J. OPERATOR THEORY
20(1988), 269–293

SUR LES CONTRACTIONS À CALCUL FONCTIONNEL ISOMÉTRIQUE. II

BERNARD CHEVREAU

1. INTRODUCTION

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, complexe, séparable, de dimension infinie et soit $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'algèbre des opérateurs (linéaires bornés) sur $\mathscr{H}$. La classe $\mathbf{A}$ ($= \mathbf{A}(\mathscr{H})$) est l'ensemble des contractions T, sur $\mathscr{H}$, absolument continues, pour lesquelles le calcul fonctionnel de Sz.-Nagy—Foiaş, $\Phi_T \colon H^\infty \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$, est isométrique. (Nous désignons par H^∞ l'algébre des fonctions analytiques bornées dans le disque unité ouvert $\mathbf{D}$, canoniquement identifiée avec l'algèbre $H^\infty(\mathbf{T})$ constituée des éléments de $L^\infty(\mathbf{T})$ dont les coefficients de Fourier d'indice strictement négatifs sont nuls; $\mathbf{T}$ désigne le cercle unité.) On sait (cf. [5, Chapter IV]) que pour $T \in \mathbf{A}$, l'image de Φ_T coincide avec $\mathscr{A}_T$, l'algèbre duale engendrée par T, et que Φ_T est un homéomorphisme faible* de H^∞ sur $\mathscr{A}_T$. Rappelons qu'une algèbre duale sur $\mathscr{H}$ est une sous-algèbre (unitaire) de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ fermée pour la topologie faible* de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ résultant de la dualité $\mathscr{L}(\mathscr{H}) = (\mathscr{C}^1(\mathscr{H}))'$, où $\mathscr{C}^1(\mathscr{H})$ désigne l'espace de Banach des opérateurs à trace finie sur $\mathscr{H}$. (Pour une telle algèbre duale, $\mathscr{A}$, on a, en effet, $\mathscr{A} = (Q_{\mathscr{A}})'$ avec $Q_{\mathscr{A}} = \mathscr{C}^1(\mathscr{H})/{}^\perp\mathscr{A}$.) Ce concept introduit par S. Brown dans sa solution (positive) du problème du sous-espace invariant pour les opérateurs sous-normaux (cf. [7]) s'est révélé particulièrement fécond pour l'étude des opérateurs, notamment de certaines contractions (cf. [5] pour les développements essentiels jusqu'en 84 et ([Chapitres III et IV, de l'introduction de [13]) pour un aperçu de résultats récents).

Étant donnée une algèbre duale, $\mathscr{A}$, sur $\mathscr{H}$, nous écrivons $[L]$, $L \in \mathscr{C}_1(\mathscr{H})$, pour l'élément générique de $Q_{\mathscr{A}}$, et $x \otimes y$ pour l'opérateur de rang $\leqslant 1$ associé aux vecteurs x et $y \in \mathscr{H}$, ($(x \otimes y)(u) = (u, y)x$). On dit que $\mathscr{A}$ a la propriété (A_1) si tout $[L]$ de $Q_{\mathscr{A}}$ peut se mettre sous la forme $[L] = [x \otimes y]$. Si, de plus, pour tout $s > \rho$, on peut réaliser cette égalité avec $\|x\| \cdot \|y\| \leqslant s\|[L]\|$ on dit que $\mathscr{A}$ a la propriété $(\mathrm{A}_1)(\rho)$.

La classe $\mathbf{A}_1$ (resp. $\mathbf{A}_1(\rho)$) est l'ensemble des $T \in \mathbf{A}$ tels que $\mathscr{A}_T$ ait la propriété (A_1) (resp. $(\mathrm{A}_1)(\rho)$). Ces classes, introduites formellement dans [5] ont été l'objet de nombreux travaux. En effet, un argument élémentaire montre que toute contraction de la classe $\mathbf{A}_1$ possède des sous-espaces invariants et un résultat d'Apostol ([1, Theorem 2.2]) permet de se ramener, pout $\|T\| \leqslant 1$ et $\sigma(T) \supset \mathbf{T}$, au cas $T \in \mathbf{A}$ dans la recherche de sous-espaces invariants. Ceci explique le rôle joué par la conjecture $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$ ([4, Conjecture 4.7]) dans le problème du sous-espace invariant pour contractions T dont le spectre, $\sigma(T)$, contient $\mathbf{T}$, résolu récemment (positivement) dans [9].

Les techniques de [9] laissent toutefois ouverte la conjecture ci-dessus dont l'intérêt dépasse largement le cadre du problème du sous-espace invariant (cf. [5, Chapters IV et V] pour des résultats de structure concernant $T \in \mathbf{A}_1$ ainsi que [16] et [17], pour des résultats de réflexivité liés aux opérateurs de la sous-classe $\mathbf{A}_{1,\aleph_0} \cup \mathbf{A}_{\aleph_0,1}$ de $\mathbf{A}_1$). L'objet du présent article est d'en établir la validité complète en démontrant le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Il existe* $\rho\,(>1)$ *tel que* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1(\rho)$.

Ce théorème a été prouvé également (indépendamment et simultanément) par H. Bercovici avec, en outre, la meilleure constante possible: $\rho = 1$.

Nous concluons cette introduction par une brève description du plan de l'article. Le § 2 développe les notations que nous utiliserons tout au long de l'article concernant la dilatation unitaire minimale d'une contraction ainsi qu'une version de techniques de [19] appliquée à des compressions d'un opérateur de la classe $\mathbf{A}$. Dans le §3 nous introduisons le concept de borélien essentiel pour une contraction absolument continue et nous formulons ensuite dans ce cadre la technique d'approximation de [3] (perfectionnée dans [28]) (§ 4).

Le § 5 est consacré à la démonstration du résultat (annoncé dans [14]) $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{1/2}(\rho)$ pour un certain $\rho \geqslant 1$, c'est-à-dire: pour tout $T \in \mathbf{A}$, tout $[L] \in Q_T$ et tout $s > \rho$ on peut écrire $[L] = [x_1 \otimes y_1] + [x_2 \otimes y_2]$ avec $\|x_1\|\,\|y_1\| + \|x_2\|\,\|y_2\| \leqslant s\|[L]\|$. Notre démonstration du théorème 1 donnée au § 6 s'appuie de façon essentielle sur ce résultat intermédiaire (plus précisément sur $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{1/2}$). Nous développons en conclusion quelques corollaires dans la ligne des résultats de [16] concernant notamment la réflexivité.

Une rédaction préliminaire de cet article a circulé sous forme de préprint ([30]), suite à un séjour de recherche à l'INCREST en juin 87 pendant lequel la plupart des démonstrations ont été mises au point. Le résultat $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1(\rho)$ a été annoncé lors d'une conférence à l'Université de Bucarest pendant ce même séjour.

2. PRÉLIMINAIRES

Les techniques de [19] reposent sur un usage systématique de l'extension coisométrique minimale (notation: e.c.i.m.) d'une contraction et, par "dualité", de la dilatation isométrique minimale (d.i.m.). Il sera commode de "regrouper les deux" en utilisant la dilatation unitaire minimale (notation: d.u.m.). Nous rappelons brièvement les faits essentiels en suivant, en général, la terminologie de [24, Chapter II].

Si T est une contraction absolument continue, sa d.u.m. $U \in \mathscr{L}(\mathscr{U})$ $(\mathscr{U} \supset \mathscr{H})$ est également absolument continue. La d.i.m., U_+, de T est la restriction de U au sous-espace $\mathscr{U}_+ = \bigvee_{n \geqslant 0} U^n \mathscr{H}$ invariant pour U. Nous écrivons $U_+ = S_* \oplus R$, (S_* shift à droite agissant sur un espace $\mathscr{S}_*$, R unitaire absolument continu agissant sur $\mathscr{R}$ (R est la partie résiduelle de U)) la décomposition de Wold de U_+. De même, l'e.c.i.m., B, de T est la compression de U au sous-espace $\mathscr{B} = \bigvee_{n \leqslant 0} U^n \mathscr{H} = \bigvee_{n \geqslant 0} U^{*n} \mathscr{H}$, invariant pour U^* (donc semi-invariant pour U) et la décomposition de Wold de B^* donne $B = S^* \oplus R_*$, S^* shift à gauche agissant sur un espace $\mathscr{S}$ réduisant pour B et R_*, partie $*$-résiduelle de U, unitaire sur $\mathscr{R}_*$. Rappelons que $\mathscr{S}_*$ et $\mathscr{S}$ sont non réduits à (0) dès que T est non unitaire et que $\mathscr{R} = (0)$ (resp. $\mathscr{R}_* = (0)$) si et seulement si $T \in C_{\cdot 0}$ (resp. $T \in C_{0\cdot}$) c'est-à-dire $\forall x$, $\|T^{*n}x\| \to 0$ (resp. $\forall x$, $\|T^n x\| \to 0$). Nous désignons par Q, Q_*, A, A_*, P les projections orthogonales de $\mathscr{U}$ sur les sous-espaces $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}_*$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_*$, $\mathscr{H}$ (le lecteur remarquera le changement de notations par rapport à [19] et [17] où nous n'utilisons que B).

Il est bien connu (cf. [5, Proposition 8.3]) que pour toute contraction absolument continue, $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, il existe une application sesquilinéaire $\mathscr{H} \times \mathscr{H} \to L^1(\mathbf{T})$ $(x, y) \to x \overset{T}{\cdot} y$. La fonction $x \overset{T}{\cdot} y$ peut être définie par sescoefficients de Fourier ($(T^n x, y)$ pour $n \leqslant 0$, $(T^{*n}x, y)$ pour $n > 0$). Alternativement $x \overset{T}{\cdot} y$ est la densité de la mesure $(E(\cdot)x, y)$ (où E désigne la mesure spectrale de U sur $\mathbf{T}$) par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}$, notée m. On a donc, pour $x, y \in \mathscr{H}$,

$$x \overset{T}{\cdot} y = x \overset{U}{\cdot} y = x \overset{U_-}{\cdot} y.$$

Dans une telle situation on écrira donc simplement $x \cdot y$. Il résulte facilement de l'une ou l'autre des définitions de $x \cdot y$ que $[x \cdot y] = \varphi_T([x \otimes y]_T)$, φ_T désignant l'application (contractante) de Q_T $(= Q_{\mathscr{A}_T})$ dans le prédual L^1/H_0^1 de H^∞ telle que $(\varphi_T)^* = \Phi_T$. Posant, pour $T \in \mathbf{A}$ et $f \in L^1(T)$, $[f]]_T = \varphi_T^{-1}([f]_{L^1/H_0^1})$, on a donc $[x \otimes y]_T = [x \cdot y]]_T$, $x, y \in \mathscr{H}$.

Les opérateurs unitaires R et R_* étant absolument continus il existe des boréliens Σ et Σ_* de $\mathbf{T}$ tels que les mesures m_Σ et m_{Σ_*} (définies par $m_\Sigma(E) = m(E \cap \Sigma)$, E borélien de $\mathbf{T}$ et de façon analogue pour m_{Σ_*}) soient des mesures spectrales scalaires pour R et R_*, respectivement (cf. [20] pour la notion de mesure spectrale scalaire). Ici, il revient au même de dire que, par exemple, Σ est le borélien minimal (à un borélien m-négligeable près) supportant toutes les fonctions $u \cdot v$, u, $v \in \mathscr{R}$. On sait ([17, théoréme 2.5]) que si $\Sigma_* = \mathbf{T}$ (ou $\Sigma = \mathbf{T}$) on a $T \in \mathbf{A}_1(1)$. Ceci nous permettra de supposer dans les lemmes préparatoires au théorème 1 que $m(\mathbf{T} \setminus \Sigma) > 0$ et

$m(\mathbf{T} \setminus \Sigma_*) > 0$. De même, le principal résultat de [3] ($(C_{0\cdot} \cup C_{\cdot 0}) \cap \mathbf{A} \subset \mathbf{A}_1(r)$) permet de supposer $m(\Sigma)$ et $m(\Sigma_*)$ strictement positifs.

