J. OPERATOR THEORY
24(1990), 255–276

OPÉRATEURS PSEUDO-FREDHOLM. I: RÉSOLVANT GÉNÉRALISÉ

MOSTAFA MBEKHTA

INTRODUCTION

Ce travail, ainsi qu'un autre qui suivra, sont destinés à fournir les démonstrations des résultats annoncés dans [12]. Il se place dans le cadre de la théorie, classique, des opérateurs *semi-Fredholm*. Il est bien connu que ces opérateurs ont deux propriétés importantes, d'une part la stabilité par rapport à toutes les "petites" perturbations et d'autre part:

T. Kato en 1958 ([7], Théorème 4) a montré que si l'opérateur A est semi--Fredholm alors il existe (M, N) deux sous-espaces fermés de H tels que:

(a) $H = M \oplus N$

(b) $A(M \cap \mathrm{D}(A)) \subseteq M$, si $A_0 = A \mid M$ alors $\mathrm{R}(A_0)$ fermé et $\forall\, n \geqslant 0$ $\mathrm{N}(A_0^n) \subseteq \mathrm{R}(A_0)$

(c) $N \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A(N) \subseteq N$ et $\exists\, d \in \mathbf{N}$ tel que $A \mid N$ est *nilpotent de degré d*.

La décomposition (M, N) est appelée *décomposition de Kato de degré d* associée à A.

En 1978 J. P. Labrousse [9] a étudié les opérateurs qui admettent une telle décomposition. Ces opérateurs sont appelés les opérateurs *quasi-Fredholm* (qΦ).

Dans ce travail on s'intéresse aux opérateurs qui admettent une décomposition du type de Kato où la condition c) est remplacée par la condition:

c') $N \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A(N) \subseteq N$ et $A \mid N$ est *quasinilpotent*.

Cette dernière décomposition est appelée *décomposition de Kato généralisée* (D.K.G.). Nous appelons *pseudo-Fredholm* (PΦ) les opérateurs qui admettent une D.K.G. (qui contiennent évidemment les semi-Fredholm et les quasi-Fredholm comme cas particuliers). Dans le paragraphe 1, on trouve quelques exemples d'opérateurs pseudo-Fredholm. Le paragraphe 2, est consacré à leurs caractérisations. Dans le paragraphe 3, on trouve quelques propriétés de ces opérateurs. Dans le paragraphe 4, on montre d'une part que les opérateurs pseudo-Fredholm sont eux aussi doués d'une propriété de stabilité si l'on ne considère que les perturbations du type λI, $\lambda \in \mathbf{C}$, perturbations fondamentales pour l'étude de spectre d'un opérateur. D'autre part, on trouve une caractérisation de toutes les *singularités isolées* des opérateurs résolvants généralisés, même quand celles-ci sont essentielles. Rappellons que le cas où la singularité est un pôle d'ordre fini, a été étudié dans [9], voir aussi [4], [5].

1. DÉFINITION ET EXEMPLES

Dans la suite (M, N) désigne un couple de sous-espaces fermés de H espace de Hilbert. Soit A un opérateur fermé de domaine $\mathrm{D}(A)$ et d'image $\mathrm{R}(A)$ dans H, $\mathrm{N}(A)$ dénote le noyau de A.

On dira que (M, N) est une *décomposition de Kato généralisée* associée à A, (et on ecrit (M, N) D.K.G associée à A) si:

a) $H = M \oplus N$

b) $A(M \cap \mathrm{D}(A)) \subseteq M$, si $A_0 = A|M$ alors $\mathrm{R}(A_0)$ fermé et $\forall\, n \geqslant 0$ $\mathrm{N}(A_0^n) \subseteq \mathrm{R}(A_0)$

c) $N \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A(N) \subseteq N$ et $A|N$ est quasinilpotent.

DÉFINITION 1.1. Soit A un opérateur fermé. A est dit *pseudo-Fredholm* s'il existe un D.K.G. associée à A. Et dans ces conditions on note $A \in \mathrm{P}\Phi$.

On notera dans la suite:

$\mathrm{Co}(A)$, *coeur* de A, le plus grand sous-espace M de H tel que $A(M \cap \mathrm{D}(A)) = M$.

$\mathrm{K}(A)$, *coeur analytique* de A, défini par:

$\mathrm{K}(A) = \{u \in H; \exists\, a > 0,\ \forall n > 0\ \exists\, v_n \in \mathrm{D}(A)$ tels que

$$(1)\ v_0 = u \quad \text{et} \quad Av_{n+1} = v_n, \quad (2)\ \|v_n\| \leqslant a^n\|u\| \quad \forall\, n \geqslant 0\}.$$

$\mathrm{H}_0(A)$, *partie quasinilpotent* de A, défini par:

$$\mathrm{H}_0(A) = \{u \in \mathrm{D}^\infty(A);\ \lim_{n\to\infty}\|A^n u\|^{1/n} = 0\} \quad \text{où} \quad \mathrm{D}^\infty(A) = \bigcap_{n>0}\mathrm{D}(A^n).$$

EXAMPLES D'OPÉRATEURS PSEUDO-FREDHOLM. 1) Les opérateurs quasi-Fredholm (cf. [9]). En effet les opérateurs quasi-Fredholm admettent une D.K.G. où la condition c) est remplacée par la condition c′) $N \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A(N) \subseteq N$ et $A|N$ est nilpotent de degré d (avec $d \in \mathbf{N}$ fini). On trouve dans [9] une liste d'exemples d'opérateurs quasi-Fredholm, et en particulier les semi-Fredholm.

2) Les opérateurs règuliers (voir [13], [14]). C'est le cas $M = H$ et $N = \{0\}$.

3) Les opérateurs quasi-nilpotents. C'est le cas où $M = \{0\}$ et $N = H$.

4) Soit λ_0 un point isolé de $\sigma(A)$, alors $A - \lambda_0 I$ est pseudo-Fredholm. En effet ceci résulte du Théorème 1.6 [11] et on a $M = \mathrm{K}(A - \lambda_0 I)$ et $N = \mathrm{H}_0(A - \lambda_0 I)$.

5) Soit A un opérateur spectral borné (cf. [6]), alors

$$A \in \mathrm{P}\Phi \Leftrightarrow \mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A) \text{ est fermé dans } H.$$

Car on a le théorème suivant:

THÉORÈME 1.2 (Corollaire 4.2 [11]). *Soit A un opérateur spectral borné, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A)$ *est fermé dans H.*
(2) $A \in \mathrm{P}\Phi$ *(avec en plus $A \mid M$ est inversible).*
(3) *Soit A inversible, soit 0 est isolé dans $\sigma(A)$.*
(4) $\mathrm{R}(T) + \mathrm{H}_0(A) = H$.

REMARQUE 1.3. Si on note: Φ l'ensemble des opérateurs Fredholm, $\mathrm{S}\Phi$ l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm, qN l'ensemble des opérateurs quasinilpotent. Alors on a les inclusions suivantes:

$$\Phi \subsetneq \mathrm{S}\Phi \subsetneq \mathrm{q}\Phi \subsetneq \mathrm{P}\Phi \text{ et } \mathrm{qN} \subsetneq \mathrm{P}\Phi.$$

Les inclusions $\mathrm{q}\Phi \subsetneq \mathrm{P}\Phi$ et $\mathrm{qN} \subsetneq \mathrm{P}\Phi$ sont strictes, voir [11] Corollaire 2.14 et 2.15.

PROPOSITION 1.4 (cf. [10], [11]). *Soit A un opérateur fermé; alors on a:*

(a) $\mathrm{K}(A)$ *et* $\mathrm{H}_0(A)$ *sont des sous-espaces de H, non nécessairement fermés.*
(b) $A(\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{D}(A)) = \mathrm{K}(A)$ *et* $\mathrm{H}_0(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A(\mathrm{H}_0(A)) \subseteq \mathrm{H}_0(A)$.
(c) A *quasinilpotent* $\Rightarrow \mathrm{K}(A) = \mathrm{K}(A^*) = \{0\}$.
(d) A *quasinilpotent* $\Leftrightarrow \mathrm{H}_0(A) = H$.
(e) A *régulier* $\Rightarrow \mathrm{K}(A) = \mathrm{Co}(A) = \bigcap_{n \geqslant 0} \mathrm{R}(A^n)$ *est fermé dans H.*
(f) *Si A est régulier avec* $\mathrm{D}(A)$ *dense dans H alors*

$$\mathrm{H}_0(A)^{\perp} = \mathrm{K}(A^*).$$

(g) *Si A est régulier alors* $\overline{\mathrm{H}_0(A)} = \overline{\bigcup_{n \geqslant 0} \mathrm{N}(A^n)} \subseteq \mathrm{K}(A)$.
(h) *Si A est régulier et* $\mathrm{H}_0(A)$ *est fermé, alors* $\mathrm{H}_0(A) = \{0\}$.

2. CARACTÉRISATIONS DES OPÉRATEURS PSEUDO-FREDHOLM

DÉFINITION 2.1. Soit A un opérateur fermé, on dira que A est *normalement décomposable*, s'il existe deux opérateurs fermés D et T de H dans lui-meme tels que:

(α) $A = D + T$ et $TD = DT = 0$.
(β) $D \in \mathrm{q}\Phi(d)$ avec $d \leqslant 1$.

(γ) T est quasinilpotent.
(δ) $N(D) + N(T) = H$, $R(D) \cap \overline{R(T)} = \{0\}$ et $R(D) + \overline{R(T)}$ est fermé.

REMARQUES. (γ) $\Rightarrow$ $D(T) = H$.
(α) $\Rightarrow$ $D(A) = D(D) \cap D(T) = D(D)$.
(β) $\Rightarrow$ $R(D)$ est fermé.
Les produits DT et TD sont définis sur leurs domaines naturels. .

