J. OPERATOR THEORY
30(1993), 173–197



# INVARIACE PAR CONJUGAISON UNITAIRE POUR DES SEMI-NORMES DE TYPE $l^p$ SUR LES MATRICES

GILLES CASSIER et JEAN DAZORD

Nous considérons sur l'espace $L(H)$ des opérateurs sur un espace de Hilbert complexe $H$ de dimension finie $n \geqslant 2$, les semi-normes du type:

$$n_p(T) = \left( \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{i,j} |\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad T \in L(H),$$

où $(\varepsilon_j)$ est une base orthonormée de $\mathbf{C}^n$ et $(\rho_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une suite de réels positifs ou nuls.

Nous nous proposons de caractériser les opérateurs $X$ pour lesquels la semi-norme $n_p$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$. On a donc: $n_p(U^*XU) = n_p(X)$, pour tout opérateur unitaire $U$.

Nous aborderons en premier lieu le cas $p = 1$. En effet l'utilisation de la non différentiabilité des semi-normes du type $l^1$ permet alors d'obtenir les résultats à l'aide de preuves plus élémentaires.

L'étude qui suit a été suggérée par un travail dû à C. K. Fong, H. Radjavi et P. Rosenthal (cf. [1], p. 112). Ces auteurs ont notamment étudié les opérateurs $X$ pour lesquels la norme $l^\infty$ usuelle est constante sur l'orbite unitaire de $X$ et égale à la norme d'opérateur de $X$. L'objet de l'article [2] est de poursuivre l'étude de ce problème, d'une part en s'affranchissant de la condition d'égalité à la norme d'opérateur, d'autre part en considérant les semi-normes $n_\infty$. Nous nous proposons donc de traiter le problème similaire pour les semi-normes $n_p$. Ici encore, même pour l'étude de la norme $n_p$, nous n'imposons pas la condition d'égalité à une autre norme de matrices.

Précisons enfin que l'étude en dimension infinie du problème similaire à celui qui est abordé dans notre travail fera l'objet d'une publication du premier auteur.

PREMIERE PARTIE: ETUDE DES SEMI-NORMES DE TYPE $l^1$

Soit $H$ un espace de Hilbert complexe de dimension finie $n \geqslant 2$, soit $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de $H$, soit $L(H)$ l'algèbre des opérateurs sur $H$ et soit $n_1$ la semi-norme sur $L(H)$ définie par:

$$n_1(T) = \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{i,j}|\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle|, \quad T \in L(H).$$

Les scalaires $\rho_{i,j}$, appelés poids, sont supposés positifs ou nuls et l'ensemble $K = \{(i,j); \rho_{i,j} > 0\}$ est le support, supposé non vide, de la suite $(\rho_{i,j})$.

Nous nous proposons d'étudier les opérateurs $X$ sur $H$ tels que la semi-norme $n_1$ soit constante sur l'orbite unitaire de $X$. En particulier si $\rho_{i,j} = 1$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, le problème abordé est celui de l'invariance de la norme $l^1$ sur l'orbite unitaire d'une matrice, ce qui est une question formulée dans [1] (cf. p. 112).

Nous étudierons l'invariance de la semi-norme $n_1$, en premier lieu lorsque le support $K$ de la suite $(\rho_{i,j})$ est inclus dans la diagonale $\Delta = \{(i,i); 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de $\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,n\}$, puis, après l'énoncé (cf. théorème 3) d'une caractérisation élémentaire du centre "local" de l'algèbre $L(H)$, dans la cas où des éléments non diagonaux interviennent dans la définition de $n_1$.

## 1. Etude de la semi-norme $n_1$: cas $K \subset \Delta$.

La preuve du résultat dans le cas étudié repose sur les deux lemmes élémentaires qui suivent:

LEMME 1. *Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux suites complexes finies. Si pour toute permutation $\sigma$ de $\{1,2,\ldots,n\}$ on a $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, alors l'une des suites $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ou $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est constante.*

*Preuve.* Supposons la suite $(a_i)$ non constante. Considérons deux entiers distincts $j$ et $k$ dans $\{1,2,\ldots,n\}$. Ou bien on a $a_j \neq a_k$ et en considérant la transposition $\sigma$ de $\{1,2,\ldots,n\}$ définie par $\sigma(j) = k$; $\sigma(k) = j$; $\sigma(l) = l$, $l \neq j$, $l \neq k$, on obtient $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_j - a_k)(b_k - b_j) = 0$, soit $b_j = b_k$. Ou bien on a $a_j = a_k$ et en considérant $l \in \{1,2,\ldots,n\}$ tel que $a_l \neq a_k$ on montre de la même façon qu'on a $b_j = b_l$, puis $b_k = b_l$, d'où $b_j = b_k$. ∎

LEMME 2. *Soit $H$ un espace de Hilbert de dimension finie $n \geqslant 2$ et soit $X$ un opérateur sur $H$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *pour toute paire $\{\xi, \eta\}$ de vecteurs unitaires orthogonaux, on a*

$$\langle X\xi, \xi\rangle\overline{\langle X\eta, \eta\rangle} \geqslant 0;$$

(ii) *l'opérateur $X$ est un multiple scalaire d'un opérateur auto-adjoint positif.*