Nous présentons maintenant une extension des techniques de [19] et [27], basée sur une "localisation" des ensembles $\mathscr{E}_\theta^r(\mathscr{A}_T)$ à un sous-espace $\mathscr{M}$ semi-invariant pour T. Rappelons que $\mathscr{M}$ est dit semi-invariant pour T si $\mathscr{M} = \mathscr{N}_1 \cap \mathscr{N}_2^\perp$ avec $\mathscr{N}_1 \subset \mathscr{N}_2$ et $\mathscr{N}_i \in \operatorname{Lat} T$, $i = 1, 2$. ($\operatorname{Lat} T$ désigne, comme d'habitude, le treillis des sous-espaces invariants de T.) De façon équivalente $\mathscr{M} \in \mathrm{SI}(T)$ (l'ensemble des sous-espaces semi-invariants pour T) si et seulement si, pour tout entier k,

$$(T^k)_{\mathscr{M}} u = (T_{\mathscr{M}})^k u, \quad u \in \mathscr{M}.$$

(Pour $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ et $\mathscr{M}$ sous-espace de $\mathscr{H}$, $A_{\mathscr{M}}$ désigne la compression de A à $\mathscr{M}$, c'est-à-dire l'élément de $\mathscr{L}(\mathscr{M})$ tel que $A_{\mathscr{M}} u = P_{\mathscr{M}} A u$, $u \in \mathscr{M}$.) Nous énonçons d'abord une version séquentielle de [19, Theorem 3.11].

PROPOSITION 2.1. *Soit T une contraction absolument continue sur $\mathscr{H}$ d'e.c.i.m. $B = S^* \oplus R_* \in \mathscr{L}(\mathscr{S} \oplus \mathscr{R}_*)$ telle que $\overline{A_* \mathscr{H}} = \mathscr{R}_*$. Etant donnés $a \in \mathscr{H}$, $b \in \mathscr{R}_*$, $h \in L^1(\Sigma_*)$, il existe une suite $(v_p) \subset \mathscr{H}$ convergeant faiblement vers 0 et une suite $(r_p) \subset \mathscr{R}_*$ telles que*

(i) $\lim_{p \to \infty} \|A_{*a} \cdot b + h - A_*(a + v_p) \cdot r_p\| = 0$,

(ii) $\|v_p\| \leqslant 2\|h\|^{1/2}$,

(iii) $\|r_p\| \leqslant \|b\| + \|h\|^{1/2}$,

(iv) $\|Qv_p\| \to 0$.

Preuve. C'est une adaptation aisée de [19, Theorem 3.11]. Nous nous bornons à deux indications. La condition $\overline{A_* \mathscr{H}} = \mathscr{R}_*$ permet d'obtenir la conclusion du théorème avec $\rho = 1$. On obtient sans difficulté la version séquentielle en se basant sur le fait que, pour tout $\zeta \in \mathscr{R}_*$, $R_*^n \zeta$ converge faiblement vers 0 (en effet, $(R_*^n \zeta, \omega)$ est le coefficient de Fourier d'indice $-n$ de $\zeta \overset{\mathscr{R}_*}{\cdot} \omega$).

DÉFINITION 2.2. Etant donnés $\mathscr{M} \in \mathrm{SI}(T)$, $\mathscr{L}$ un sous-espace de $\mathscr{H}$ intermédiaire entre $\mathscr{M}$ et $\mathscr{H}$ et $\theta \in [0,1]$ nous désignons par $\mathscr{E}_\theta^r(\mathscr{A}_T, \mathscr{M}, \mathscr{L})$ l'ensemble des $[L]$ de Q_T pour lesquels il existe des suites (x_n), (y_n) dans la boule unité fermée de $\mathscr{M}$ vérifiant:

(i) $\lim \|[L] - [x_n \otimes y_n]\| \leqslant \theta$

(ii) $\forall\, \omega \in \mathscr{L}$, $\|[x_n \otimes \omega]\| \to 0$ et $y_n \to 0$ faiblement.

On définit de même $\mathscr{E}_\theta^l(\mathscr{A}_T, \mathscr{M}, \mathscr{L})$ par symétrie sur la 2-ème condition. Si $\mathscr{L}$ coïncide avec $\mathscr{H}$ on se dispensera de l'écrire. Autrement dit, $\mathscr{E}_\theta^r(\mathscr{A}_T, \mathscr{M}) = \mathscr{E}_\theta^r(\mathscr{A}_T, \mathscr{M}, \mathscr{H})$ et, de même, en accord avec la définition donnée dans [19] on écrira $\mathscr{E}_\theta^r(\mathscr{A}_T) =$

$=\mathcal{E}_0^r(\mathscr{A}_T, \mathscr{H})$. Pour $\mathscr{M} \in \mathrm{SI}(T)$ on affectera de l'indice-exposant $\mathscr{M}$ les diverses notions liées à la d.u.m. de $T_{\mathscr{M}}$ (i.e. $U^{\mathscr{M}}$, $U_+^{\mathscr{M}}$, $B^{\mathscr{M}}, \ldots, Q^{\mathscr{M}}, \ldots, \Sigma_*^{\mathscr{M}}, \ldots$ etc.). Notons que si $T \in \mathbf{A}$ et $\mathscr{M} \in \mathrm{SI}(T)$ avec $T_{\mathscr{M}}$ non unitaire l'e.c.i.m. de $T_{\mathscr{M}}$, $B^{\mathscr{M}}$, est également dans $\mathbf{A}$. L'application $j = \varphi_{B^{\mathscr{M}}}^{-1} \circ \varphi_T$ est donc une isométrie de Q_T sur $Q_{B^{\mathscr{M}}}$, qui possède des propriétés analogues à celles développées pour $\varphi_B^{-1} \circ \varphi_T$ dans [19, Lemmas 3.5—3.8]. En outre, on a immédiatement $j([f]]_T) = [f]]_{B^{\mathscr{M}}}$ pour $f \in L^1(\mathbf{T})$. Le lemme suivant s'inspire de [19, Proposition 4.6]. Nous le donnons sous une forme assez technique pour éviter des répétitions aux § § 5 et 6. (Ω étant une partie d'un espace vectoriel normé X, ecef(Ω) désigne l'enveloppe convexe équilibrée fermée de Ω dans X.)

LEMME 2.3. *Soient $T \in \mathbf{A}$, $\mathscr{M} \in \mathrm{SI}(T)$ avec $T_{\mathscr{M}}$ non unitaire et $\overline{A_*^{\mathscr{M}}(\mathscr{M})} = \mathscr{R}_*^{\mathscr{M}}$, $\mathscr{L}$ un sous-espace de $\mathscr{H}$ contenant $\mathscr{M}$, $c, d \in \mathscr{M}$, $[K] \in \beta\mathrm{ecef}\mathcal{E}_0^r(\mathscr{A}_T, \mathscr{M}, \mathscr{L})$, $f \in L^1(\Sigma_*^{\mathscr{M}})$ et des scalaires $\theta \in]0,1[$, $0 < \beta < \delta_1$, $\delta_2 > \|f\|_1$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$.*

Alors il existe des suites (c_p), (d_p) dans $\mathscr{M}$ telles que, pour tout p, on ait

(1) $$\|[c \otimes d] + [K] + [f]] - [c_p \otimes d_p]\| < \theta\delta_1,$$

(2) $$\|c_p - c\| < 3\delta^{\frac{1}{2}}, \quad \|d_p\| < \|d\| + \delta^{\frac{1}{2}}, \ et$$

(3) *plus précisément $c_p - c = u_p + \tilde{u}_p$ avec $\|u_p\| < \delta_1^{1/2}$, $\|\tilde{u}_p\| < 2\delta^{1/2}$, $\|[u_p \otimes \omega]\| \to 0$, pour tout $\omega \in \mathscr{L}$, $\tilde{u}_p \to 0$ faiblement et $\|Q^{\mathscr{M}}\tilde{u}_p\| \to 0$.*

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous nous dispensons, dans cette démonstration, d'écrire les indices exposants "$\mathscr{M}$". Nous nous donnons $\varepsilon > 0$ tel que $\beta\theta + 6\varepsilon < \theta\delta_1$, une suite (z_j) dense dans $\mathscr{L}$ et une suite de réels positifs (ε_j) décroissante vers 0 avec $\varepsilon_1 = \varepsilon$. L'hypothèse sur $[K]$ entraîne l'existence d'éléments $[K_i] \in \mathcal{E}_0^r(\mathscr{A}_T, \mathscr{M}, \mathscr{L})$, $i = 1, \ldots, N$ et de scalaires α_i, $i = 1, \ldots, N$ tels que

$$\left\| [K] - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [K_i] \right\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \leqslant \beta.$$

Soient p un entier fixé et, pour $i = 1, \ldots, N$, $(x_{i,n})$, $(y_{i,n})$ les suites traduisant l'appartenance de $[K_i]$ à $\mathcal{E}_0^r(\mathscr{A}_T, \mathscr{M}, \mathscr{L})$. Quitte à supprimer un nombre fini de termes dans chacune des suites on peut supposer que, pout $i \leqslant N$ et tout n, on a

(a) $$\|[x_{i,n} \otimes z_j]\| < \varepsilon_p \bigg/ \left(\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^{\frac{1}{2}} \right), \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$
$$\text{et}$$
$$\|[K_i] - [x_{i,n} \otimes y_{i,n}]\| < \theta + \varepsilon/\delta_1.$$

Etant donné un N-uplet $\nu = (n_1, \ldots, n_N)$ nous posons

$$[L_\nu] = [c \otimes d]_B + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [x_{i,n} \otimes y_{i,n}]_B + [f]]_B$$

(rappelons qu'ici $B = B^{(a)}$). Ainsi

(b) $\qquad \|[L_\nu] - j([c \otimes d]_T + [K] + [f]]_T)\| < \varepsilon + \beta(\theta + \varepsilon/\delta_1) < \beta\theta + 2\varepsilon.$

Nous transformons $[L_\nu]$ comme dans [19, Proposition 4.6]. Tout d'abord: $[L_\nu] = [P_\nu] + [M_\nu]$ avec

$$[P_\nu] = [Qc \otimes Qd]_B + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [Qx_{i,n_i} \otimes Qy_{i,n_i}]_B$$

et

$$[M_\nu] = [A_* c \otimes A_* d]_B + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [A_* x_{i,n_i} \otimes A_* y_{i,n_i}]_B + [f]]_B.$$

Soient $u_\nu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{1/2} x_{i,n_i}$, $\bar{u}_\nu = \sum_{i=1}^{N} \bar{\alpha}_i^{1/2} y_{i,n_i}$; en suivant la démonstration de [19, Proposition 4.6], nous pouvons choisir ν_p tel que, avec $u_p = u_{\nu_p}$, on ait

$$\|[P_{\nu_p}] - [Q(c + u_p) \otimes Q(d + \bar{u}_p)]\| < \varepsilon,$$

$$\|c + u_p\|^2 \simeq \|c\|^2 + \|u_p\|^2,$$

$$\|d + \bar{u}_p\|^2 \simeq \|d\|^2 + \|\bar{u}_p\|^2,$$

$$\|\bar{u}_p\|^2,\ \|u_p\|^2 \simeq \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| < \delta_1, \text{ et}$$

$$\|[A_* u_p \otimes A_* d]\| < \varepsilon.$$

Posons $\tilde{c}_p = c + u_p$ et désignons par x_i^p, y_i^p les x_{i,n_i}, y_{i,n_i} figurant dans u_p, $\bar{u}_p$. Il résulte de la dernière inégalité ci-dessus que $\|[M_p]_B - [M_{\nu_p}]\| < \varepsilon$ avec $M_p = A_* \tilde{c}_p \cdot A_* d + h$ et $h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_* x_i^p \cdot A_* y_i^p + f$.