THÉORÈME 2.2. *Soit A opérateur fermé alors: A est normalement décomposable si et seulement si $A \in P\Phi$.*

Démonstration. «Si»: Soit $A \in P\Phi$. Quand A est régulier il suffit de prendre $D = A$ et $T = 0$. Si A est quasinilpotent alors on prend $D = 0$ et $T = A$. Suppo-sons maintenant que nous ne sommes pas dans les deux cas précédents ; soit (M,N) $D = A$ et $T = 0$. Si A est quasinilpotent alors on prend $D = 0$ et $T = A$. Suppo-une D.K.G. associée à A et P_M, P_N les projections correspondantes à la décompo-sition $H = M \oplus N$. Posons $D = AP_M$ et $T = AP_N$; on voit directement que si $u \in D(D)$ alors $P_M u \in D(A)$ donc $(I - P_N)u \in D(A) \Rightarrow u \in D(A)$ (car $N \subseteq D(A)$), d'où $D(D) = D(A)$. En outre $D + T = AP_M + AP_N = A(P_M + P_N) = A$. $DT = AP_M AP_N = 0$ et $TD = AP_N AP_M = 0$, donc (α) est vérifié.

$N \subseteq D(A) \Rightarrow D(T) = H$; et comme $A|N$ est quasinilpotent on en déduit que T est quasinilpotent d'où (γ).

Par ailleurs on a $N(D) = M \cap N(A) + N$ et si on note $A_0 = A|M$ alors $M \cap N(D) = M \cap N(A) = N(A_0)$. Or A_0 est régulier donc $\forall j \geqslant 0$, $N(A_0) \subseteq R(A_0^j)$ et en outre $\forall j \geqslant 0$, $R(A_0^j) \subseteq R(D^j)$. En effet $u \in R(A_0^j) \Rightarrow \exists\, v \in D(A^j) \cap M$ tel que $u = A^j v$.

$$v \in M \Rightarrow v = P_M v \Rightarrow u = A^j P_M v = (AP_M)^j v = D^j v$$

d'où $\forall j \geqslant 0$, $R(A_0^j) \subseteq R(D^j)$. Donc $\forall j \geqslant 0$, $R(D) \cap N(D) \subseteq M \cap N(D) \subseteq$ $\subseteq R(A_0^j) \subseteq R(D^j)$ d'où $\operatorname{dis}(D) \leqslant 1$ et donc (β) est démontrée.

Par définition de D et T on a $N \subseteq N(D)$ et $M \subseteq N(T)$ d'où $H = N(D) + N(T)$.

D'autre part $R(D) = D(M \cap D(D)) \subseteq M$ et $R(T) \subseteq N$, impliquent $R(D) \cap \overline{R(T)} \subseteq M \cap N = \{0\}$. $R(D) + \overline{R(T)}$ est fermé comme somme de deux sous-espaces fermés respectivement de M et N; d'où (δ).

«Seulement si»: si $D \in q\Phi(0)$ c'est-à-dire si D est régulier, alors $DT = TD = 0$ implique $R(T) \subseteq N(D) \subseteq R(D) \subseteq N(T)$ donc $N(D) \subseteq N(T)$ et en utilisant (δ) on a $N(T) = H$ ou encore $T = 0$ et donc $A = D \in P\Phi$.

Supposons maintenant que $D \in q\Phi(1)$. On va construire (M, N) D.K.G. associée à D, suivant la démonstration du Théorème 3.2.2 [9], en choisissant pour M un complément de $[R(D) + N(D)]$ qui est contenu dans $N(T)$, et pour N un complément de $R(D) \cap N(D)$ qui contient $R(T)$.

Pour M, posons $W = [(R(D) + N(D)) \cap N(T)]^{\perp} \cap N(T)$; et pour N, posons $Z = [\overline{R(T)} + \overline{R(T)}^{\perp} \cap (R(D) \cap N(D))^{\perp}]$.

On remarque directement que $W \subseteq \mathrm{N}(T)$ et $\mathrm{R}(T) \subseteq Z$. Montrons que $[\mathrm{R}(D) + \mathrm{N}(D)] \oplus W = H$. $(\beta) \Rightarrow \mathrm{R}(D) + \mathrm{N}(D)$ est fermé donc $[\mathrm{R}(D) + \mathrm{N}(D)] \cap \mathrm{N}(T)$ est fermé d'où

$$H = [\mathrm{R}(D) + \mathrm{N}(D)] \cap \mathrm{N}(T) \oplus \{[\mathrm{R}(D) + \mathrm{N}(D)] \cap \mathrm{N}(T)\}^{\perp}$$

ce qui implique

$$\mathrm{N}(T) = [\mathrm{R}(D) + \mathrm{N}(D)] \cap \mathrm{N}(T) \oplus \{[\mathrm{R}(D) + \mathrm{N}(D)] \cap \mathrm{N}(T)\}^{\perp} \cap \mathrm{N}(T)$$

ou encore

$$\mathrm{N}(T) = [\mathrm{R}(D) + \mathrm{N}(D)] \cap \mathrm{N}(T) \oplus W$$

et d'après (δ) on a $\mathrm{N}(D) + \mathrm{N}(T) = H$ d'où

$$[\mathrm{R}(D) + \mathrm{N}(D)] \oplus W = H.$$

Montrons que $\mathrm{R}(D) \cap \mathrm{N}(D) \oplus Z = H$. $(\delta) \Rightarrow \mathrm{R}(D) + \overline{\mathrm{R}(T)}$ fermé et $\mathrm{R}(D) \cap \overline{\mathrm{R}(T)} = \{0\}$, donc $[\mathrm{R}(D) \oplus \overline{\mathrm{R}(T)}] \cap \mathrm{N}(D)$ est fermé, et comme $\mathrm{R}(D) \oplus \overline{\mathrm{R}(T)}] \cap \mathrm{N}(D) = \mathrm{R}(D) \cap \mathrm{N}(D) \oplus \overline{\mathrm{R}(T)}$, on en déduit que

$$H = [\mathrm{R}(D) \cap \mathrm{N}(D) \oplus \overline{\mathrm{R}(T)}] \oplus [\mathrm{R}(D) \cap \mathrm{N}(D) \oplus \overline{\mathrm{R}(T)}]^{\perp}$$

d'où

$$H = \mathrm{R}(D) \cap \mathrm{N}(D) \oplus \overline{\mathrm{R}(T)} \oplus \mathrm{R}(T)^{\perp} \cap [\mathrm{R}(D) \cap \mathrm{N}(D)]^{\perp}$$

ou encore

$$H = \mathrm{R}(D) \cap \mathrm{N}(D) \oplus Z.$$

Posons $M = \mathrm{R}(D) + W$ et $N = N(D) \cap Z$. (M, N) ainsi défini est une D.K.G. de degré 1 associée à D, en effet $\mathrm{D}(M \cap \mathrm{D}(D)) \subseteq M$ et $N \subseteq \mathrm{D}(D)$, $\mathrm{D}(N) \subseteq N$; $D \mid M$ est régulier et $D \mid N = 0$. Il reste à montrer que $H = M \oplus N$. Pour cela il suffit de montrer d'une part que $M + N = M + \mathrm{N}(D)$ (car $M + \mathrm{N}(D) = \mathrm{R}(D) + \mathrm{N}(D) + W = H$). Il est clair que $M + N \subseteq M + \mathrm{N}(D)$, et inversement

$$H = \mathrm{R}(D) \cap \mathrm{N}(D) + Z \Rightarrow \mathrm{N}(D) = \mathrm{R}(D) \cap \mathrm{N}(D) + N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{N}(D) \subseteq \mathrm{R}(D) + N \subseteq M + N$$

d'où $M + \mathrm{N}(D) \subseteq M + N$ et donc $H = M + \mathrm{N}(D) = M + N$.

En outre soit $u \in M \cap N$ alors $u \in M$ donc $u = Dv + w$ où $v \in \mathrm{D}(D)$ et $w \in W$, ce qui entraine $u - Dv = w \in W \cap [\mathrm{R}(D) + \mathrm{N}(D)] = \{0\}$ donc $u = Dv \in \mathrm{R}(D) \cap N$. Or $N = \mathrm{N}(D) \cap Z$ implique que $u \in \mathrm{R}(D) \cap \mathrm{N}(D) \cap Z = \{0\}$ car Z est complément de $\mathrm{R}(D) \cap \mathrm{N}(D)$, donc $u = 0$ et $M \cap N = \{0\}$.

Pour finir la démonstration, montrons que (M, N) ainsi construit est une D.K.G. associée à A. On vient de voir que $H = M \oplus N$, $M \subseteq \mathrm{N}(T)$, $\mathrm{R}(T) \subseteq N$, $D|M$ est régulier et $D|N = 0$.

$$A(M \cap \mathrm{D}(A)) = (D + T)(M \cap \mathrm{D}(A)) = \mathrm{D}(M \cap \mathrm{D}(D)) \subseteq M$$

donc

$$A(M \cap \mathrm{D}(A)) \subseteq M \text{ et } A|M = D|M,$$

donc $A|M$ est régulier. Par ailleurs $N \subseteq \mathrm{N}(D) \subseteq \mathrm{D}(D) = \mathrm{D}(A)$ et $A(N) = (D + T)(N) = T(N)$. Or $\mathrm{R}(T) \subseteq N$, donc $A(N) \subseteq N$, $A|N = T|N$ et T quasinilpotent $\Rightarrow T|N$ quasinilpotent. D'où finalement $A \in \mathrm{P}\Phi$.

