории возмущений, *Матем. сборник*, **33**:3(1953), 597—626.
13. Крейн, М. Г., К теории линейных несамосопряженных операторов, *Доклады АН СССР*, **130**:2(1960), 254—256.
14. Крейн, М. Г., Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов, *Доклады АН СССР*, **144**:2(1962), 268—271.
15. Крейн, М. Г., О некоторых новых исследованиях по теории возмущений самосопряженных операторов, Первая летняя математическая школа (г. Канев, июнь — июль 1963 г.), Киев, "Наукова думка", 1964, 103—188.
16. Крейн, М. Г., Аналитические проблемы и результаты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Труды международного конгресса математиков*, М., "Мир", 1968, 189—216.
17. Кужель, А. В., Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов, *Доклады АН СССР*, **125**:1(1959), 35—37.
18. Лившиц, М. С., О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, *Матем. сборник*, **34**:1(1954), 145—198.
19. Любич, Ю. И.; Мацаев, В. И., Об операторах с отделимым спектром, *Матем. сборник*, **54**:4(1962), 433—468.
20. Пеллер, В. В., Операторы Ганкеля в теории возмущений унитарных и самосопряженных операторов, *Функц. анализ и его прилож.*, **19**:2(1985), 37—51.
21. Рыбкин, А. В., Функция спектрального сдвига для диссипативного и самосопряженного операторов и формула следов для резонансов, *Матем. сборник*, **125**:3(1984), 420—430.
22. Сахнович, Л. А., Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром, *Труды Московского математич. общества*, **19**(1968), 211—270.
23. Сахнович, Л. А., Неунитарные операторы с абсолютно непрерывным спектром на единичной окружности, *Доклады АН СССР*, **181**:3(1968), 558—561.
24. Сахнович, Л. А., О J-унитарной дилатации ограниченного оператора, *Функц. анализ и его прилож.*, **8**:3(1974), 83—84.
25. Секефальви-Надь, Б.; Фояш, Ч., *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, М., "Мир", 1970.
26. Davis, C.; Foiaş, C., Operators with bounded characteristic function and their J-unitary dilatation, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **32**(1971), 127—139.
27. Langer, H., Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum, *Acta Math. Hung.*, **12** (1961), 441—445.
28. Langer, H., Eine Erweiterung der Spurformel der Störungstheorie, *Math. Nachr.*, **30**(1965), 123—135.
29. Phillips, R. S., Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90**:2(1959), 193—254.
30. Van Castern, J. A., A problem of Sz.-Nagy, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **42**(1980), 189—194.

M. G. KREĬN
ul. Artema 14, kv. 6,
Odessa 270057,
U.S.S.R.

Received July 17, 1986.