La proposition 2.1 permet maintenant de trouver $\tilde{u}_p \in \mathscr{H}$ et $r_p \in \mathscr{R}_*$ tels que

$$\|M_p - A_*(\tilde{c}_p + \tilde{u}_p) \cdot r_p\| < \varepsilon,$$

$$\|\tilde{u}_p\| < 2\delta^{\frac{1}{2}},\quad \|r_p\| \leqslant \|A_* d\| + \|h\|^{\frac{1}{2}},$$

$$\|Q\tilde{u}_p\| < \varepsilon_p/(1 + \|d\| + \|\bar{u}_p\|) \quad \text{et} \quad |(u_p, z_j)| < \varepsilon_p, \quad j = 1, \ldots, p.$$

On a alors, avec $c_p = \tilde{c}_p + \tilde{u}_p$,

$$\|[M_r]] - [A_* c_p \otimes r_p]\| < \varepsilon$$

$$\|[P_{\nu_p}] - [Qc_p \otimes Q(d + \tilde{u}_p)]\| < 2\varepsilon.$$

Nous en déduisons (car $\|[L_{\nu_p}] - \{[M_p]] + [P_{\nu_p}]\}\| = \|[M_{\nu_p}] - [M_p]]\| < \varepsilon$) $\|[L_{\nu_p}] - [c_p \otimes (Q(d + \tilde{u}_p) + r_p)]\| < 4\varepsilon$, soit, avec $d_p = P(Q(d + \tilde{u}_p) + r_p)$

$$\|[L_{\nu_p}] - [c_p \otimes d_p]_B\| < 4\varepsilon.$$

Via l'inégalité (b) et j^{-1}, nous obtenons

$$\|[c_p \otimes d_p]_T - \{[c \otimes d]_T + \beta[K] + [f]]_T\| < 4\varepsilon + \beta\theta + 2\varepsilon \leqslant \theta\delta_1.$$

En cours de route on a vu que $\|u_p\| < \delta^{1/2}$, $\|\tilde{u}_p\| < 2\delta^{1/2}$, ce qui entraîne $\|c_p - c\| < < 3\delta^{1/2}$. Par ailleurs,

$$\|d_p\| \leqslant (\|Q(d + \tilde{u}_p)\|^2 + \|r_p\|^2)^{\frac{1}{2}} \simeq (\|Qd\|^2 + \|Q\tilde{u}_p\|^2 + \|r_p\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

et, en se basant sur $\|r_p\| \leqslant \|A_* d\| + \|h\|^{1/2}$, on obtient l'inégalité désirée concernant $\|d_p\|$. De (a) on déduit $\|[u_p \otimes z_j]\| < \varepsilon_p$, $j = 1, \ldots, p$ qui entraîne, par un argument standard de densité $\|[u_p \otimes w]\| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ pour tout $w \in \mathscr{L}$. De même, des inégalités $|(\tilde{u}_p, z_j)| < \varepsilon_p$, $j = 1, \ldots, p$, on déduit la convergence faible vers 0 de $\tilde{u}_p$. Enfin $\lim\limits_{p\to\infty} \|Q^{\mathscr{M}}\tilde{u}_p\| = 0$ est immédiat.

Le lemme précédent admet une version duale dont la démonstration peut se baser sur $U_+^{\mathscr{M}}$.

LEMME 2.4. *Les données étant les mêmes que dans le lemme* 2.3 *sauf:* $\Sigma^{\mathscr{M}}$ *au lieu de* $\Sigma_*^{\mathscr{M}}$, $([K]/\beta) \in \operatorname{ecef} \mathscr{E}_0^1(\mathscr{A}_T, \mathscr{M}, \mathscr{L})$, $a, b \in \mathscr{M}$. *Alors il existe des suites* (a_p), (b_p) *dans* $\mathscr{M}$ *telle que, pour tout* p,

$$\|[a \otimes b]_T + [K] + [f]]_T - [a_p \otimes b_p]\| < \theta\delta_1$$

$$\|b_p - b\| < 3\delta^{1/2}, \quad \|a_p\| \leqslant \|a\| + \delta^{1/2}.$$

Plus précisément $b_p - b = v_p + \tilde{v}_p$ *avec* $\|v_p\| < \delta_1^{1/2}$, $\|\tilde{v}_p\| < 2\delta^{1/2}$, $\forall\, w \in \mathscr{L}$ $\|[w \otimes v_p]\| \to 0$, $\tilde{v}_p \to 0$ *faiblement, et* $\|Q_*^{\mathscr{M}}\tilde{v}_p\| \to 0$.

3. ENSEMBLES ESSENTIELS POUR UNE CONTRACTION ABSOLUMENT CONTINUE

DÉFINITION 3.1. Soit T une contraction absolument continue. Un borélien E de $\mathbf{T}$ est dit *essentiel pour* T si

(1) $$\|h(T)\| \geqslant \|h\|_E \quad \text{pour tout } h \in H^\infty \quad (\|h\|_E = \|h|E\|_\infty).$$

(Nous conviendrons que tout borélien négligeable est essentiel pour T.)

Ainsi $T \in \mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{T}$ est essentiel pour T. Remarquons également que si E est essentiel pour T alors $E^* = \{e^{-it};\ e^{it} \in E\}$ est essentiel pour T^*.

La proposition suivante donne diverses caractérisations des ensembles essentiels. (Pour $X \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, $\|X\|_e$, $r(X)$ et $\sigma_e(X)$ désignent respectivement la norme essentielle, le rayon spectral et le spectre essentiel de X.)

PROPOSITION 3.2. *Pour une contraction absolument continue T sur $\mathscr{H}$ et un borélien non négligeable E de $\mathbf{T}$ les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(1) *E est essentiel pour T;*

(2) *Pour tout $h \in H^\infty$, on a $r(h(T)) \geqslant \|h\|_E$;*

(3) *Pour tout $h \in H^\infty$ tel que $\|h\| = \|h\|_E$, on a $\|h(T)\| = \|h\|_E$.*

De plus ces affirmations sont équivalentes à chacune des affirmations $(1)_e$, $(2)_e$, $(3)_e$ *obtenue en remplaçant dans* (1), (2), (3) *norme et rayon spectral de $h(T)$ par norme essentielle et rayon spectral essentiel. Enfin elles sont encore équivalentes à:*

(4) *L'opérateur $T' = T \oplus M_{e^{it}|L^2(\mathbf{T}\setminus E)}$ est dans la classe* $\mathbf{A}$.

Démonstration. Soit E essentiel pour T; de $r(h(T)) = \lim\|h(T)^n\|^{1/n} = \lim\|h^n(T)\|^{1/n} \geqslant \lim(\|h^n\|_E)^{1/n} = \|h\|_E$ on obtient (2). Ainsi (1) entraîne (2).

L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) résulte immédiatement de l'inégalité générale $r(h(T)) \leqslant \|h(T)\| \leqslant \|h\|$.

Supposons maintenant que E vérifie (3) et soit $h \in H^\infty$ non nulle; choisissons $\varepsilon > 0$, tel que $\varepsilon\|h\| < \|h\|_E$. D'après, par example, [21, p. 53] il existe $g \in H^\infty$ telle que

$$|g| = \begin{cases} 1 & \text{sur } E \\ \varepsilon & \text{sur } \mathbf{T}\setminus E. \end{cases}$$

On a alors $\|gh\| = \|gh\|_E$ et

$$\|h(T)\| \geqslant \|h(T)\|\,\|g(T)\| \geqslant \|h(T)g(T)\| \geqslant \|(gh)(T)\| = \|gh\|_E = \|h\|_E.$$

Les équivalences $(1)_e \Leftrightarrow (2)_e \Leftrightarrow (3)_e$ se démontrent de la même façon. Comme $(\mathrm{i})_e$ entraîne trivialement (i), i $= 1, 2, 3$, il suffit d'établir, pour conclure les deux premières séries d'équivalences, que, par exemple, (3) entraîne $(3)_e$. Soient donc E vérifiant (3) et $h \in H^\infty$ telle que $\|h\| = \|h\|_E = 1$. On a, d'après (2), $r(h(T)) = 1$ et, par "rotation" on peut supposer $1 \in \sigma(h(T))$. Il existe donc une suite de vecteurs unitaires (x_n) telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\|(h(T)-1)x_n\| = 0$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}\|((h(T))^* - 1)x_n\| = 0$. Soit (x_{n_k}) une sous-suite de (x_n) faiblement convergente vers x. On a suivant, le cas,

$$h(T)x = x, \quad \text{ou} \quad (h(T))^* x = x.$$

Il est bien connu (cf. [24, Theorem 10.2.3]) que pour T absolument continue et $\|h\| \leqslant 1$, $h(T)$ est une contraction absolument continue. Il en résulte que $x = 0$ et, qu'en fait, la suite (x_n) elle-même converge faiblement vers 0. Ceci prouve bien $1 \in \sigma_e(h(T))$ et donc que $\|h(T)\|_e \geqslant 1$.

Finalement des égalités:

$$\|h(T)\| = \mathrm{Max}\{\|h(T)\|, \|h\|_{\mathbf{T}\setminus E}\} \quad \text{et} \quad \|h\| = \mathrm{Max}\{\|h\|_E, \|h\|_{\mathbf{T}\setminus E}\}$$

on déduit l'équivalence de (4) avec (3).

De la définition il résulte facilement que toute réunion (borélienne) d'ensembles essentiels pour T est encore essentielle pour T. Ceci permet d'établir l'existence d'un borélien essentiel maximal (défini à un borélien négligeable près) pour T.

PROPOSITION 3.3. *Soit T une contraction absolument continue. Il existe un borélien E_T (éventuellement négligeable) essentiel pour T tel que pour tout borélien E, essentiel pour T, on ait $m(E\setminus E_T) = 0$.*

Démonstration. Soit $\gamma = \sup\{m(E);\ E$ essentiel pour $T\}$. Si $\gamma = 0$ on prend $E_T = \emptyset$. Sinon soit (γ_n) une suite de réels strictement croissante convergente vers γ. Pour chaque n il existe E_n borélien essentiel pour T tel que $m(E_n) > \gamma_n$. L'ensemble $E_T = \bigcup\limits_n E_n$ est un borélien essentiel pour T (d'après l'observation précédente) quit vérifie nécessairement $m(E_T) = \gamma$. De la définition de γ on déduit facilemen $m(E\setminus E_T) = 0$ pour tout E essentiel pour T.

Pour la suite faisons la convention que inclusions (et egalités) ensemblistes concernant E_T s'entendent "à un borélien négligeable près".

La proposition suivante donne quelques informations supplémentaires sur E_T. (Pour $\Omega \subset \mathbf{D}$, $\mathrm{LNT}(\Omega)$ désigne l'ensemble des points de $\mathbf{T}$ limites non tangentielles de points de Ω. Un tel ensemble est toujours borélien.)