LEMME 2.3. *$A \in \mathrm{P}\Phi$ alors $A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$ est fermé, pour toute* D.K.G. *(M, N) associée à A.*

Démonstration. On a $H = M \oplus N \Rightarrow H$ est isomorphe à $M \times N$ et par conséquent $A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$ est isomorphe à $A(M \cap \mathrm{D}(A)) \times N$. Or $A|M$ est régulier $\Rightarrow A(M \cap \mathrm{D}(A))$ est fermé. D'où on en déduite que $A(M \cap \mathrm{D}(A)) \times N$ est fermé et donc $A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$ est fermé.

LEMME 2.4. *$A \in \mathrm{P}\Phi$ alors $\mathrm{K}(A) = \mathrm{Co}(A|M)$ est fermé.*

Démonstration. $A|M$ régulier $\Rightarrow \mathrm{K}(A|M) = \mathrm{Co}(A|M)$ (voir proposition 1.4 (e)) d'où l'inclusion $\mathrm{Co}(A|M) \subseteq \mathrm{K}(A)$. Réciproquement, soit $u \in \mathrm{K}(A)$ et $a > 0$ $\{v_n\}$ provenant de la définition de $\mathrm{K}(A)$. En particulier on a $\forall n \geqslant 0$ $u = A^n v_n$, donc $\forall n \geqslant 0$

$$u = P_M u + P_N u = A^n v_n = A^n P_M v_n + A^n P_N v_n,$$

d'où on en déduit que

$$P_M u = A^n P_M v_n \text{ et } P_N u = A^n P_N v_n = (AP_N)^n v_n.$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\|P_N u\| \leqslant \|(AP_N)^n\| \|v_n\| \leqslant \varepsilon^n a^n \|u\|$ dès que n est assez grand (car AP_N est quasinilpotent). Prenons $\varepsilon < 1/a$, alors $(\varepsilon a)^n \to 0$ quand $n \to \infty$, d'où $\|P_N u\| = 0$ et par conséquent $u = P_M u = (AP_M)^n v_n$ et finalement $u \in \mathrm{Co}(A|M)$.

PROPOSITION 2.5. *Soit $A \in \mathrm{P}\Phi$ alors $\mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A)$ et $\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A)$ sont fermés.*

Démonstration. On va montrer que $\mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A) = A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$ qui est fermé d'après le Lemme 2.3. On a $A(M \cap \mathrm{D}(A)) \subseteq \mathrm{R}(A)$ et $N \subseteq \mathrm{H}_0(A)$ donc $A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N \subseteq \mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A)$. Réciproquement $\mathrm{R}(A) = A(\mathrm{D}(A)) = A(M \cap \mathrm{D}(A)) + A(N)$ donc $\mathrm{R}(A) \subseteq A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$. D'autre part $N \subseteq$

$\subseteq \mathrm{H}_0(A) \Rightarrow \mathrm{H}_0(A) = M \cap \mathrm{H}_0(A) + N$. Or, $M \cap \mathrm{H}_0(A) = \mathrm{H}_0(A \mid M)$ et $A \mid M$ est régulier par conséquent $\mathrm{H}_0(A \mid M) \subseteq \mathrm{R}(A \mid M) = A(M \cap \mathrm{D}(A))$ donc $\mathrm{H}_0(A) \subseteq A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$. D'où $\mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A) = A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$.

Montrons que $\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A)$ est fermé. D'après le Lemme 2.4. on a $\mathrm{K}(A) = \mathrm{Co}(A \mid M) \subseteq M$ donc $\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A) = \mathrm{K}(A) \cap M \cap \mathrm{N}(A) = \mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A \mid M)$, comme $A \mid M$ régulier, $\mathrm{N}(A \mid M) \subseteq \mathrm{Co}(A \mid M) = \mathrm{K}(A)$ d'où $\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(A \mid M) = M \cap \mathrm{N}(A)$ donc est fermé.

REMARQUE. La Proposition 2.5 $\Rightarrow$ si $A \in \mathrm{P}\Phi$ alors $\forall (M, N)$ D.K.G. associée à A on a:

$$\mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A) = A(M \cap (\mathrm{D}(A)) + N \quad \text{et} \quad \mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(A \mid M).$$

CONJECTUR. *$A \in \mathrm{P}\Phi$ si et seulement si $\mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A)$ et $\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A)$ sont fermés.*

REMARQUES. (1) La Proposition 2.5 répond partiellement à cette question.
(2) Le Théorème 1.2 montre que dans le cas où A est spectral borné on a:

$$A \in \mathrm{P}\Phi \text{ s et seulement si } \mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A) \text{ est fermé.}$$

La condition "$\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A)$ fermé" dans ce cas est toujours vérifiée (le Corollaire 4.3.10 [10], montre que si A est spectral borné alors $\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A) = \{0\}$).
(3) Si la conjecture est démontrée alors la proposition qui suit montre qu'on peut supprimer la condition (δ) de la Définition 2.1, sans changer le Théorème 2.2.

PROPOSITION 2.6. *Soit A un opérateur fermé tel qu'il existe deux opérateurs fermés D et T vérifiant:*

(α) $A = D + T$, $DT = TD = 0$,

(β) $D \in \mathrm{q}\Phi(d)$ *avec* $d \leqslant 1$,

(γ) *T est quasinilpotent.*

Alors $\mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A)$ *et* $\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A)$ *sont fermés.*

Démonstration. Démontrons d'abord le lemme suivant:

LEMME 2.7. *Sous les hypothèses de la Proposition* 2.6 *on a:*

$$(1)\ \mathrm{K}(A) = \mathrm{K}(D)$$

$$(2)\ \mathrm{H}_0(A) = \mathrm{H}_0(D).$$

Démonstration du Lemme 2.7. (1) Remarquons d'abord que (α) $\Rightarrow \forall n \geqslant 1$, $A^n = D^n + T^n$. Soit maintenant $u \in \mathrm{K}(A)$ et $a > 0$, $\{v_n\}$ provenant de la définition de $\mathrm{K}(A)$; en particulier on a $\forall n \geqslant 1$, $u = A^n v_n = D^n v_n + T^n v_n$. Posons $w = Tv_1$

et montrons que $\forall n \geqslant 1$, $w = T^n v_n$ par induction. Pour $n = 1$ c'est vérifié par définition de w. Supposons que c'est vrai pour n c'est-à-dire $w = T^n v_n$. Par définition de $\{v_n\}$ on a $w = T^n A v_{n+1} = T^n(D + T)v_{n+1} = T^{n+1}v_{n+1}$ donc c'est vrai à l'ordre $n+1$. Montrons que $w = 0$, en effet $\|w\| = \|T^n v_n\| \leqslant \|T^n\| \|v_n\| \leqslant \|u\| a^n \|T^n\| \to 0$ quand $n \to \infty$ (car T est quasinilpotent) donc $w = 0$ et par conséquent $\forall n \geqslant 1$, $u = D^n v_n$ d'où $u \in \mathrm{K}(D)$. Réciproquement, soit $u \in \mathrm{K}(D)$ et $\{v_n\}$ provenant de la définition de $\mathrm{K}(D)$; $D = A - T$ implique que $v_n = Dv_{n+1} = (A - T)v_{n+1} = (A - T)Dv_{n+2} = ADv_{n+2} = Av_{n+1}$ d'où $v_n = Av_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$ et si on pose $v_0 = u$ alors on en déduit que $u \in \mathrm{K}(A)$; et par conséquent $\mathrm{K}(A) = \mathrm{K}(D)$.

(2) Soit $u \in \mathrm{H}_0(D)$ par définition $\lim\limits_{n\to\infty}\|D^n u\|^{1/n} = 0$ d'où $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0$ tel que $\forall n > N \Rightarrow \|D^n u\| \leqslant \varepsilon^n$. T étant quasinilpotent et $A^n u = D^n u + T^n u$, on en déduit que $\|A^n u\| \leqslant \|D^n u\| + \|T^n u\| \leqslant (\varepsilon/2)^n + (\varepsilon/2)^n \leqslant \varepsilon^n$ ceci pour tout $\varepsilon > 0$ dès que n est assez grand. Donc $\|A^n u\|^{1/n} \to 0$ quand $n \to \infty$ d'où $\mathrm{H}_0(D) \subseteq \mathrm{H}_0(A)$. Pour l'inclusion inverse, on écrit $D = A - T$ et en faisant le même raisonnement que plus haut, on en déduit que $\mathrm{H}_0(D) = \mathrm{H}_0(A)$.

Démonstration de la Proposition 2.6. On va montre que $\mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A) = \mathrm{R}(D) + \mathrm{H}_0(D)$.

$$A = D + T \Rightarrow \mathrm{R}(A) \subseteq \mathrm{R}(D) + \mathrm{R}(T); \quad DT = 0 \Rightarrow \mathrm{R}(T) \subseteq \mathrm{N}(D) \subseteq \mathrm{H}_0(D)$$

donc $\mathrm{R}(A) \subseteq \mathrm{R}(D) + \mathrm{H}_0(D)$. Le lemme précédent implique que $\mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A) \subseteq \mathrm{R}(D) + \mathrm{H}_0(D)$. Inversement $D = A - T$ et $DT = 0$ entraînent que

$$\mathrm{R}(D) \subseteq \mathrm{R}(A) + \mathrm{R}(T) \subseteq \mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(D) = \mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A)$$

d'où

$$\mathrm{R}(D) + \mathrm{H}_0(\mathrm{D}) \subseteq \mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A).$$

Et donc finalement $\mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A) = \mathrm{R}(D) + \mathrm{H}_0(D)$. En utilisant la Proposition 2.5 (puisque $D \in \mathrm{P}\Phi$) on en déduit que $\mathrm{R}(D) + \mathrm{H}_0(D)$ est fermé et par conséquent $\mathrm{R}(A) + \mathrm{H}_0(A)$ est fermé.