PROPOSITION 3.4. *Soit T une contraction absolument continue.*

a) *On a $\Sigma \cup \Sigma_* \subset E_T$.*

b) $\mathrm{NTL}(\sigma(T)) \subset E_T$; *plus généralement* $\mathrm{NTL}(\zeta_a(T)) \subset E_T$ *pour tout $a > 1$ avec*

$$\zeta_a(T) = (\sigma(T) \cap \mathbf{D}) \cup \left\{\lambda \in \mathbf{D}\setminus\sigma(T) \colon \|(T-\lambda)^{-1}\| > \frac{a}{1-|\lambda|}\right\}.$$

Démonstration. a) Prouvons, par exemple, que Σ_* est essentiel pour T. On peut supposer $m(\Sigma_*) < 1$ (sinon $T \in \mathbf{A}$ et le résultat est acquis). Soit $h \in H^\infty$ telle que $\|h\|_{\Sigma_*} = \|h\| = 1$. On a donc $\|h(R_*)\| = 1$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $y \in \mathscr{R}_*$ tel que $\|h(R_*)y\| > 1 - \varepsilon/2$ et $\|y\| < 1$. Puisque $(A_*\mathscr{H})^- = \mathscr{R}_*$, il existe $x_1 \in \mathscr{H}$ tel que

$$\|y - A_* x_1\| < \inf(\varepsilon/2,\ 1 - \|y\|).$$

Pour tout n, on a $\|h(R_*)R_*^n y\| = \|h(R_*)y\| > 1 - \varepsilon/2$. Il en résulte

$$\|A_* h(T)T^n x_1\| = \|h(R_*)R_*^n A_* x_1\| > 1 - \varepsilon.$$

On a donc $\|h(T)x_n\| > 1 - \varepsilon$ avec $x_n = T^n x_1$; comme $\|T^n x_1\| \to \|A_* x_1\| < 1$, on a, pour n assez grand, $\|x_n\| < 1$ et, donc, $\|h(T)\| > 1 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. On obtient bien la conclusion voulue: $\|h(T)\| = 1$.

b) Soit $h \in H^\infty$ telle que $\|h\| = \|h\|_{\mathrm{LNT}(\sigma_a(T))}$. D'apres [21, Corollary p. 38], on a alors aussi $\|h\| = \sup_{\lambda \in \sigma_a(T)} |h(\lambda)|$.

Il résulte de la démonstration de [22, Theorem 2.1] que, sous ces conditions, on a $\|h(T)\| = \|h\|$; ceci achève la démonstration.

Nous concluons cette section par un résultat utile pour la dernière partie de la démonstration du théorème 1. Etant donnés $T \in \mathbf{A}$, $\mathscr{M} \in \mathrm{SI}(T)$ et $\beta \in [0, 1[$ nous désignons par $A(\beta, \mathscr{M}, T)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{D}$ pour lesquels il existe x_λ, y_λ dans la boule unité de $\mathscr{M}$ vérifiant $\|[C_\lambda] - [x_\lambda \otimes y_\lambda]\| \leqslant \beta$. Rappelons que pour $T \in \mathbf{A}$, on pose $[C_\lambda] = [P_\lambda]]$, P_λ noyau de Poisson, autrement dit

$$\langle h(T), [C_\lambda]\rangle = h(\lambda), \quad h \in H^\infty,\ \lambda \in \mathbf{D}.$$

LEMME 3.5. *Pour $T \in \mathbf{A}$, $\mathscr{M} \in \mathrm{SI}(T)$ et $\beta \in [0,1[$, l'ensemble* $\mathrm{LNT}(A(\beta, \mathscr{M}, T))$ *est essentiel pour $T_{\mathscr{M}}$.*

Démonstration. Les paramètres étant fixés, écrivons A pour $A(\beta, M, T)$. Soit $h \in H^\infty$; on a, pour $\lambda \in A$, $x = x_\lambda$, $y = y_\lambda$,

$$\|h(T_{\mathscr{M}})\| \geqslant |(h(T_{\mathscr{M}})x, y)| = |(h(T)x, y)| = |\langle h(T), [x \otimes y]_T\rangle| \geqslant$$

$$\geqslant |\langle h(T), [C_\lambda]\rangle| - |\langle h(T), [C_\lambda] - [x \otimes y]\rangle| \geqslant |h(\lambda)| - \beta\|h\|.$$

Ainsi $\|h(T_{\mathscr{M}})\| \geqslant \sup_{\lambda \in A} |h(\lambda)| - \beta\|h\| \geqslant \|h\|_{\mathrm{LNT}(A)} - \beta\|h\|$. Donc, pour tout h telle que $\|h\| = \|h\|_{\mathrm{LNT}(A)}$, on a $\|h(T_{\mathscr{M}})\| \geqslant (1 - \beta)\|h\|$. L'argument classique, basé sur la formule du rayon spectral, permet de conclure, qu'en fait, $\|h(T_{\mathscr{M}})\| \geqslant \|h\|$, ce qui achève la démonstration.

4. CONTRACTION ABSOLUMENT CONTINUE ET APPROXIMATION FONCTIONNELLE

La technique d'approximation fonctionnelle introduite dans [3] puis améliorée dans [28] permet maintenant d'établir le résultat suivant:

PROPOSITION 4.1. *Soient T une contraction absolument continue sur $\mathcal{H}$ et Γ un borélien non négligeable essentiel pour T. Il existe une suite (x_n) de vecteurs de la boule unité fermée de $\mathcal{H}$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{\chi}_\Gamma - x_n \cdot x_n\| = 0, \quad \text{où } \tilde{\chi}_\Gamma = \frac{\chi_\Gamma}{m(\Gamma)}\cdot$$

Plutôt que de répéter à quelques modifications près la démonstration de ce résultat établi pour $T \in \mathbf{A}$ dans [28] nous nous limitons à quelques remarques.

Une version "approchée" (dans le sens $\lim_{n\to\infty} \|\tilde{\chi}_\Gamma - x_n \cdot x_n\| \leqslant \tau$ pour une certaine constante universelle $\tau < 1$) a d'abord été obtenue dans [3] pour $\Gamma = \mathbf{T}$. Des modifications mineures (toujours pour $T \in \mathbf{A}$) ont conduit l'auteur au même résultat pour Γ quelconque, avec, en outre, $\lim \|\chi_{\mathbf{T}\setminus\Gamma} x_n\| = 0$ (cf. [14]), résultat qui s'étend sans difficulté au cas d'une contraction absolument continue (pourvu que Γ soit essentiel pour T). Cette version approchée est développée dans le préprint [30]. Simultanément Bercovici a montré (dans le cas $T \in \mathbf{A}$) qu'en fait on peut prendre $\tau = 0$ (ce qui entraîne automatiquement $\lim_{n\to\infty} \|\chi_{\mathbf{T}\setminus\Gamma} x_n\| = 0$). L'extension au cas T absolument continue et Γ essentiel pour T ne présente, là non plus, aucune difficulté.

COROLLAIRE 4.2. *Soient T une contraction absolument continue, Γ un borélien non négligeable essentiel pour T et $f \in L^1(\Gamma)$ avec $\|f\| \leqslant 1$. Alors il existe deux suites (u_n), (v_n) dans la boule unité de $\mathcal{H}$, faiblement convergentes vers 0 et telles que*

$$\lim \|f - u_n \cdot v_n\| = 0.$$

Démonstration. Nous nous donnons une suite (ε_n) décroissante vers 0 et une suite de vecteurs (z_n), dense dans $\mathcal{H}$. Pour chaque n on peut trouver des boréliens (Γ_i) de Γ deux à deux disjoints, et des scalaires α_i, $i = 1, \ldots, N$ tels que

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \tilde{\chi}_{\Gamma_i} \right\| < \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| < 1.$$

(Ceci se déduit facilement de la densité des combinaisons linéaires des fonctions χ_A, A borélien de Γ, dans $L^1(\Gamma)$.) Pour $\nu = (n_1, \ldots, n_N)$ nous posons

$$u_\nu = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\alpha_i}\, x_{i,n_i} \quad v_\nu = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\bar{\alpha}_i}\, x_{i,n_i}$$

$(x_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ étant une suite obtenue via la proposition 4.1 appliquée à α_i, $i = 1, \ldots, N$. On obtient par des calculs élémentaires

$$\|f - u_\nu \cdot v_\nu\| < \|\sum \alpha_i(\tilde{\chi}_{\Gamma_i} - x_{i,n_i} \cdot x_{i,n_i})\| +$$

$$+ 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \alpha_i \alpha_j^{\frac{1}{2}} \|x_{i,n_i} \cdot x_{i,n_j}\|.$$

Puisque $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ on a

$$\|x_{i,n} \cdot x_{j,m}\| \leqslant \|\tilde{\chi}_{T\setminus\Gamma_i} x_{i,n}\| \|\tilde{\chi}_{T\setminus\Gamma_j} x_{j,n}\|.$$

Ces inégalités et la convergence vers 0 des suites $(\|\tilde{\chi}_{\Gamma_i} - x_n \cdot x_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ $(\|\tilde{\chi}_{T\setminus\Gamma_i} x_{i,n}\|)_{n\in\mathbf{N}}$, $i = 1, \ldots, N$ entraînent l'existence de p_0 tel que $\|f - u_\nu \cdot v_\nu\| < \varepsilon_n$ pour tout ν vérifiant $\inf\{n_i : i = 1, \ldots, N\} \geqslant p_0$.

De même, la convergence faible vers 0 des suites $(x_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ permet de conclure facilement à l'existence de p_1 tel que

$$|(u_\nu, z_j)|, |(v_\nu, z_j)| < \varepsilon_n \quad j = 1, \ldots, n$$

dés que $\inf_{1\leqslant i\leqslant n} n_i \geqslant p_1$. Enfin, les expressions développées de $\|u_\nu\|^2$, $\|v_\nu\|^2$, l'inégalité $\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| < 1$ et la convergence faible vers 0 des suites $(x_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ montrent que l'on peut choisir les n_i successivement ($n_1 \geqslant \operatorname{Max}(p_0, p_1)$, $n_2 - n_1$ suffisamment grand etc.) tels que

$$\|u_\nu\|^2, \|v_\nu\|^2 \leqslant 1.$$

Ainsi, pour chaque n, il existe ν_n tel que $\|u_n\|, \|v_n\| \leqslant 1$ (avec $u_n = u_{\nu_n}$, $v_n = v_{\nu_n}$);

$$\|f - u_n \cdot v_n\| \leqslant \varepsilon_n;$$

$$|(u_n, z_j)|, |(v_n, z_j)| \leqslant \varepsilon_n \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ces dernières inégalités assurent bien la convergence faible vers 0 des suites (u_n) et (v_n).

5. $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{1/2}(\rho)$

Ce résultat a été annoncé dans [14]. Nous en complétons maintenant la démonstration. Commençons par un lemme qui traduit le corollaire 4.2 en termes d'approximation dans Q_T dans le cas où $T \in \mathbf{A}$. (Les notations sont celles introduites au § 2.)

LEMME 5.1. *Soit* $T \in \mathbf{A}$ *et soit* $f \in L^1(\mathbf{T})$, $\|f\| \leqslant 1$.

a) *Si f est nulle* p.p. *sur* Σ *alors* $[f]]_T \in \mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$.

b) *Si f est nulle* p.p. *sur* Σ_* *alors* $[f]]_T \in \mathscr{E}_0^l(\mathscr{A}_T)$.

c) *Si f est nulle* p.p. *sur* $\Sigma \cup \Sigma_*$ *alors* $[f]]_T \in \mathscr{X}_0(\mathscr{A}_T)$.

Démonstration. Soient (x_n), (y_n) les suites obtenues en appliquant le corollaire 4.6 à f. On a immédiatement $\lim\limits_n \|[f]]_T - [x_n \otimes y_n]_T\| = 0$. Dans le cas a), on peut supposer $\lim \|\chi_\Sigma x_n\| = 0$, et nous devons seulement établir la condition

$$(\mathrm{v}_r) \qquad \forall \omega \in \mathscr{H}, \quad \|[x_n \otimes \omega]_T\| \to 0.$$

Or

$$\|[x_n \otimes \omega]_T\| = \|[x_n \otimes \omega]_{U_+}\| \leqslant \|[Q_* x_n \otimes Q_* \omega]_{U_+}\| +$$
$$+ \|[A x_n \otimes A\omega]_{U_+}\| \leqslant \|[Q_* x_n \otimes Q_*\omega]_{S_*}\| + \|A x_n\|\,\|A\omega\|.$$

Le shift (à droite) S_* est $C_{.0}$ et la suite $Q_* x_n$ tend faiblement vers 0. Il est bien connu (cf., par exemple, [18, Proposition 2.7]) que ceci entraîne $\lim\limits_{n\to\infty} \|[Q_* x_n \otimes Q_*\omega]_{S_*}\| = 0$. Par ailleurs, pour tout $y \in L^2(\mathscr{E})$, on a

$$\|Ay\| \leqslant \|\chi_\Sigma y\|.$$

On a donc bien $\lim\limits_{n\to\infty} \|A x_n\| = 0$ et (v_r) est établie.

Dans le cas b) on utilise l'extension coisométrique minimale B de T et le fait que S^* est $C_{0.}$ pour établir la condition

$$\forall \omega \in \mathscr{H} \quad \|[\omega \otimes y_n]_T\| \to 0.$$

Il résulte clairement de a) et b) que dans le cas $f \in L^1(\mathbf{T} \setminus \Sigma \cup \Sigma_*)$ les suites $(x_n)(y_n)$ vérifient (v_r) et (v_l). Ceci, avec l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} \|[f]] - [x_n \otimes y_n]\| = 0$ exprime bien que $[f]] \in \mathscr{X}_0(\mathscr{A}_T)$.

Le lemme suivant est un procédé pour améliorer les approximations de "longueur 2" dans le prédual Q_T pour $T \in \mathbf{A}$.

LEMME 5.2. *Soit* $T \in \mathbf{A}$ *tel que* $\Sigma \neq \mathbf{T}$ *et* $\Sigma_* \neq \mathbf{T}$. *Supposons donnés* $[L] \in Q_T$, $a, b, c, d \in \mathscr{H}$ *et* $\delta > 0$ *tels que* $\|[L] - ([a \otimes b] + [c \otimes d])\| < \delta$ *et* $0 < \mu < 1$.

Alors il existe $a', b', c', d' \in \mathscr{H}$ *tels que*

$$\|[L] - \{[a' \otimes b'] + [c' \otimes d']\}\| < \mu\delta,$$

$$\|c' - c\|, \|b' - b\| < 3\delta^{\frac{1}{2}},$$

$$\|a'\| \leqslant \|a\| + \delta^{\frac{1}{2}}, \quad \|d'\| \leqslant \|d\| + \delta^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbf{T})$ telle que

$$[f]]_T = [L] - [a \otimes b] - [c \otimes d] \quad \text{et} \quad \|f\| < \delta.$$

On peut écrire $f = f_1 + f_2 + f_3$ avec $f_3 = \chi_{\Sigma_*} f$ et $f_2 = \chi_{\Sigma \setminus \Sigma_*} f$. Soient $\delta_i > \|f_i\|$, $i = 1, 2, 3$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + 2\varepsilon = \delta$. Via le lemme 2.3 (appliqué avec $[K] = 0, f = f_3, \delta_1 = \varepsilon, \delta_2 = \delta_3, \theta = \mu$) on obtient des vecteurs c', d' de $\mathscr{H}$ tels que

$$\|[c \otimes d] + [f_3]] - [c' \otimes d']\| < \mu\varepsilon,$$

$$\|c' - c\| < 3(\varepsilon + \delta_3)^{\frac{1}{2}}, \quad \|d'\| \leqslant \|d\| + (\varepsilon + \delta_3)^{\frac{1}{2}}.$$

De même en appliquant le lemme 2.4 (avec $[K] = [f_1]], f = f_2, \delta_1 = \delta_1, \delta_2 = \delta_2$ $\theta = \mu$) on obtient des vecteurs a', b' de $\mathscr{H}$ tels que

$$\|[a \otimes b]_T + [f_1]]_T + [f_2]]_T - [a' \otimes b']\| < \mu\delta_1,$$

$$\|a'\| \leqslant \|a\| + (\delta_1 + \delta_2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|b' - b\| < 3(\delta_1 + \delta_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Les vecteurs a', b', c', d' satisfont donc les inégalités désirées. Par ailleurs, en regroupant les autres inégalités, il vient

$$\|[f]_T + [a \otimes b] + [c \otimes d] - \{[a' \otimes b'] + [c' \otimes d']\}\| < \mu(\delta_1 + \varepsilon),$$

ce qui donne bien

$$\|[L] - \{[a' \otimes b'] + [c' \otimes d']\}\| < \mu\delta.$$

THÉORÈME 5.3. (cf. [14, théorème 1]). $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{1/2}(6)$.

Démonstration. Si Σ ou Σ_* est égal à $\mathbf{T}$ nous savons déjà par [17, Theorem 2.5] que $T \in \mathbf{A}_1(1)$. Nous pouvons donc supposer vérifiées les hypothèses du lemme 5.2. Soit $[L]$ non nul dans Q_T et $s > 6$. Fixons $\mu > 0$ et $\delta > \|L\|$ tels que $(6/(1-\mu^{1/2})^2)\delta < s\|[L]\|$. Nous construisons par récurrence quatre suites (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) de la façon suivante: $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0$; supposant construits a_n, b_n, c_n, d_n tels que

$$\|[L] - [a_n \otimes b_n] - [c_n \otimes d_n]\| < \mu^{n-1}\delta,$$

nous appliquons le lemme 5.2 pour obtenir des vecteurs $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$ tels que

$$\|[L] - [a_{n+1} \otimes b_{n+1}] - [c_{n+1} \otimes d_{n+1}]\| < \mu^n\delta,$$

$$\|c_{n+1} - c_n\|, \quad \|b_{n+1} - b_n\| < 3\delta^{\frac{1}{2}}\mu^{(n-1)/2},$$

$$\|a_{n+1}\| \leqslant \|a_n\| + \delta^{\frac{1}{2}}\mu^{(n-1)/2}, \quad \|d_{n+1}\| \leqslant \|d_n\| + \delta^{\frac{1}{2}}\mu^{(n-1)/2}.$$

Il est clair que les suites ainsi construites satisfont:

(i) $\lim_{n\to\infty} \|[L] - [a_n \otimes b_n] - [c_n \otimes d_n]\| = 0$,

(ii) (a_n) et (d_n) convergentes; et leur limites a et d vérifient $\|a\|$, $\|d\| < 3\delta^{1/2}\alpha$ avec $\alpha = 1/(1 - \mu^{1/2})$,

(iii) $\|c_n\|$, $\|b_n\| \leqslant \alpha\delta^{1/2}$.

Quite à passer à des sous-suites on peut supposer que (b_n) et (c_n) sont faiblement convergentes vers des limites que nous désignons par b et c.

De (i) et (ii) il vient

$$\lim_{n\to\infty} \|[L] - [a \otimes b_n] - [c_n \otimes d]\| = 0.$$

Il est facile de vérifier que $x \to [a \otimes x]$ et $y \to [y \otimes d]$ sont continues de $\mathscr{H}$ dans Q_T munis de leurs respectives topologies faibles. On en déduit $[L] = [a \otimes b] + [c \otimes d]$. Par ailleurs, on a $\|a\|\,\|b\| + \|c\|\,\|d\| < 6\alpha^2\delta < s\|[L]\|$ ce qui donne bien le contrôle désiré sur les normes.

6. $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1(\rho)$

Nous partons de la triangulation d'une contraction T sous la forme (cf. [24, p. 73]):

$$T = \begin{pmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } T_0 \in C_{0\cdot} \text{ et } T_1 \in C_{1\cdot};$$

autrement dit, T_0 est la restriction d'une contration T au sous-espace $\mathscr{H}_0$, hyperinvariant pour T, constitué des vecteurs x de $\mathscr{H}$ tels que $T^n x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; ainsi $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{S}$. Posons $E_0 = E_{T_0}$; si $E_0 = \mathbf{T}$ on a $T_0 \in C_{0\cdot} \cap \mathbf{A}$ et donc $T_0 \in \mathbf{A}_1(\rho)$ d'après [3]. On a alors, à fortiori, $T \in \mathbf{A}_1(\rho)$. Nous supposerons donc $E_1 = \mathbf{T}\setminus E_0$ non négligeable

Le premier lemme est une adaptation aisée de résultats des §§ 2 et 4.

Lemme 6.1. *Soit $T \in \mathbf{A}(\mathscr{H})$ et $f \in L^1(E_0)$ avec $\|f\|_1 \leqslant 1$; alors $[f]]_T \in \mathscr{E}_0^1(\mathscr{A}_T, \mathscr{H}_0)$.*

Démonstration. D'après le corollaire 4.2, il existe des suites (x_n), (y_n) dans la boule unité fermée de $\mathscr{H}_0$, faiblement convergentes vers 0, et telles que $\lim\|f - x_n \cdot y_n\| = 0$, ce qui assure déjà

$$\lim_{n\to\infty} \|[f]]_T - [x_n \otimes y_n]_T\| = 0.$$

Par ailleurs, pour $\omega \in \mathscr{H}$, on a

$$\|[\omega \otimes y_n]_T\| = \|[\omega \otimes y_n]_B\| = \|[Q\omega \otimes y_n]_B\| = \|[Q\omega \otimes y_n]_{S^*}\| \to 0$$

car S^* est C_0..

Dans le contexte de la triangulation ci-dessus on voit facilement que $\sigma_p(T) = \sigma_p(T_0)$; d'après la proposition 3.4 on a l'inclusion $\mathrm{LNT}(\sigma_p(T)) \subset E_0$ qui entraîne $E_1 \subset \mathrm{LNT}(\mathbf{D}\setminus\sigma_p(T))$.

De $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{1/2}$ nous déduisons maintenant le résultat suivant crucial pour la suite.

PROPOSITION 6.2. *Soit $T \in \mathbf{A}$ et $\lambda \in \mathbf{D}\setminus\sigma_p(T)$; alors $[C_\lambda]_T \in \mathscr{E}^r_{1/2}(\mathscr{A}_T)$. Plus précisément il existe une suite de vecteurs $(x_n) = (x_{n,\lambda})$ de $\mathscr{H}$ et $0 = 0_\lambda \leqslant 1/2$ tels que*

(1) $\lim \|[C_\lambda] - [x_n \otimes x_n]\| \leqslant \theta$,

(2) $\lim \|x_n\|^2 = 1 - \theta$,

et

(3) $\forall \omega \in \mathscr{H}\ \|[x_n \otimes \omega]\| \to 0$.