Montrons que $\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A)$ est fermé. Pour cela on va montrer que

$$\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A) = \mathrm{K}(D) \cap \mathrm{N}(D).$$

Soit $u \in \mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A)$, comme $\mathrm{K}(A) = \mathrm{K}(D)$ (voir lemme précédent), on en déduit que $Au = 0$ et $u \in \mathrm{K}(D) \subseteq \mathrm{R}(D) \subseteq \mathrm{N}(T)$, donc $0 = Au = (D + T)u = Du$ c'est-à-dire que $u \in \mathrm{N}(D)$, et donc $\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A) \subseteq \mathrm{K}(D) \cap \mathrm{N}(D)$. Inversement, $u \in \mathrm{K}(D) \cap \mathrm{N}(D) \Rightarrow Du = 0$ et $u \in \mathrm{R}(D) \subseteq \mathrm{N}(T)$ d'où $0 = Du = (A - T)u = Au$ donc $u \in \mathrm{N}(A)$ et comme $\mathrm{K}(A) = \mathrm{K}(D)$, on en déduit que $\mathrm{K}(A) \cap \mathrm{N}(A) = \mathrm{K}(D) \cap \mathrm{N}(D)$ est fermé d'après la Proposition 2.5.

3 PROPRIÉTÉS DES OPÉRATEURS PSEUDO-FRDHOLM

LEMME 3.1. *Soit $A \in \mathrm{P}\Phi$ et (M, N) une* D.K.G. *associée à A. Soit P_M et P_N respectivement les projections sur M et N suivant la décomposition $H = M \oplus N$. Alors on a:*

(a) $AP_M \in \mathrm{q}\Phi(1)$ *(si $N \neq \{0\}$ et $M \neq \{0\}$).*

(b) $\mathrm{K}(A) = \mathrm{K}(AP_M) = \mathrm{Co}(A \mid M)$ *est fermé.*

(c) $\mathrm{H}_0(A) = \mathrm{H}_0(AP_M)$.

Démonstration. (a) Provient du fait que $N \subseteq \mathrm{N}(AP_M) \Rightarrow AP_M|N$ est nilpotent de degré 1; d'autre part $AP_M \mid M = A \mid M$ et donc régulier.

(b) et (c) se déduisent du Théorème 2.2 et du Lemme 2.7.

LEMME 3.2. *Soit $A \in \mathrm{P}\Phi$ et (M, N) une* D.K.G. *associée à A alors $\mathrm{R}(A) + N = A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$ est fermé dans H.*

Démonstration. $N \subseteq \mathrm{D}(A)$ implique $\mathrm{D}(A) = M \cap \mathrm{D}(A) + N$ d'où

$$\mathrm{R}(A) \subseteq A(M \cap \mathrm{D}(A)) + A(N) \subseteq A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$$

donc

$$\mathrm{R}(A) + N \subseteq A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$$

l'autre inclusion étant évidence, on a $\mathrm{R}(A) + N = A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$ qui est fermé d'après le lemme 2.3.

THÉORÈME 3.3. *Soit A un opérateur fermé de domaine dense dans H, alors:*

$$A \in \mathrm{P}\Phi \Rightarrow A^* \in \mathrm{P}\Phi.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{P}\Phi$ et (M, N) une D.K.G. associée à A. On va montrer que $(N^\perp, M^\perp)$ est une D.K.G. associée à A^*. Remarquons d'abord que

$$H = M \oplus N \Rightarrow H = N^\perp \oplus M^\perp.$$

(1) Montrons que $M^\perp \subseteq \mathrm{D}(A^*)$. Soit $u \in M^\perp$ et $v \in \mathrm{D}(A)$, on a $v = P_M v + P_N v$, $v \in \mathrm{D}(A)$ et $P_N v \in \mathrm{D}(A) \Rightarrow P_M v \in \mathrm{D}(A)$. Donc $(Av, u) = (AP_M v, u) + (AP_N v, u)$. Or $A(M \cap \mathrm{D}(A)) \subseteq M \Rightarrow AP_M v \in M$ et comme $u \in M^\perp$, on a $(AP_M v, u) = 0$. Donc $(Av, u) = (AP_N v, u)$. $N \subseteq \mathrm{D}(A) \Rightarrow AP_N$ est borné. Donc $|(Av, u)| \leqslant \|AP_N\| \cdot \|v\| \cdot \|u\|$. D'où $u \in \mathrm{D}(A^*)$.

(2) $A^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$ et $A^*(N^\perp \cap \mathrm{D}(A^*)) \subseteq N^\perp$ sont du fait que $A(N) \subseteq N$ et $A(M \cap \mathrm{D}(A)) \subseteq M$.

(3) Montrons que $A^*|M^\perp$ est quasinilpotent. Pour cela, montrons d'abord que

$$(\mathrm{P}_{M^\perp})^* = P_N.$$

Soit $u \in H$ et $v \in H$,

$$((P_{M^\perp})^* u, v) = (u, P_{M^\perp} v) = (P_M u + P_N u, P_{M^\perp} v) =$$

$$= (P_M u, P_{M^\perp} v) + (P_N u, P_{M^\perp} v) = (P_N u, P_{M^\perp} v) =$$

$$= (P_N u, (I - P_{N^\perp}) v) = (P_N u, v) - (P_N u, P_{N^\perp} v) = (P_N u, v)$$

donc $\forall u \in H$, $\forall v \in H$ $((P_{M^\perp})^* u, v) = (P_N u, v)$ c'est-à-dire

$$(P_{M^\perp})^* = P_N \text{ et } P_{M^\perp} = (P_N)^*$$

D'autre part

$$(AP_N)^* = (P_N A P_N)^* = P_{M^\perp} A^* P_{M^\perp} = A^* P_{M^\perp} .$$

Or AP_N est quasinilpotent $\Rightarrow$ $(AP_N)^*$ est quasinilpotent. Donc $A^* P_{M^\perp}$ est quasinilpotent d'où $A^* | M^\perp$ est quasinilpotent.

(4) Reste à montrer que $A^* | N^\perp$ est régulier. Le même raisonnement utilisé dans (3) montre que $(P_{N^\perp})^* = P_M$. Le Lemme 3.1 (a)$\Rightarrow AP_M \in \mathrm{q}\Phi(1)$ et d'après la Proposition 3.3.4 [9] on a $(AP_M)^* \in \mathrm{q}\Phi(1)$, donc $A^* P_{N^\perp} \in \mathrm{q}\Phi(1)$ et comme $\mathrm{R}(A^* | N^\perp) = \mathrm{R}(A^* P_{N^\perp})$ on en déduit que $\mathrm{R}(A^* P_{N^\perp})$ est fermé. Donc pour montrer (4) il suffit de montrer que

$$\mathrm{N}(A^* | N^\perp) \subseteq \mathrm{R}(A^* P_{N^\perp}) \quad \text{car } A^* P_{N^\perp} \in \mathrm{q}\Phi(1).$$

$u \in \mathrm{N}(A^* | N^\perp) = \mathrm{N}(A^*) \cap N^\perp \Rightarrow u \perp (\mathrm{R}(A) + N)$. Or d'après le Lemme 3.2 on a $\mathrm{R}(A) + N = A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N$ qui est fermé. Donc $u \in [A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N]^\perp$.

$$\mathrm{N}(AP_M) = \mathrm{N}(A | M) + N \subseteq \mathrm{R}(A | M) + N \Rightarrow [A(M \cap \mathrm{D}(A)) + N]^\perp \subseteq \mathrm{N}(AP_M)^\perp$$

donc $u \in \mathrm{N}(AP_M)^\perp = \mathrm{R}((AP_M)^*)$ qui est fermé car $(AP_M)^* \in \mathrm{q}\Phi(1)$. Donc $u \in \mathrm{R}(A^* P_{N^\perp}) = \mathrm{R}(A^* | N^\perp)$ d'où finalement $\mathrm{N}(A^* | N^\perp) \subseteq \mathrm{R}(A^* | N^\perp)$ et donc $(N^\perp, M^\perp)$ est une D.K.G. associée à A^*.

PROPOSITION 3.4. *Si $A \in \mathrm{P}\Phi$ avec $\mathrm{D}(A)$ dense dans H, alors:*

$$\mathrm{H}_0(A)^\perp = \mathrm{K}(A^*).$$

Démonstration. Se déduit du Lemme 3.1 et de la Proposition 1.4 (f).

PROPOSITION 3.5. *Soit $A \in \mathrm{P}\Phi$. Alors il existe $F \in B(H)$ tel que $A + F$ régulier, AF quasinilpotent et $[A, F] = 0$.*

Démonstration. $A \in \mathrm{P}\Phi$, soit (M, N) une décomposition de Kato généralisée associée à A, alors

$$H = M \oplus N \text{ et } A = A_1 \oplus A_2.$$

Posons $F = 0 \oplus (I_2 - A_2)$ où I_2 est la restriction de I à N. Alors, $N \subseteq \mathrm{D}(A) \Rightarrow \Rightarrow F \in B(H)$. Il est clair que $A + F = A_1 \oplus I_2$ est régulier (puisque A_1 l'est).

A_2 étant quasinilpotent, $I_2 - A_2$ est inversible donc $(I_2 - A_2)(N) = N$. Par conséquent $\mathrm{R}(F) = N \subseteq \mathrm{D}(A)$, d'où $AF \in B(H)$. Et il est facile de vérifier que $[A, F] = 0$. En outre, $\forall n \geqslant 0$,

$$\|(AF)^n\|^{1/n} = \|(A_2(I_2 - A_2))^n\|^{1/n} \leqslant \|I_2 - A_2\| \, \|A_2^n\|^{1/n}$$

or A_2 est qasinilpotent d'où AF est quasinilpotent.