Démonstration. Il est bien connu (et facile à vérifier) que $T \in \mathbf{A}_{1/2}$ peut être reformulé $T^{(2)} \in \mathbf{A}_1$. On a donc, en particulier pour $\lambda \in \mathbf{D}\setminus\sigma_p(T)$, $[C_\lambda]_{T^{(2)}} = [u \otimes v]_{T^{(2)}}$ pour certains vecteurs $u = u_\lambda$, $v = v_\lambda$ de $\mathscr{H}^{(2)}$. Cette égalité entraîne

$$((T^{(2)} - \lambda)^k u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Posons $\mathscr{L} = \bigvee_{k \geqslant 0} T^{(2)k} u = \bigvee_{k \geqslant 0} (T^{(2)} - \lambda)^k u$. L'injectivité de $(T - \lambda)$ entraîne celle de $(T^{(2)} - \lambda)$. Par ailleurs, les égalités ci-dessus montrent que $((T^{(2)} - \lambda)\mathscr{L})^-$ est de codimension 1 dans $\mathscr{L}$. Il en résulte en premier lieu que $\mathscr{L}$ est de dimension infinie. Nous envisageons maintenant les deux cas:

a) $(T^{(2)} - \lambda)\mathscr{L}$ non fermé. Il existe donc une suite de vecteurs unitaires $(u_n) \subset \mathscr{L}$ telle que $\|(T^{(2)} - \lambda)u_n\| \to 0$. Toute valeur d'adhérence faible de cette suite appartient au noyau de $(T^{(2)} - \lambda)$ et est donc nulle. Il en résulte que $u_n \to 0$ faiblement et que $\lambda \in \sigma_{le}(T^{(2)}) = \sigma_{le}(T)$. Il existe donc une suite orthonormale $(x_n) \subset \mathscr{H}$ telle que $\|(T - \lambda)x_n\| \to 0$. Pour une telle suite on sait que (cf. [8, Lemmas 4.3 et 4.4]) les conditions (1), (3) et, bien sûr, (2), de la proposition 6.1 sont satisfaites avec $\theta_\lambda = 0$.

b) $(T^{(2)} - \lambda)\mathscr{L}$ est fermé. Alors $(T^{(2)}|\mathscr{L} - \lambda)$ est Fredholm d'indice -1. De [19, Lemma 5.2], appliqué à $(T^2)^*$, nous déduisons l'existence d'une suite orthonormale $u_n = x_n \oplus y_n$ de vecteurs de $\mathscr{H}^{(2)}$ telle que $[C_\lambda]_{T^{(2)}} = [u_n \otimes u_n]_{T^{(2)}}$, soit $[C_\lambda]_T = [x_n \otimes x_n]_T + [y_n \otimes y_n]_T$ et $\|[u_n \otimes z]_{T^{(2)}}\| \to 0$ pour tout $z \in \mathscr{H}^{(2)}$.

Puisque $\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 = 1$, on peut, quitte à passer à une sous-suite et à échanger x_n et y_n, supposer l'existence de $\theta = \theta_\lambda \leqslant 1/2$ tel que

$$\lim \|x_n\|^2 = 1 - \theta \quad \text{et} \quad \lim \|y_n\|^2 = \theta.$$

On en déduit (1), via l'expression de $[C_\lambda]_T$ ci-dessus. Par ailleurs, pour $\omega \in \mathscr{H}$, on a

$$\|[x_n \otimes \omega]_T\| = \|[(x_n \oplus y_n) \otimes (\omega \oplus 0)]_{T^{(2)}}\| \to 0.$$

Ceci termine la démonstration.

Etant donné un vecteur $x \in \mathscr{H}$, nous écrivons $x = x^0 + x^1$ sa décomposition relative à $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ avec $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_0^\perp$. Pour chaque $\lambda \in \mathbf{D} \setminus \sigma_p(T)$, nous choisissons une suite $(x_{n,\lambda}) \subset \mathscr{H}$ vérifiant (1), (2), (3) de la proposition 6.2 et, en outre, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^0_{n,\lambda}\| = \gamma_\lambda$. Posons, pour $\gamma \in [0, 1/2\,[$, $\mathscr{D}_\gamma = \{\lambda \in \mathbf{D} \setminus \sigma_p(T) \mid \gamma_\lambda \leqslant \gamma\}$. L'intérêt que présentent les ensembles $\mathscr{D}_\gamma$ est exprimé par les deux propositions suivantes.

PROPOSITION 6.3. *Si* $\lambda \in \mathscr{D}_\gamma$ *alors* $[C_\lambda] \in \mathscr{E}^r_{\theta_\lambda + \gamma}(\mathscr{A}_T, \mathscr{H}_1, \mathscr{H}_1) \subset \mathscr{E}^r_{(1/2)+\gamma}(\mathscr{A}_T, \mathscr{H}_1, \mathscr{H}_1)$. *Plus précisément* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|[C_\lambda] - [x^1_{n,\lambda} \otimes x^1_{n,\lambda}]\| \leqslant \theta_\lambda + \gamma(1-\theta_\lambda)^{1/2}$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \|[x^1_{n,\lambda} \otimes \omega]\| = 0$ *pour* $\omega \in \mathscr{H}_1$.

Démonstration. Elle résulte sans difficulté, du fait que, pour tout $(z, \omega) \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_1$, $[z \otimes \omega] = [z^1 \otimes \omega]$, de l'inégalité

$$\|[C_\lambda] - [x^1_{n,\lambda} \otimes x^1_{n,\lambda}]\| \leqslant \|[C_\lambda] - [x_{n,\lambda} \otimes x_{n,\lambda}]\| + \|[x_{n,\lambda} \otimes x^0_{n,\lambda}]\|,$$

et des propriétés de la suite $(x_{n,\lambda})$.

PROPOSITION 6.4. *Pour tout* $\gamma \in \,]0, 1/2[$, *l'ensemble* $\mathscr{D}_\gamma$ *est dominant pour* E_1 (i.e. $E_1 \subset \mathrm{LNT}(\mathscr{D}_\gamma)$).

Démonstration. Puisque $E_1 = \mathbf{T} \setminus E_{T_0}$, il est clair qu'il suffit d'établir que $\mathrm{LNT}(\mathbf{D} \setminus \mathscr{D}_\gamma)$ $(= \mathrm{LNT}(\sigma_p(T_0)) \cup \mathrm{LNT}(\mathbf{D} \setminus \sigma_p(T) \setminus \mathscr{D}_\gamma))$ est essentiel pour T_0. On sait déjà que $\mathrm{LNT}(\sigma_p(T_0))$ est essentiel pour T_0. Par ailleurs, pour $\lambda \in \mathbf{D} \setminus \sigma_p(T) \setminus \mathscr{D}_\gamma$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^0_{n,\lambda}\| > \gamma$. Il vient successivement

$$\|[C_\lambda] - [x^0_{n,\lambda} \otimes x^0_{n,\lambda}]\| \leqslant \|[C_\lambda] - [x_{n,\lambda} \otimes x_{n,\lambda}]\| + \|[x^1_{n,\lambda} \otimes x_{n,\lambda}]\|,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|[C_\lambda] - [x^0_{n,\lambda} \otimes x^0_{n,\lambda}]\| < \theta_\lambda + (1-\theta_\lambda)^{1/2}(1-\theta_\lambda-\gamma^2)^{1/2} =$$

$$= \theta_\lambda + (1-\theta_\lambda)\left(1 - \frac{\gamma^2}{1-\theta_\lambda}\right)^{1/2} \leqslant \theta_\lambda + (1-\theta_\lambda)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2(1-\theta_\lambda)}\right) \leqslant 1 - \gamma^2/2.$$

On en déduit donc l'inclusion $\mathbf{D}\setminus\mathscr{D}_\gamma \subset A(1-\gamma^2/2, \mathscr{H}_0, T)$ et l'essentialité de $\mathrm{LNT}(\mathbf{D}\setminus\mathscr{D}_\gamma)$ pour T_0 d'après le lemme 3.5.

LEMME 6.5. *Soit $T \in \mathbf{A}(\mathscr{H})$ tel que $m(\Sigma_{\mathfrak{s}}^{\mathscr{H}_1}) < 1$ et $m(\Sigma^{\mathscr{H}_1}) < 1$ et soient $[L] \in Q_T$, $a, b \in \mathscr{H}_0$, $c, d \in \mathscr{H}_1$ et $\delta > 0$ tels que*

$$\|[L] - [(a+c)\otimes(b+d)]\| < \delta.$$

Alors il existe $a', b' \in \mathscr{H}_0$, $c', d' \in \mathscr{H}_1$ tels que

$$\|[L] - [(a'+c')\otimes(b'+d')]\| < \frac{3}{4}$$

$$\|c'-c\| < 3\delta^{\frac{1}{2}}, \quad \|d'\| < \|d\| + \delta^{\frac{1}{2}},$$

$$\|b'-b\| < 3\delta^{\frac{1}{2}}, \quad \|a'\| < \|a\| + \delta^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbf{T})$ telle que

$$[f]] = [L] - [(a+c)\otimes(b+d)] \quad \text{avec } \|f\| < \delta.$$

On peut écrire $f = f_0 + f_1$ avec $f_0 \in L^1(E_0), f_1 \in L^1(E_1)$, $\|f_i\| < \delta_i$, $i = 0, 1$, $\delta_0 + \delta_1 = \delta - 5\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

Fixons $\gamma > 0$ tel que $\gamma\delta_1^{1/2}\|b\| < \varepsilon$ et $\gamma < 1/4$.

Nous transformons d'abord le terme

$$[L_1] = [c\otimes d] + [f_1]]$$

en utilisant le lemme 2.3 (avec $\mathscr{M} = \mathscr{H}_1$, $\beta = \|f_1\|$, $[K] = [f_1]]$ et $f = 0$) et les propositions 6.3 et 6.4. En effet, la dominance de $\mathscr{D}_\gamma$ pour E_1 entraîne que (cf., par exemple, [6, Lemma 1.2])

$$[f_1]]_T \in \|f_1\| \operatorname{ecef}\{[C_\lambda]_T;\ \lambda \in \mathscr{D}_\gamma\} \subset \|f\|_1 \operatorname{ecef} \mathscr{E}_{1/2}^r(\mathscr{A}_T, \mathscr{H}_1, \mathscr{H}_1).$$

Il existe donc des suites (c_p), (d_p) dans $\mathscr{H}_1$ vérifiant

(i) $$\|[f_1]]_T + [c\otimes d]_T - [c_p \otimes d_p]_T\| < \frac{3}{4}\,\delta_1$$

(i') $$\|c_p - c\| < 3\delta_1^{\frac{1}{2}}, \ \|d_p\| \leqslant \|d\| + \delta_1^{\frac{1}{2}}.$$

En outre, $c_p - c = u_p^1 + \tilde{u}_p$ et les suites (u_p^1) et $(\tilde{u}_p)$ vérifient (3) du lemme 2.3. De plus, (cf. démonstration de 2.3) u_p^1 est la projection sur $\mathscr{H}_1$ d'un vecteur de la forme

$$u_p = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\alpha_i}\, x_i^p \quad \text{avec } \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| < \delta_1$$

et chaque x_i^p $(i = 1, \ldots, N)$ est choisi dans une suite $(x_{i,n})$ vérifiant $[x_{i,n} \otimes \omega] \to 0$ et $\lim_{n\to\infty} \|x_{i,n}^0\| < \gamma$. En prenant tous les n_i assez grands on assurera les inégalités $\|[u_p \otimes b]\| < \varepsilon_p < \varepsilon$ et $\|x_{i,n}^0\| < \gamma$. Puis (puisque $x_{i,n}$ tend faiblement vers 0) le choix successif des n_i peut se faire de façon que

$$\|u_p^0\|^2 \simeq \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|\, \|(x_i^p)^0\|^2 < \gamma^2\delta_1 .$$

Il en résulte, de par le choix de γ, $\|[u_p^1 \otimes b]\| < 2\varepsilon$. Par ailleurs, (toujours en vertu de (3) du lemme 2.3) on peut choisir $\tilde{u}_p$ tel que

$$\|Q^{\mathscr{H}_1}\tilde{u}_p\| < \varepsilon/(\|b\| + 1).$$

On a alors, a fortiori, (en effet, pour $\omega \in \mathscr{H}_1$, l'inégalité $\|T_1^n\omega\| \leqslant \|T^n\omega\|$ entraîne $\|A_*^{\mathscr{H}_1}\omega\| \leqslant \|A_*^{\mathscr{H}}\omega\|$ et donc $\|Q^{\mathscr{H}_1}\omega\| \geqslant \|Q\omega\|$)

$$\|Q\tilde{u}_p\| < \varepsilon/(\|b\| + 1),$$

et donc (puisque $b = Qb$, vu que $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{S}$)

$$\|[\tilde{u}_p \otimes b]_T\| \quad (= \|[\tilde{u}_p \otimes b]_B\| = \|[Q\tilde{u}_p \otimes b]_B\|) < \varepsilon.$$

Ainsi avec $c' = c_p, d' = d_p$, on a l'inégalité $\|[c' \otimes b] - [c \otimes b]\| < \varepsilon$ et, en combinant avec l'inégalité (i) (au début de cette démonstration) il vient

$$\text{(ii)} \qquad \|[c \otimes (b + d)] + [f_1]] - [c' \otimes (b + d')]\| < \frac{3}{4}\delta_1 + 3\varepsilon$$

et les inégalités désirées pour $\|c' - c\|$ et $\|d'\|$.