4. CARACTÉRISATION DES SINGULARITÉS ISOLÉES DES OPÉRATEURS RÉSOLVANTS GÉNÉRALISÉS

Soit $\mathscr{U}$ une partie de $\mathbf{C}$, on dira que A admet un opérateur résolvant généralisé $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ dans $\mathscr{U}$ si $\forall \lambda \in \mathscr{U}$, $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est un opérateur borné à image dans $\mathrm{D}(A)$ tel que:

$$(A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I) = (A - \lambda I) \text{ et } \mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda) = \mathrm{Rg}(A, \lambda).$$

REMARQUE. En général, $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ n'est pas unique. Si toutefois $\lambda \in \rho(A)$ alors $\mathrm{Rg}(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ l'opérateur résolvant habituel. Si on note $P_\lambda = (A - - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ et $Q_\lambda = \mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)$, alors P_λ et Q_λ sont des projections telles que $\mathrm{R}(P_\lambda) = \mathrm{R}(A - \lambda I)$ et $\mathrm{N}(Q_\lambda) = \mathrm{N}(A - \lambda I)$.

L'auteur dans [11], [12] et [13] donne une généralisation de l'ensemble résolvant de A ($\rho(A)$) où la notion de l'opérateur résolvant est remplacée par celle du résolvant généralisé. Notons $\mathrm{reg}(A)$, l'ensemble résolvant généralisé (ou l'ensemble régulier) de A défini par:

$$\mathrm{reg}(A) = \{\lambda \in \mathbf{C};\ A \text{ admet un opérateur résolvant généralisé analytique dans un voisinage } \mathscr{U} \text{ de } \lambda\}.$$

Il est clair que $\mathrm{reg}(A)$ est ouvert et contient $\rho(A)$.

Le Théorème 2.6 [11]:

"$\lambda_0 \in \mathrm{reg}(A) \Leftrightarrow A - \lambda_0 I$ *est régulier* ($\Leftrightarrow A - \lambda_0 I \in \mathrm{P}\Phi$ *avec* $N = \{0\}$)"

caractérise les opèrateurs qui admettent un résolvant généralisé analytique dans un voisinage de C.

Par ailleurs J. P. Labrousse ([9] Corollaire 4.3.2) a caractérisé les pôles d'ordre fini des opérateurs résolvants généralisés voir aussi [4] et [5].

Dans ce paragraphe, on se propose d'une part de caractériser toutes les singularités isolées de l'opérateur résolvant généralisé, même quand celles-ci sont essentielles (Théorème 4.4 et Corollaire 4.8). D'autre part, on montre que les opérateur pseudo-Fredholm sont stables par les "petites perturbations" de type λI (Corollaire 4.2).

Tout d'abord quelques notions et notations qu'on trouve essentiellement dans [8] et [9].

Soit M et N deux sous-espaces fermés de H et P_M, P_N les projections orthogonales respectivement sur M, N. Notons:

$$g(M, N) = \|P_M - P_N\| \quad \text{et} \quad \delta(M, N) = \|(I - P_N)P_M\|.$$

Posons $\overline{M} = M \ominus (M \cap N^{\perp})$ et $\varepsilon(M, N) = \|(I - P_N)P_{\overline{M}}\| = \delta(\overline{M}, N)$.

Remarque ([8]; [9]). 1) $g(M, N)$ définit une métrique sur la famille des sous-espaces fermés de H.

2) $\delta(M, N) = \delta(N^{\perp}, M^{\perp})$ et $\delta(M, N) < 1 \Rightarrow M \cap N^{\perp} = \{0\}$.

3) $g(M, N) = \max\{\delta(M, N); \delta(N, M)\}$.

4) $\varepsilon(M, N) \leqslant \min\{\delta(M, N); \delta(N, M)\} \leqslant g(M, N)$.

Proposition 4.1. *Soit A un opérateur fermé et $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ tel que $A - \lambda_0 I \in \mathrm{P}\Phi$, Alors il existe trois constantes α, β, γ positive telles que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ avec $0 < |\lambda - \lambda_0| < \gamma$*

(a) *$A - \lambda I$ est régulier,*

(b) $g(\mathrm{N}(A - \lambda I), \mathrm{K}(A - \lambda_0 I) \cap \mathrm{N}(A - \lambda_0 I)) < \alpha|\lambda - \lambda_0|$,

(c) $g(\mathrm{R}(A - \lambda I), \mathrm{R}(A - \lambda_0 I) + \mathrm{H}_0(A - \lambda_0 I)) < \beta|\lambda - \lambda_0|$.

Remarque. La Proposition 2.5 $\Rightarrow \mathrm{K}(A - \lambda_0 I) \cap \mathrm{N}(A - \lambda_0 I)$ et $\mathrm{R}(A - \lambda_0 I) + \mathrm{H}_0(A - \lambda_0 I)$ sont fermés. Donc (b) et (c) ont un sens.

Démonstration. Soit $A - \lambda_0 I \in \mathrm{P}\Phi$ et soit (M, N) une D.K.G. associée à $A - \lambda_0 I$.

Montrons que $\forall \lambda \neq \lambda_0$

$$\mathrm{N}(A - \lambda I) = \mathrm{N}(A - \lambda I) \cap M = \mathrm{N}(A - \lambda I \mid M). \tag{1}$$

En effet soit $u \in \mathrm{N}(A - \lambda I)$ avec $\lambda \neq \lambda_0$, on a $u = v + w$ où $v \in M$ et $w \in N$. Or $u \in \mathrm{D}(A)$ et $w \in \mathrm{D}(A)$ donc $v \in \mathrm{D}(A)$ et par conséquent

$$0 = (A - \lambda I)u = (A - \lambda I)v + (A - \lambda I)w \Rightarrow (A - \lambda I)v = - (A - \lambda I)\, w \in M \cap N = \{0\}.$$

Donc $(A - \lambda I)v = (A - \lambda I)w = 0$ ce qui implique $w \in \mathrm{N}(A - \lambda I)$ donc $w \in N(A - \lambda I) \cap \mathrm{H}_0(A - \lambda_0 I) = \{0\}$ car $\lambda \neq \lambda_0$. D'où $w = 0$ et donc $u = v$ et par conséquent $\mathrm{N}(A - \lambda I) = \mathrm{N}(A - \lambda I) \cap M = \mathrm{N}(A - \lambda I \mid M)$. $A - \lambda_0 I \mid M$ est régulier, donc il existe $\mathscr{V}$ voisinage de λ_0 dans $\mathbf{C}$ tel que $\forall \lambda \in \mathscr{V}$ $A - \lambda I \mid M$ est régulier (du fait que reg(A) est ouvert). Donc $\mathrm{R}(A - \lambda I \mid M)$ est fermé $\forall \lambda \in \mathscr{V}$. Par ailleurs on vient de voir (1) que $\forall \lambda \neq \lambda_0$ $\mathrm{N}(A - \lambda I) = \mathrm{N}(A - \lambda I \mid M)$ donc

$$\forall \lambda \in V - \{\lambda_0\} \quad \forall n \geqslant 0, \quad \mathrm{N}(A - \lambda I) = \mathrm{N}(A - \lambda I \mid M) \subseteq \mathrm{R}((A - \lambda I \mid M)^n)$$

d'où

$$\forall \lambda \in \mathscr{V} - \{\lambda_0\} \quad \forall n \geqslant 0, \quad \mathrm{N}(A - \lambda I) \subseteq \mathrm{R}((A - \lambda I)^n).$$

Reste à montrer que $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ est fermé pour $\lambda \in \mathscr{V} - \{\lambda_0\}$. $A - \lambda_0 I \mid N$ étant quasinilpotent, on en déduit que $\forall \lambda \neq \lambda_0$ $A - \lambda I \mid N$ est une bijection sur N. Donc en particulier $N = \mathrm{R}(A - \lambda I \mid N)$ est fermé. Soit $\gamma > 0$ tel que $\{\lambda \in \mathbf{C};\ 0 < |\lambda - \lambda_0| < \gamma\} \subseteq \mathscr{V}$, alors $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ avec $0 < |\lambda - \lambda_0| < \gamma$,

$$\text{(2)} \quad \mathrm{R}(A - \lambda I) = \mathrm{R}(A - \lambda I \mid M) \oplus \mathrm{R}(A - \lambda I \mid N) = \mathrm{R}(A - \lambda I \mid M) \oplus N.$$

D'où $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ est fermé comme somme de deux sous-espaces fermés respectivement de M et N. Par conséquent (a) est démontré.

En outre, $A - \lambda_0 I \mid M$ étant régulier, le Corollaire 1.11 (a) [14] implique que:

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } |\lambda - \lambda_0| < \gamma \Rightarrow g(\mathrm{N}(A - \lambda I \mid M), \mathrm{N}(A - \lambda_0 I \mid M)) \leqslant \alpha |\lambda - \lambda_0|.$$

Or $\mathrm{N}(A - \lambda_0 I \mid M) = \mathrm{N}(A - \lambda_0 I) \cap \mathrm{K}(A - \lambda_0 I)$. D'autre part d'après (1), si $0 < |\lambda - \lambda_0| < \gamma$ on a $\mathrm{N}(A - \lambda I \mid M) = \mathrm{N}(A - \lambda I)$ d'où (b).