De même, puisque $[f_0]] \in \mathscr{E}_0^1(\mathscr{A}_T, \mathscr{H}_0)$. D'après le lemme 2.4, il existe des suites (a_p), (b_p) dans $\mathscr{H}_0$ telles que

$$\text{(iii)} \qquad \|[a \otimes b] + [f_0]] - [a_p \otimes b_p]\| < \frac{3}{4}\delta_1$$

$$\text{(iii')} \qquad \|a_p\| < \|a\| + \delta_0^{\frac{1}{2}}, \ \|b_p - b\| < 3\delta_0^{\frac{1}{2}} .$$

En outre, la suite $(b_p - b)$ converge faiblement vers 0. Il en résulte (cf. démonstration du lemme 6.1) que $\lim_{p\to\infty} [c' \otimes (b_p - b)] = 0$.

Donc, en choisissant p assez grand, on aura, avec $b' = b_p$, $a' = a_p$, $\|[c' \otimes (b' - b)]\| < \varepsilon$. En regroupant, cette inégalité avec (iii), (ii) et l'égalité liant $[b]]$ à $[L]$ il vient

$$\|[L] - [(a' + b') \otimes (b' + d')]\| < \frac{3}{4}\delta_1 + 3\varepsilon + \frac{3}{4}\delta_0 + \varepsilon < \frac{3}{4}\delta.$$

Par ailleur, (i') et (iii') donnent les inégalités désirées concernant $\|a'\|$ $\|b' - b\|$, $\|c' - c\|$ et $\|d'\|$.

Démonstration du théorème 1. Soit $T \in \mathbf{A}(\mathscr{H})$. Si $m(\Sigma_*^{\mathscr{H}_1}) = 1$ ou $m(\Sigma^{\mathscr{H}_0}) = 1$ on a T_1 ou T_0 dans $\mathbf{A}_1(1)$ (cf. [17, Theorem 3.5], déjà mentionné). Supposons donc $m(\Sigma_*^{\mathscr{H}_1}) < 1$ et $m(\Sigma^{\mathscr{H}_0}) < 1$. Soit $[L] \in Q_T$ et $\delta > \|[L]\|$. Le lemme 6.5 permet de construire, par récurrence, des suites (a_n), (b_n) dans $\mathscr{H}_0$, (c_n), (d_n) dans $\mathscr{H}_1$ telles que

$$a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0,$$

$$\|[L] - [(a_n + c_n) \otimes (b_n + d_n)]\| < \tau^{n-1}\delta,$$

$$\|a_{n+1}\| \leqslant \|a_n\| + (\tau^{n-1}\delta)^{\frac{1}{2}}, \quad \|d_{n+1}\| \leqslant \|d_n\| + (\tau^{n-1}\delta)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|b_{n+1} - b_n\|, \quad \|c_{n+1} - c_n\| < 3(\tau^{n-1}\delta)^{\frac{1}{2}} \text{ (avec } \tau = 3/4).$$

Ces inégalités montrent que les suites (b_n), (c_n) sont des suites de Cauchy et que les suites $(\|a_n\|)$ et $(\|d_n\|)$ sont bornées par $\delta^{1/2}(1/(1 - \sqrt{\tau})) = \delta^{1/2}\alpha$.

Posant $b = \lim b_n$, $c = \lim c_n$, il vient $\|[L] - [(a_n + c) \otimes (b + d_n]\| \to 0$; soient a et d des limites faibles de sous-suites (a_{n_k}), (d_{n_k}); tenant compte de $[a_n \otimes d_n] = 0$ et de la continuité faible des applications $x \to [x \otimes b]$, $y \to [c \otimes y]$, on obtient

$$[L] = [(a + c) \otimes (b + d)],$$

avec $\|c\|$, $\|b\| < 3\alpha\delta^{1/2}$, d'ou

$$\|a + c\|, \ \|b + d\| < \alpha(10\delta)^{1/2}.$$

Autrement dit, T appartient à $\mathbf{A}_1(\rho)$ avec $\rho = 10\alpha^2$.

7. COROLLAIRES ET REMARQUES

Du théorème 1 on déduit d'abord, par un argument devenu classique (cf., par example, [15]) le résultat suivant

COROLLAIRE 7.1. *Pour tout T de la classe $\mathbf{A}$ les topologies faible* et faible-opérateur coïncident sur $\mathscr{A}_T$. De plus $\mathscr{A}_T$ coïncide avec W_T. (Pour $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, nous désignons par $\mathscr{W}_T$ l'algèbre faible-opérateur fermée engendrée par T.)*

Le corollaire 7.1 résoud donc (pour la classe **A**) une question topologique portée au premier plan des théorèmes d'Apostol-Bercovici-Foiaş-Pearcy ([5, Theorems 6.13 et 9.7(c)) (cf. aussi [18, Theorems 3.7 et 4.1]).

Dans ce domaine, rappelons que [25], puis [10], ont donné des exemples d'opérateurs T pour lesquels les topologies faible* et faible-opérateur diffèrent sur $\mathscr{A}_T$ (cf. [11] pour des résultats concernant les propriétés $(A_{1/p})$ et $(A_{1/p})(\rho)$) et que [26] exhibe un exemple de T pour lequel l'inclusion $\mathscr{A}_T \subset \mathscr{W}_T$ est stricte. Par ailleurs le théorème 1 et le corollaire 7.1 précisent, en ce qui concerne la classe **A**, les résultats de [15]. Enfin [2] produit un exemple d'algèbre duale ayant la propriété (A_1) sans avoir aucune propriété $(A_1)(\rho)$.

Les $[C_\lambda]$ ayant joué un rôle important dans la démonstration du théorème 1 il est intéressant de préciser à posteriori leur appartenance aux divers ensembles utilisés dans la caractérisation des sous-classes $\mathbf{A}_{\aleph_0}$, $\mathbf{A}_{1,\aleph_0}$ et $\mathbf{A}_{\aleph_0,1}$ de **A**.

LEMMA 7.2. *Soient* $T \in \mathbf{A}$ *et* $\lambda \in \mathbf{D}$. *Alors*

(i) *pour* $\lambda \in \sigma_e(T)$, $[C_\lambda] \in \mathscr{X}_0(\mathscr{A}_T)$,

(ii) *pour* $\lambda \in \mathscr{F}_-(T)$, (resp. $\mathscr{F}_+(T)$) $[C_\lambda] \in \mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$, (resp. $\mathscr{E}_0^l(A_T)$),

(iii) *pour* $\lambda \in (\mathbf{D}\setminus\sigma(T)) \cup \sigma_{lr}(T)$, $[T]$, $[C_\lambda] \in \mathscr{E}_0^r(A_T) \cap \mathscr{E}_0^l(A_T)$,

(iv) *pour* λ *appartenant à un trou* H *de* $\sigma_e(T)$ *contenu dans* $\sigma_p(T)$, $[C_\lambda] \in \mathscr{E}_0^l(\mathscr{A}_T)$.

Démonstration. (i) et (ii) sont bien connus (cf., par example, [5] et [17]).

(ii) Le cas b) de la démonstration de la proposition 6.2 s'applique maintenant directement à T pour $\lambda \in \mathbf{D}\setminus\sigma(T)$ et donne $[C_\lambda] \in \mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$. Un passage standard de T à T^* permet d'affirmer également que $[C_\lambda] \in \mathscr{E}_0^l(\mathscr{A}_T)$. Par ailleurs, on vérifié facilement que les ensembles $\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$ et $\mathscr{E}_0^l(\mathscr{A}_T)$ sont fermés. Ceci, combiné avec la continuité de l'application $\lambda \to [C_\lambda]$ et l'inclusion $\sigma_{lr}(T) \subset (\mathbf{D}\setminus\sigma(T))^-$, complète la preuve de (iii).

(iv) Si H est d'indice positif ou nul on a $H \subset \mathscr{F}_+(T)$ et le résultat desiré d'aprés (ii). Sinon soit $\mathscr{M} = \bigvee_{\mu\in H} \operatorname{Ker}(T-\mu)$; on a $\mathscr{M} \in \operatorname{Lat} T$, $\mathscr{M} \subset \mathscr{H}_0$ et $(T|\mathscr{M} - \mu)$ est semi-Fredholm pour tout $\mu \in H$. Comme, en outre, $H \subset \sigma_p(T|\mathscr{M})$ il résulte de [18, Lemma 2.3] que pour $\lambda \in H$ il existe une suite orthonormale dans $\mathscr{M}$, (x_n), telle que $[C_\lambda] = [x_n \otimes x_n]$. L'inclusion $\mathscr{M} \subset \mathscr{H}_0$ $(\subset \mathscr{S})$ garantit que $\forall\, \omega \in \mathscr{H}$, $\|[\omega \otimes x_n]\| \to 0$. On a donc bien $[C_\lambda] \in \mathscr{E}_0^l(\mathscr{A}_T)$.

REMARQUE 7.3. Il est clair que le processus d'approximation de la démonstration du théorème 1 peut commencer avec a_0, b_0, c_0, d_0 quelconques.

Par ailleurs notre méthode d'approximation à l'aide des sous-espaces $\mathscr{H}_0$ et $\mathscr{H}_1$ est susceptible de variantes. On voit facilement que le schéma ci-dessus s'applique par exemple au cas où $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0' \oplus \mathscr{H}_1'$, $\mathscr{H}_0' \in \operatorname{Lat} T$, avec $\mathscr{H}_0' \subset \mathscr{H}_0$ et l'ensemble $\{\lambda \in \mathbf{D} \mid [C_\lambda] \in \mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T, \mathscr{H}_1', \mathscr{H}_1')\}$ est dominant pour $\mathbf{T}\setminus E_0'$, où $E_0' = E_{T|\mathscr{H}_0'}$.

Nous présentons maintenant deux critères d'appartenance aux classes $\mathbf{A}_{1,\aleph_0}$ et $\mathbf{A}_{\aleph_0,1}$. Rappelons que $\mathbf{A}_{1,\aleph_0}(\mathscr{H})$ est la sous-classe de $\mathbf{A}(\mathscr{H})$ constituée des $T \in \mathbf{A}(\mathscr{H})$ tels que $\mathscr{A}_T$ ait la propriété $(\mathbf{A}_{1,\aleph_0})$, c'est-à-dire, que pour toute suite $([L_j]) \subset Q_T$, il existe des vecteurs x, (y_j) de $\mathscr{H}$ vérifiant

$$(*) \qquad [L_j] = [x \otimes y_j], \quad j \in \mathbf{N};$$

la propriété $(\mathbf{A}_{\aleph_0,1})$ est définie de façon symétrique.