De même d'après le Corollaire 1.11 (b) [14] on a:

$$\exists \mu > 0 \text{ tel que } |\lambda - \lambda_0| < \gamma \Rightarrow g(\mathrm{R}(A - \lambda I \mid M), \mathrm{R}(A - \lambda_0 I \mid M)) \leqslant \mu |\lambda - \lambda_0|.$$

Or, d'une part (2) $\Rightarrow \mathrm{R}(A - \lambda I) = \mathrm{R}(A - \lambda I \mid M) \oplus N$, et d'autre part on a

$$\mathrm{R}(A - \lambda_0 I) + \mathrm{H}_0(A - \lambda_0 I) = \mathrm{R}(A - \lambda_0 I \mid M) \oplus N$$

(voir la démonstration de la Proposition 2.5). En utilisant le Corollaire 1.3.5 [9], on obtient

$$g(\mathrm{R}(A - \lambda I),\ \mathrm{R}(A - \lambda_0 I) + \mathrm{H}_0(A - \lambda_0 I)) \leqslant$$

$$g(\mathrm{R}(A - \lambda I \mid M),\ \mathrm{R}(A - \lambda_0 I \mid M)) \leqslant (1 - \varepsilon^2)^{-1/2}$$

où $\varepsilon = \varepsilon(\mathrm{R}(A - \lambda_0 I \mid M), N^{\perp})$ et en prenant $\beta = \mu(1 - \varepsilon)^{-1/2}$, on en déduit (c).

COROLLAIRE 4.2. *Les opérateurs pseudo-Fredholm sont stables par les "petites perturbations" de type λI.*

Démonstration. Se déduit de la proposition précédente et du fait que les opérateurs réguliers sont pseudo-Fredholm.

PROPOSITION 4.3. *Soit A un opérateur fermé et $\lambda_0 \in \mathbf{C}$. Supposons qu'il existe trois constantes α, β, γ et deux sous-espaces fermés H_1 et H_2 tels que les conditions suivantes soient satisfaites pour tout λ tel que $0 < |\lambda - \lambda_0| < \gamma$*

c$_1$) $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ *est fermé,*

c$_2$) $g(\mathrm{N}(A - \lambda I), H_1) < \alpha|\lambda - \lambda_0|$,

c$_3$) $g(\mathrm{R}(A - \lambda I), H_2) < \beta|\lambda - \lambda_0|$.

Alors il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de λ_0 dans $\mathbf{C}$ tel que A admette un opérateur résolvant généralisé $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ *dans $\mathscr{U} - \{\lambda_0\}$ tel que:*

b$_1$) $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ *est analytique dans $\mathscr{U} - \{\lambda_0\}$ à valeurs dans* $\mathrm{D}(A)$,

b$_2$) *Les projections P_λ et Q_λ correspondantes sont analytiques dans $\mathscr{U}$,*

b$_3$) $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ *vérifie l'identité de la résolvante dans $\mathscr{U} - \{\lambda_0\}$.*

REMARQUE. c$_1$) $\Rightarrow$ c$_3$) a un sens.

Démonstration: Posons $c_0 = \min\{1/\alpha, 1/\beta, \gamma\}$ et $\mathscr{U} = \{\lambda \in \mathbf{C}; 0 \leqslant |\lambda - \lambda_0| < c_0\}$: d'après les hypothèses on a $\forall \lambda \in \mathscr{U} - \{\lambda_0\}$

$$\begin{cases} g_1 = g(\mathrm{N}(A - \lambda I), H_1) < 1 \\ g_2 = g(\mathrm{R}(A - \lambda I), H_2) < 1. \end{cases} \tag{1}$$

Or, si M et N sont deux sous-espaces fermés de H tel que $g(M, N) < 1$ alors d'après le Corollaire 1.2.4 [9] on en déduit, d'une part $M \cap N^\perp = M^\perp \cap N = \{0\}$ et d'autre part $\varepsilon(M, N) = g(M, N)$ donc $\varepsilon(M, N) < 1$ et d'après la Proposition 1.3.2 [9], $M + N^\perp$ est fermé. Donc $M + N^\perp = (M^\perp \cap N)^\perp = \{0\}^\perp = H$ d'où $M \oplus N^\perp = H$.

Posons $M = \mathrm{N}(A - \lambda I)$ et $N = H_1$, alors d'après ce qu'on vient de voir et (1) on a:

$$\forall \lambda \in \mathscr{U} - \{\lambda_0\} \quad \mathrm{N}(A - \lambda I) \oplus H_1^\perp = H. \tag{2}$$

De même si on pose $M = \mathrm{R}(A - \lambda I)$ et $N = H_2$ alors on a:

$$\forall \lambda \in \mathscr{U} - \{\lambda_0\} \quad \mathrm{R}(A - \lambda I) \oplus H_2^\perp = H. \tag{3}$$

Soit Q_λ la projection sur $H_1^\perp$ correspondant à la décomposition (2) et P_λ la projection sur $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ correspondant à la décomposition (3). En utilisant encore la Proposition 1.3.2 [9], on trouve:

$$\|P_\lambda\| \leqslant (1 - g_2^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \|Q_\lambda\| \leqslant (1 - g_1^2)^{-1/2}. \tag{4}$$

Soit maintenant $u \in H$ et $\lambda \in \mathcal{U} - \{\lambda_0\}$; alors $P_\lambda u \in \mathrm{R}(A - \lambda I)$ donc il existe $v \in \mathrm{D}(A)$ tel que $(A - \lambda I)v = P_\lambda u$. On posera par définition:

(5) $$\forall\, u \in H \text{ et } \lambda \in \mathcal{U} - \{\lambda_0\}, \quad \mathrm{Rg}(A, \lambda)u = Q_\lambda v \in \mathrm{D}(A).$$

Montrons que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est ainsi bien défini. En effet soit $w \in H$ tel que $(A - \lambda I)w = P_\lambda u$ alors $v - w \in \mathrm{N}(A - \lambda I)$. D'où $Q_\lambda(v - w) = 0$ ou encore $Q_\lambda v = Q_\lambda w$ ce qui montre que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ ne dépend pas du choix de v.

Montrons que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est un résolvant généralisè de A dans $\mathcal{U} - \{\lambda_0\}$. (5) $\Rightarrow$ $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est à valeurs dans $\mathrm{D}(A)$ vérifions que

(6) $$\forall\, \lambda \in \mathcal{U} - \{\lambda_0\}, \quad (A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I) = (A - \lambda I).$$

D'abord on a $\forall\, u \in \mathrm{D}(A)$, $(I - Q_\lambda)u \in \mathrm{N}(A - \lambda I)$. Donc $(A - \lambda I)(I - Q_\lambda)u = 0$ donc $(A - \lambda I)u = (A - \lambda I)Q_\lambda u$ d'où par définition de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ on a $(A - \lambda I)\cdot\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)u = (A - \lambda I)Q_\lambda u = (A - \lambda I)u$ donc (6) est démontré. Vérifions maintenant que

(7) $$\forall\, \lambda \in \mathcal{U} - \{\lambda_0\}, \quad \mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda) = \mathrm{Rg}(A, \lambda).$$

Soit $u \in H$ avec $P_\lambda u = (A - \lambda I)v$ par définition de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ on a $\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = Q_\lambda v$ donc

$$(A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = (A - \lambda I)Q_\lambda v = (A - \lambda I)v$$

donc

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = \mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)v = Q_\lambda v = \mathrm{Rg}(A, \lambda)u$$

d'où (7) est démontré.

$\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est défini sur tout H. La linéarité étant évidente, pour montre que $\mathrm{Rg}(A, \lambda) \in B(H)$, il suffit de montrer que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est fermé. Soit u_n une suite telle que $u_n \to u$ et $\mathrm{Rg}(A, \lambda)u_n \to w$, montrons que $w = \mathrm{Rg}(A, \lambda)u$.

$P_\lambda u_n \in \mathrm{R}(A - \lambda I) \Rightarrow \exists\, v_n \in \mathrm{D}(A) \cap \mathrm{N}(A - \lambda I)^\perp$ tel que $P_\lambda u_n = (A - \lambda I)v_n$, P_λ étant borné on a $P_\lambda u_n \to P_\lambda u$. Donc $(A - \lambda I)v_n \to P_\lambda u$. En appliquant la définition de la conorme et du fait que $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ est fermé on déduit que v_n converge. Soit $v_n \to v$; par conséquent $P_\lambda u = (A - \lambda I)v$ d'où $\mathrm{Rg}(A, \lambda)u_n = Q_\lambda v_n \to Q_\lambda v = \mathrm{Rg}(A, \lambda)u$. Donc $w = \mathrm{Rg}(A, \lambda)u$.

Pour établir l'analyticité de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ sur $\mathcal{U} - \{\lambda_0\}$, soit $\lambda, \mu \in \mathcal{U} - \{\lambda_0\}$ on a:

$$(I - P_\mu)(I - P_\lambda) = (I - P_\lambda) \quad \text{d'où } P_\mu P_\lambda = P_\mu\text{; de même on a } Q_\mu Q_\lambda = Q_\lambda.$$

D'autre part soit $u \in H$ alors:

$$(A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = (A - \lambda I)Q_\lambda v = (A - \lambda I)v = P_\lambda u.$$

Et si $v_0 \in D(A)$ posons

$$(A - \lambda I)v_0 = u = P_\lambda u$$

alors

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)v_0 = \mathrm{Rg}(A, \lambda)u = Q_\lambda v_0.$$

Donc $\forall \lambda \in \mathscr{U} - \{\lambda_0\}$ on a:

$$(8) \qquad \begin{cases} P_\lambda = (A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda) & \text{sur } H \\ Q_\lambda = \mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I) & \text{sur } D(A). \end{cases}$$

Soit $u \in H$,

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda)u - \mathrm{Rg}(A, \mu)u = Q_\mu \mathrm{Rg}(A, \lambda)u - \mathrm{Rg}(A, \mu)P_\lambda u =$$

$$= \mathrm{Rg}(A, \mu)(A - \mu I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u - \mathrm{Rg}(A, \mu)(A - \lambda)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u =$$

$$= (\lambda - \mu)\mathrm{Rg}(A, \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u.$$

Donc $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ vérifie l'identité de la résolvante. P_λ et Q_λ étant continues sur $\mathscr{U}$, on en déduit que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est continue dans $\mathscr{U} - \{\lambda_0\}$ et comme on vient de voir que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ vérifie l'identité de la résolvante, on en déduit que

$$(\mathrm{Rg}(A, \lambda))' = (\mathrm{Rg}(A, \lambda))^2$$

formule qui généralise la formule bien connue pour la dérivée de l'opérateur résolvant habituel et qui établit que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est analytique dans $\mathscr{U} - \{\lambda_0\}$; d'où b_1) et b_2).

Montrons b_2); $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est analytique dans $\mathscr{U} - \{\lambda_0\}$ et (8) impliquent que P_λ, Q_λ sont analytiques dans $\mathscr{U} - \{\lambda_0\}$ et comme P_λ et Q_λ sont continues en λ_0, on en déduit que P_λ et Q_λ sont analytiques dans $\mathscr{U}$.

THÉORÈME 4.4. *Soit A un opérateur fermé et $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(I) *Soit $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbf{C}$ et $\lambda_0 \in \mathscr{U}$ tel que A admette un opérateur résolvant généralisé $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ analytique dans $\mathscr{U} - \{\lambda\}$ et tel que λ_0 soit une singularité de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ avec, en outre P_λ et Q_λ analytiques dans $\mathscr{U}$.*

II. $A - \lambda_0 I \in \mathrm{P}\Phi$.

REMARQUE. (1) Si $\forall \lambda \in U - \{\lambda_0\}$, $\mathrm{Rg}(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ l'opérateur résolvant habituel alors la condition "P_λ et Q_λ analytiques dans $\mathscr{U}$" est vérifiée. En effet si $\lambda \in \rho(A)$ alors $P_\lambda = I$ et $Q_\lambda = I_{D(A)}$.

(2) Pour démontrer le Théorème 4.4 on aura besoin de quelques résultats préliminaires et sans perte de généralité on supposera $\lambda_0 = 0$.

Proposition 4.5. *Sous l'hypothèse* (I) *du Théorème* 4.4 *avec* $\lambda_0 = 0$, *on a*:

Il existe $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ *résolvant généralisé de* A, *analytique dans* $\mathscr{U}' - \{0\}$ *où* $\mathscr{U}'$ *est un voisinage de zéro dans* $\mathbf{C}$, *tels que* $\overline{\mathrm{Rg}}(A, \lambda)$ *vérifie l'identité de la résolvante dans* $\mathscr{U}' - \{0\}$ *et* $\bar{P}_\lambda = (A - \lambda I)\overline{\mathrm{Rg}}(A, \lambda)$, $Q_\lambda = \overline{\mathrm{Rg}}(A, \lambda)(A - \lambda I)$ *soient analytiques dans* $\mathscr{U}'$.

Démonstration. Soient $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ et $\mathscr{U}$ du Théorème 4.4 (I). Remarquons que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ analytique dans $\mathscr{U} - \{0\}$ implique (d'après le Théorème 2.6 [11]) que $\forall \lambda \in \mathscr{U} - \{0\}$, $A - \lambda I$ est régulier donc $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ est fermé $\forall \lambda \in \mathscr{U} - \{0\}$.

P_λ, Q_λ étant continues en zéro, soient $P_0 = \lim_{\lambda \to 0} P_\lambda$ et $Q_0 = \lim_{\lambda \to 0} Q_\lambda$.

P_0, Q_0 sont des projections, comme limites de projections, donc $I - Q_0$ est une projection sur $\mathrm{N}(Q_0)$ et comme $\forall \lambda \in \mathscr{U} - \{0\}$, $I - Q_\lambda$ est une projection sur $\mathrm{N}(A - \lambda I)$, d'après la Proposition 1.2.4 [9], on en déduit que:

$$\forall \lambda \in \mathscr{U} - \{0\}, \quad g(\mathrm{N}(A - \lambda I), \mathrm{N}(Q_0)) \leqslant \|(I - Q_\lambda) - (I - Q_0)\| = \|Q_\lambda - Q_0\|.$$

Or, $Q_\lambda \to Q_0$ quand $\lambda \to 0$, donc il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de zéro dans $\mathbf{C}$ tel que

$$\forall \lambda \in \mathscr{V} \quad \|Q_\lambda - Q_0\| < 1.$$

De même $P_\lambda - P_0$ quand $\lambda \to 0$ et P_λ est une projection sur $\mathrm{R}(A - \lambda I)$, on en déduit qu'il existe $\mathscr{V}'$ voisinage de zéro dans $\mathbf{C}$ tel que

$$\forall \lambda \in \mathscr{V}', \quad \|P_\lambda - P_0\| < 1.$$

Donc $\forall \lambda \in \mathscr{V} \cap \mathscr{V}'$,

$$g(\mathrm{N}(A - \lambda I), \mathrm{N}(Q_0)) < 1$$

$$g(\mathrm{R}(A - \lambda I), \mathrm{R}(P_0)) < 1.$$

La démonstration de la Proposition se déduit de la Proposition 4.3 avec $H_1 = \mathrm{N}(Q_0)$ et $H_2 = \mathrm{R}(P_0)$.

Remarque. 1) Dans la suite et d'après la Proposition 4.5, on supposera que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ vérifie l'identité de la résolvante dans $\mathscr{U} - \{0\}$.

2) Sous l'hypothèse (I) du Théorème 4.4, on peut écrire:

$$\forall \lambda \in \mathscr{U} - \{0\} \quad \mathrm{Rg}(A, \lambda) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda^j A_j$$

où les A_j sont des opérateurs bornés de H dans $\mathrm{D}(A)$.

LEMME 4.6. *Sous l'hypothèse* (1) *du Théorème* 4.4 *et avec les notations de la Remarque précédente, on a:*

1) $A_{-1}^2 = -A_{-1}$,
2) $A_{-1}A_m = 0 \ \forall m \geqslant 0$,
3) $A_m(I + A_{-1}) = 0 \ \forall m < 0$,

où les A_m $(m \in \mathbf{Z})$ *sont les coefficients de la série de Laurent de* $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$.

Démonstration. D'après la Remarque 1) précédente, $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ vérifie l'identité de la résolvante, donc

$$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{U} - \{0\}, \quad \mathrm{Rg}(A, \lambda) - \mathrm{Rg}(A, \mu) = (\lambda - \mu)\mathrm{Rg}(A, \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda)$$

ce qui entraîne

$$(1) \qquad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j \frac{\lambda^j - \mu^j}{\lambda - \mu} = \sum_{k,m=-\infty}^{+\infty} A_k A_m \lambda^k \mu^m.$$

On remarque que si $j \geqslant 1$ $\dfrac{\lambda^j - \mu^j}{\lambda - \mu} = \lambda^{j-1} + \lambda^{j-2}\mu + \ldots + \lambda\mu^{j-2} + \mu^{j-1}$. Les coefficients de A_{-j} pour $j > 0$ sont:

$$\frac{\lambda^{-j} - \mu^{-j}}{\lambda - \mu} = -\frac{1}{(\lambda\mu)^j} \frac{\lambda^j - \mu^j}{\lambda - \mu} =$$

$$= -\{\lambda^{-1}\mu^{-j} + \lambda^{-2}\mu^{-j+1} + \ldots + \lambda^{-j+1}\mu^{-2} + \lambda^{-j}\mu^{-1}\}.$$

Donc les coefficients A_j dans le membre de gauche de (1) sont:

Pour A_j, $j \geqslant 1$, $\{\lambda^{j-1} + \lambda^{j-2}\mu \ldots + \lambda\mu^{j-2} + \mu^{j-1}\}$

Pour A_{-j}, $j > 0$, $-\{\lambda^{-1}\mu^{-j} + \lambda^{-2}\mu^{-j+1} + \ldots + \lambda^{-j+1}\mu^{-2} + \lambda^{-j}\mu^{-1}\}$.

Par identification des coefficients on trouve que le terme de $\lambda^{-1}\mu^{-1}$ a pour coefficient $-A_{-1}$ à gauche et $A_{-1}A_{-1}$ dans le membre de droite de (1) d'où $-A_{-1} = (A_{-1})^2$ donc 1) du Lemme est démontré.

On remarque dans le membre de gauche de (1), l'absence de terme $\lambda^{-1}\mu^m$ pour $m \geqslant 0$ et $\lambda^m\mu^{-1}$ avec $m \geqslant 0$; les même termes ont pour coefficients dans le membre de droite respectivement $A_{-1}A_m$ et A_mA_{-1} d'où

$$\forall m \geqslant 0, \quad A_{-1}A_m = A_mA_{-1} = 0 \qquad \text{donc 2).}$$

De même on trouve:

$$\forall m < 0, \quad -A_m = A_{-1}A_m = A_mA_{-1}$$

donc

$$\forall m < 0, \quad A_m(I + A_{-1}) = (I + A_{-1})A_m = 0 \qquad \text{donc 3).}$$

LEMME 4.7. *Sous l'hypothèse* (I) *du Théorème* 4.4 *on a:*

$$\forall j > 0, \quad A_{-j-1} = AA_{-j} = A_{-j}A$$

d'ou

$$A_{-j-1} = A^j A_{-1} = A_{-1}A^j.$$

Démonstration:

$$P_\lambda = (A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda) =$$

$$= (A - \lambda I) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda^j A_j = A \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda^j A_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda^{j+1} A_j.$$

Or

$$\sum_{j=-\infty}^{-\infty} \lambda^j A_{j-1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda^{j+1} A_j$$

donc

$P_\lambda = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda^j (AA_j - A_{j-1})$ et comme P_λ est analytique dans $\mathcal{U}$ on en déduit

$$AA_j - A_{j-1} = 0 \quad \text{pour } -\infty \leqslant j < 0.$$

Le même raisonnement sur Q_λ montre que:

$$A_j A - A_{j-1} = 0 \quad \text{pour } -\infty \leqslant j < 0.$$

D'où la preuve du Lemme.