COROLLAIRE 7.4. *Soit $T \in \mathbf{A}$ tel que $\mathbf{D} \setminus \sigma_p(T)$ (*resp. *$\mathbf{D} \setminus \sigma_p(T^*)$) soit dominant pour $\mathbf{T}$. Alors $T \in \mathbf{A}_{1,\aleph_0}$ (*resp. *$T \in \mathbf{A}_{\aleph_0,1}$). En particulier $C_{1\cdot} \cap \mathbf{A} \subset \mathbf{A}_{1,\aleph_0}$ et $C_{\cdot 1} \cap \mathbf{A} \subset \mathbf{A}_{\aleph_0,1}$.*

Démonstration. Le lemme précédent montre que, pour $\lambda \in \mathbf{D} \setminus \sigma_p(T)$, $[C_\lambda] \in \mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$. La dominance de $\mathbf{D} \setminus \sigma_p(T)$ entraîne alors que $\operatorname{ecef}(\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T))$ coïncide avec la boule unité fermée de Q_T (autrement dit que $\mathscr{A}_T$ a la propriété $E_{0,r}^r$). On conclut via [16, théorème 2.1] que $T \in \mathbf{A}_{1,\aleph_0}$. Pour prouver la dernière affirmation il suffit d'observer que, pour $T \in C_{1\cdot}$, on a $\sigma_p(T) = \emptyset$ (cf. [18, Proposition 2.8]).

THÉORÈME 7.5. *Soit $T \in \mathbf{A}$ tel que $\Sigma \subset \Sigma_*$ (*resp. *$\Sigma_* \subset \Sigma$). Alors $T \in \mathbf{A}_{1,\aleph_0}$ (*resp. *$T \in \mathbf{A}_{\aleph_0,1}$).*

Démonstration. D'après le lemme 5.1 on a $[f]] \in \mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$ pour $f \in L^1(\mathbf{T} \setminus \Sigma)$ et $\|f\| \leqslant 1$. De ceci et de l'inclusion $\Sigma \subset \Sigma_*$ on déduit facilement que $\operatorname{ecef}(\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)) \supset \cup \{[g]], g \in L^1(\Sigma_*), \|g\| \leqslant 1\} = (Q_T)_1$. Donc, d'après [17, Theorem 4.1], on a $T \in \mathbf{A}_{1,\aleph_0}$.

Rappelons qu'un opérateur T est dit réflexif si $\mathscr{W}_T = \operatorname{Alg Lat} T$ $(= \{X \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \mid \operatorname{Lat} T \subset \operatorname{Lat} X\})$. Des résultats ci-dessus et des conditions suffisantes de réflexivité obtenues en [17] on déduit immédiatement les résultats suivants.

THÉORÈME 7.6. *Soit T' une contraction dont la partie absolument continue T est dans $\mathbf{A}$. Chacune des conditions suivantes assure la réflexivité de T':*

a) *$\mathbf{D} \setminus \sigma_p(T')$ ou $\mathbf{D} \setminus \sigma_p(T'^*)$ dominant pour $\mathbf{T}$,*

b) *$T \in C_{1\cdot} \cup C_{\cdot 1}$,*

c) *$\Sigma \subset \Sigma_*$ ou $\Sigma_* \subset \Sigma$.*

(En fait, a) peut être affaiblie sous la forme:

a') $\mathbf{D} \setminus \{\lambda \in \mathbf{D} \mid (T - \lambda)$ Fredholm d'indice $> 0\}$ dominant ou $\mathbf{D} \setminus \{\lambda \in \mathbf{D} \mid (T - \lambda)$ Fredholm d'indice $< 0\}$ dominant.)

Le résultat suivant nécessite de façon plus élaborée le procédé d'approximation du § 6.

THÉORÈME 7.7. *Soit* $T \in \mathbf{A}$; *alors* $T^{(2)}$ *est réflexive.*

Démonstration. Un argument élémentaire montre que si $\tilde{A} \in \operatorname{Alg}\operatorname{Lat} T^{(2)}$ alors $\tilde{A} = A^{(2)}$ avec $A \in \operatorname{Alg}\operatorname{Lat} T$ et que $(Ax, y) = (Ax', y')$ dès que $[x \otimes y]_{Q_T} = [x' \otimes y']_{Q_T}$.

Nous définissons une fonction $g: \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ par $g(\lambda) = (Ax, y)$ pour $[C_\lambda] = [x \otimes y]$ (l'observation élémentaire ci-dessus montre que g est bien définie). On peut alors définir une forme linéaire φ_A sur la variété linéaire $\mathscr{E}$ engendrée par les $[C_\lambda]$ par

$$\left\langle \varphi_A, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [C_{\lambda_i}] \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g(\lambda_i).$$

Nous observons maintenant que si

$$[x \otimes y] = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [C_{\lambda_i}]$$

alors

$$\langle \varphi_A, [x \otimes y] \rangle = (Ax, y).$$

En effet de l'égalité donnée et de la définition des $[C_\lambda]$ on déduit aisément que $[C_{\lambda_i}] = [x \otimes y_i]$ où

$$y_i = (b_i(T))^* y, \quad b_i \in H^\infty, \quad b_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N;$$

on a alors successivement

$$[x \otimes y] = \left[x \otimes \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{\alpha}_i y_i \right) \right],$$

$$(Ax, y) = \left(Ax, \sum_{i=1}^{N} \bar{\alpha}_i y_i \right) = \qquad \text{(car } A \in \operatorname{Alg}\operatorname{Lat} T\text{)}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (Ax, y_i) = \sum \alpha_i g(\lambda_i) = \langle \varphi_A, [x \otimes y] \rangle.$$

Etant donné $[L] \in \mathscr{E}$ on peut trouver $x, y \in \mathscr{H}$ tels que $[L] = [x \otimes y]$ et $\|x\|\|y\| \leqslant \rho \|[L]\|$.

Ainsi

$$|\langle \varphi_A, [L] \rangle| \leqslant 2\rho \|A\| \|[L]\|$$

et φ_A est une f.l.c. sur $\mathscr{E}$. Comme $\mathscr{E}$ est dense dans Q_T (en effet, $\mathscr{E}^\perp = \{h(T) \in \mathscr{A}_T; \langle h(T), [C_\lambda] \rangle (= h(\lambda)) = 0, \lambda \in \mathbf{D}\} = (0)$) il existe une f.l.c. sur Q_T, donc une fonction $h \in H^\infty$ telle que

$$\langle h(T), [L] \rangle = \langle \varphi_A, [L] \rangle, \quad [L] \in \mathscr{E}.$$

En particulier $h = g$ et

$$(*) \qquad (f(T)x, y) = (Ax, y) \quad \text{pour } [x \otimes y] \in \mathscr{E}.$$

Pour conclure, i.e. établir la validité de l'égalité (*) pour x, y quelconques, on utilise la première partie de la remarque 7.3 et la densité de $\mathscr{E}$ de la façon suivante: En premier lieu

$$[x \otimes y] = \lim_{n\to\infty}[L_n] \quad \text{avec } [L_n] \in \mathscr{E};$$

puis on résoud $[L_n] = [x_n \otimes y_n]$ en "partant" de x et y. On a ainsi

$$\|x_n^1 - x'\| \to 0, \quad \|y_n^0 - y^0\| \to 0$$

et (x_n^0), (y_n') faiblement convergentes vers respectivement u^0 et v'. Il en résulte (cf. dans théorème 1)

$$[x \otimes y] = [(x^0 + x') \otimes (y^0 + v')].$$

De même $(Ax_n, y_n) = (Ax_n^0, y_n^0) + (Ax_n^1, y_n)$ tend vers (Au^0, y^0); $(Ax', y) = (A(u^0 + x'), y^0 + v') = (Ax, y)$.

Par ailleurs, puisque $[L_n] \in \mathscr{E}$, (Ax_n, y_n) est égal a $(g(T)x_n y_n)$ qui converge vers $(g(T)x, y)$. Ceci achève la démonstration.

Pour terminer signalons que les techniques d'approximation utilisées ici (plus précisément l'exemple "dual" de la remarque 7.3) en liaison avec celles de [17] et la notion de sous-espace invariant Ω-analytique nous ont permis d'établir la réflexivité de toute contraction de la classe A (cf. [29]).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Apostol, C., Ultraweakly closed operators algebras, *J. Operator Theory*, **2**(1979), 49–61.
2. Bercovici, H., A note on property (A_1), preprint.
3. Bercovici, H., A contribution to the structure theory of the class A, *J. Funct. Anal.*, à paraître.
4. Bercovici, H.; Foiaş, C.; Pearcy, C., Dilation theory and systems of simultaneous equations in the predual of an operator algebra. I, *Michigan Math. J.*, **30**(1983), 335–354.
5. Bercovici, H.; Foiaş, C.; Pearcy, C., *Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory*, C.B.M.S. Regional Conf. Ser. in Math., no **56**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1985.
6. Bercovici, H.; Foiaş, C.; Pearcy, C.; Sz.-Nagy, B., Functional models and extended spectral dominance, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **43**(1981), 243–254.
7. Brown, S., Some invariant subspaces for subnormal operators, *Integral Equations Operator Theory*, **1**(1978), 310–333.
8. Brown, S.; Chevreau, B.; Pearcy, C., Contractions with rich spectrum have invariant subspaces, *J. Operator Theory*, **1**(1979), 123–136.

9. BROWN, S.; CHEVREAU, B.; PEARCY, C., On the structure of contraction operators. II, *J. Funct. Anal.*, **76**(1988), 30–57.
10. CASSIER, G., Un exemple d'opérateur pour lequel les topologies faible et ultrafaible ne coïncident pas sur l'algèbre duale, *J. Operator Theory*, **16**(1986), 325–333.
11. CASSIER, G., Une note sur les propriétés $(A_{1/p})$, preprint.
12. CHEVREAU, B., On the spectral picture of an operator, *J. Operator Theory*, **4**(1980), 119–132.
13. CHEVREAU, B., Algèbres duales et sous-espaces invariants, Thèse d'État, Bordeaux, 1987.
14. CHEVREAU, B., Sur les contractions à calcul fonctionnel isométrique I., *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **305**(1987), 537–540,
15. CHEVREAU, B.; ESTERLE, J., Pettis' lemma and topological properties of dual algebras, *Michigan Math. J.*, **34**(1987), 143–146.
16. CHEVREAU, B.; EXNER, G.; PEARCY, C., Sur la réflexivité des contractions de l'espace hilbertien, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **305**(1987), 117–120.
17. CHEVREAU, B.; EXNER, G.; PEARCY, C., On the structure of contraction operators. III, *Michigan Math. J.*, à paraître.
18. CHEVREAU, B.; PEARCY, C., On the structure of contraction operators with applications to invariant subspaces, *J. Funct. Anal.*, **67**(1986), 360–379.
19. CHEVREAU, B.; PEARCY, C., On the structure of contraction operators. I, *J. Funct. Anal.*, **76**(1988), 1–29.
20. CONWAY, J., *Subnormal operators*, Pitman, Boston, Mass., 1981.
21. HOFFMAN, K., *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
22. PRUNARU, B., Sufficient conditions for membership in the classes A and $A_{\aleph_0}$, *J. Operator Theory*, **17**(1987), 335–345.
23. PRUNARU, B., On the structure of contraction operators with dominating spectrum, *J. Operator Theory*, **20**(1988), 41–58.
24. SZ.-NAGY, B.; FOIAŞ, C., *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North Holland, Amsterdam, 1970.
25. WESTWOOD, D., Weak operator and weak* topologies on singly generated algebras, *J. Operator Theory*, **15**(1986), 267–280.
26. WOGEN, W., Some counterexamples in nonselfadjoint alegbras, preprint.
27. ZAROUF, F., Sur les opérateurs sous-normaux de la classe A, *J. Operator Theory*, **20**(1988), 69–82.
28. BERCOVICI, H., Factorization theorems and the structure of operators on Hilbert space, preprint.
29. BROWN, S.; CHEVREAU, B., Toute contraction à calcul fonctionnel isométrique est réflexive *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **307**(1988), 189–188.
30. CHEVREAU, B., Sur les contractions à calcul fonctionnel isométrique. II, INCREST Preprint Series in Mathematics, June 1987.

B. CHEVREAU
UER de Mathématiques et d'Informatique,
Université de Bordeaux I,
351, Cours de la Libération,
33405 Talence,
France.

Received June 25, 1987; revised June 9, 1988.