REMARQUE. Ce dernier Lemma $\Rightarrow \forall j > 0$, A commute avec A_{-j} et en particulier $AA_{-1} = A_{-1}A$.

Démonstration du Théorème 4.4. (I) $\Rightarrow$ (II). Posons $N = \mathrm{R}(-A_{-1})$ et $M = \mathrm{R}(I + A_{-1})$ et montrons que (M, N) ainsi définie est une D.K.G. associée à A.

Le Lemme 4.6 $\Rightarrow -A_{-1}$ est un projecteur, donc M et N sont fermés d'une part, et d'autre part $H = M \oplus N$. A_{-1} est à valeurs dans $\mathrm{D}(A)$ donc $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{D}(A)$. La remarque précédente implique que M, N sont invariants par A (car A_{-1} commute avec A).

Pour établir que $A \mid N$ est quasinilpotent, remarquons d'abord que AA_{-1} est borné (car $\mathrm{R}(A_{-1}) \subseteq \mathrm{D}(A)$) et que le Lemme 4.7 implique:

$$\forall n \geqslant 0, \quad (-AA_{-1})^n = A^n(-A_{-1})^n = A^n(-A_{-1}) = -A^n A_{-1} = A_{-n-1}.$$

Par ailleurs, $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ analytique dans $\mathcal{U} - \{0\}$ implique $\forall \lambda \in \mathcal{U} - \{0\}$ $\sum_{j\geqslant 0} \lambda^{-j} A_{-j-1}$ est convergente donc $\forall \lambda \in \mathcal{U} - \{0\}$ $\exists N_0 \in \mathrm{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_0$ on a $\|A_{-n-1}\| \leqslant |\lambda|^n$.

Donc $\|A_{-n-1}\|^{1/n} \to 0$ quand $n \to +\infty$ ce qui implique $\|(-AA_{-1})^n\|^{1/n} \to 0$ quand $n \to +\infty$; d'où $-AA_{-1}$ est quasinilpotent et donc $A|N$ est quasinilpotent.

Pour montrer que $A|M$ est régulier, il suffit de remarquer d'une part que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)(I + A_{-1}) = \sum_{j\geqslant 0} \lambda^j A_j$ est analytique dans $\mathcal{U}$ et d'autre part que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)\cdot$ $\cdot(I + A_{-1})$ est un résolvant généralisé de $A|M$ dans $\mathcal{U}$ donc $0 \in \mathrm{reg}(A|M)$ ou encore $A|M$ est régulier. D'où (M, N) est une D.K.G. associée à A et donc $A \in \mathrm{P}\Phi$.

(II) $\Rightarrow$ (I). Se déduit de la Proposition 4.1 et la Proposition 4.3.

COROLLAIRE 4.8. *Soit A un opérateur fermé et $\lambda_0 \in \mathbf{C}$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes*

(a) $A - \lambda_0 I \in \mathrm{P}\Phi$.

(b) *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de λ_0 dans $\mathbf{C}$ tel que A admette un opérateur résolvant généralisé dans $\mathcal{U} - \{\lambda_0\}$ vérifiant:*

b$_1$) $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ *est analytique dans $\mathcal{U} - \{\lambda_0\}$ et admet λ_0 comme singularité.*

b$_2$) *Les projections P_λ et Q_λ correspondantes sont analytiques dans $\mathcal{U}$.*

(c) *Il existe trois constantes α, β, γ et deux sous-espaces fermés de H tels que les conditions suivantes soient satisfaits pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $0 < |\lambda - \lambda_0| < \gamma$.*

c$_1$) $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ *est fermé,*

c$_2$) $g(\mathrm{N}(A - \lambda I), H_1) < \alpha|\lambda - \lambda_0|$,

c$_3$) $g(\mathrm{R}(A - \lambda I), H_2) < \beta|\lambda - \lambda_0|$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (c) Se déduit de la Proposition 4.1 en prenant

$$H_1 = \mathrm{K}(A - \lambda_0 I) \cap \mathrm{N}(A - \lambda_0) \quad \text{et} \quad H_2 = \mathrm{R}(A - \lambda_0 I) + \mathrm{H}_0(A - \lambda_0 I).$$

(c) $\Rightarrow$ (b) Se déduit de la Proposition 4.3.

(b) $\Rightarrow$ (a) Se déduit du Théorème 4.4.

ETUDE D'UN EXEMPLE

L'exemple que nous donnons montre que la condition "P_λ et Q_λ analytiques dans $\mathcal{U}$" voir Corollaire 4.8 b$_2$) est nécéssaire (voir Conjecture [9, page 235]).

Soit l'opérateur, shift bilatéral, T défini par:

$$Te_n = e_{n+1} \text{ pour } n \leqslant 0 \quad \text{et} \quad Te_n = 2^{-n} e_{n+1} \text{ pour } n > 0$$

où $\{e_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ la base canonique de ℓ^2.

Alors $\sigma(T) = \mathbf{D} =$ le disque unité fermé.

D'autre part $\forall\, \lambda \in \mathbf{D}/\partial\mathbf{D} \cup \{0\} = \Omega$ on a $N(T-\lambda I) = \{0\}$ et $\mathrm{ind}(T-\lambda I) = -1$, par conséquent $\forall \lambda \in \Omega$, $T - \lambda I$ est régulier, donc il existe un résolvant généralisé $\mathrm{Rg}(T, \lambda)$ analytique dans Ω, ce qui implique que zéro est une singularité isolée de $\mathrm{Rg}(T, \lambda)$.

Montrons que $T \notin \mathrm{P}\Phi$. En effet, supposons qu'il existe M, N sous-espaces invariants par T, tels que $\ell^2 = M \oplus N$. Soit E la projection sur M telle que $\mathrm{R}(E) = M$ et $\mathrm{N}(E) = N$, alors E commute avec T. Par ailleurs (cf. [15]), le commutateur de T, $\mathscr{A}'(T)$ est isomorphe à $H^\infty(\mathbf{D})$ où $H^\infty(\mathbf{D})$ est l'algèbre des fonctions analytiques bornées dans $\mathbf{D}$ (espace de Hardy).

$E \in \mathscr{A}'(T) \Rightarrow \exists\, \varphi \in H^\infty(\mathbf{D})$, image de E.

$E^2 = E \Rightarrow \varphi^2 = \varphi$; ce qui implique que $\varphi = 1$ ou $\varphi = 0$ et par conséquent $M = \ell^2$ ou $M = \{0\}$, d'où T est régulier ou T est quasinilpotent, ce qui est évidemment faux dans les deux cas et donc $T \notin \mathrm{P}\Phi$.

RÉFÉRENCES

1. Apostol, C.; Clancey, K., Generalized inverses and spectral theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215**(1976), 293–300.
2. Apostol, C.; Clancey K., On generalized resolvants, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **215**(1976), 163–168.
3. Atkinson, F. V., On relatively regular operators, *Acta. Sci. Math. (Szeged)*, **15** (1953), 38–56.
4. Bart, H.; Lay, D. C., Poles of a generalized resolvent operator, *Poc. Roy. Irish. Acad. Sect. A*, **74**(1974), 147–168.
5. Bart, H.; Kaballo, W., Local invertibility of meromorphic operator functions, *Poc. Roy. Irish. Acad. Sect. A*, **78**(1978), 37–50.
6. Dunford, N.; Schwartz, J., *Linear operators. III*, Wiley Interscience, New York, 1971.
7. Kato, T., Perturbation theory for nullity, deficiency, and other quantities of linear operators, *J. Analyse Math.*, 6(1958), 261–322.
8. Kato, T., *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, Berlin, 1966.
9. Labrouse, J. P., Les opérateurs quasi-Fredholm: une généralisation des opérateurs semi-Fredholm, *Rend. Circ. Math. Palermo (2)*, **XXIX**(1980), 161–258.
10. Mbekhta, M., Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux, Thèse de 3^{ème} cycle, Université de Nice, 1984.
11. Mbekhta, M., Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux, *Glasgow Math. J.*, **29**(1987), 159–175.
12. Mbekhta, M., Décomposition de Kato généralisée, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **303** (1986), 979–982.
13. Mbekhta, M., Sur la théorie spectrale généralisée, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **306**(1988), 593–596.

14. Mbekhta, M., Résolvant généralisé et théorie spectrale, *J. Operator Theory*, **21**(1989), 69–105.
15. Shields, A. L., Weighted shift operators and analytic function theory, *Math. Surveys*, **13**(1973) 49–128.

MOSTAFA MBEKHTA
Département de Mathématiques,
U.A. 168 au C.N.R.S., Université de Nice,
Parc Valrose, F-06034 Nice Cedex,
France.

nouvelle adresse:

Université de Lille I,
U.F.R. de Mathematiques,
59655 Villeneuve d'Ascq,
France.

Received January 9, 1989; revised August 4, 1989.