*Preuve.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Soit $(\eta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de $H$ suivant laquelle la matrice de $X$ est triangulaire supérieure. Compte tenu de l'hypothèse on peut supposer qu'on a $\langle X\eta_i, \eta_i\rangle \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Il s'agit d'établir les égalités $\langle X\eta_j, \eta_i\rangle = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Etant donnés deux entiers $i$ et $j$ vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$, posons $\xi = \eta_i$ et $\eta = \eta_j$. On a $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$, $\langle X\xi, \xi\rangle \geqslant 0$, $\langle X\eta, \eta\rangle \geqslant 0$ et $\langle X\xi, \eta\rangle = 0$. Montrons qu'on a $\langle X\eta, \xi\rangle = 0$. Or les vecteurs $\xi+\eta$ et $\xi-\eta$ sont orthogonaux, de même que les vecteurs $\xi + \mathrm{i}\eta$ et $\mathrm{i}\xi + \eta$. Ainsi on a $\langle X(\xi + \eta), \xi + \eta\rangle\overline{\langle X(\xi - \eta), \xi - \eta\rangle} \geqslant 0$ et $\langle X(\xi + \mathrm{i}\eta), \xi + \mathrm{i}\eta\rangle\overline{\langle X(\mathrm{i}\xi + \eta), \mathrm{i}\xi + \eta\rangle} \geqslant 0$. Posons $a = \langle X\xi, \xi\rangle + \langle X\eta, \eta\rangle$ et $b = \langle X\eta, \xi\rangle$. On obtient $a^2 - b\bar{b} + a(b - \bar{b}) \geqslant 0$, d'où $a(b - \bar{b}) = 0$ et $a^2 - b\bar{b} + \mathrm{i}a(b + \bar{b}) \geqslant 0$, soit $a(b + \bar{b}) = 0$. On en déduit $ab = 0$. Alors si $b$ n'est pas nul, on a $a = 0$, donc: $-b\bar{b} \geqslant 0$, ce qui est absurde.

(ii) $\Rightarrow$ (i): C'est immédiat. ■

Dans l'énoncé qui suit, nous excluons le cas trivial où l'opérateur $X$ est scalaire, i.e. un multiple scalaire de l'opérateur identique. D'autre part nous notons $q_1$ la semi-norme sur $L(H)$ définie par:

$$q_1(T) = \sum_{i=1}^{n} |\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_i\rangle|, \quad T \in L(H).$$

Enfin l'orbite unitaire d'un opérateur $T$ est l'ensemble $\{U^*TU; U \in \mathbf{U}\}$, où $\mathbf{U}$ désigne le groupe des opérateurs unitaires sur $H$.

THÉORÈME 1. *Soit $H$ un espace de Hilbert complexe de dimension finie $n \geqslant 2$, soit $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de $H$ et soit $X$ un opérateur non scalaire sur $H$. Soit $n_1$ la semi-norme sur $L(H)$ définie par:*

$$n_1(T) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{i,i} |\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_i\rangle|, \quad T \in L(H).$$

*Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *la semi-norme $n_1$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$;*

(ii) *les semi-normes $n_1$ et $q_1$ sont proportionnelles et l'opérateur $X$ est un multiple scalaire d'un opérateur auto-adjoint positif.*

*Preuve.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Par hypothèse, pour toute base orthonormée $(\zeta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et pour tout opérateur unitaire $U$ sur $H$, on a $\sum_{i=1}^{n}\rho_{i,j}|\langle XU\zeta_i, U\zeta_i\rangle| = n_1(X)$. Choisissant alors comme opérateurs unitaires $U$ les opérateurs de permutation de la base orthonormée $(\zeta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ on déduit du lemme 1 que, si la suite $(\rho_{i,j})$ n'est pas constante, alors la suite $(|\langle X\zeta_i,\zeta_i\rangle|)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est constante pour toute base orthonormée $(\zeta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Considérons un vecteur unitaire $\zeta\in H$ et soit $(\zeta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de $H$ vérifiant $\zeta_1=\zeta$. On a $\sum_{i=1}^{n}\rho_{i,i}|\langle X\zeta_i,\zeta_i\rangle| = \left(\sum_{i=1}^{n}\rho_{i,i}\right)|\langle X\zeta,\zeta\rangle| = n_1(X)$. Ainsi l'image numérique de $X$, c'est-à-dire l'ensemble $W(X)=\{\langle X\zeta,\zeta\rangle,\ \zeta\in H,\ \|\zeta\|=1\}$, est circulaire, donc réduite à un point; il en résulte que l'opérateur $X$ est scalaire, ce qui contredit l'hypothèse. La suite $(\rho_{i,i})$ est donc constante et la semi-norme $n_1$ est proportionnelle à $q_1$. D'autre part, on sait ([3]; [4], Corollary 2, p. 168) qu'il existe une base orthonormée $(\eta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que la matrice de $X$ suivant cette base ait une diagonale constante, i.e. on a $\langle X\eta_i,\eta_i\rangle = \dfrac{\mathrm{tr}X}{n}$, $1\leqslant i\leqslant n$. Ainsi, on obtient $q_1(X)=|\mathrm{tr}(X)|$, soit $\left|\sum_{i=1}^{n}\langle X\zeta_i,\zeta_i\rangle\right| = \sum_{i=1}^{n}|\langle X\zeta_i,\zeta_i\rangle|$, d'où les inégalités $\langle X\zeta_i,\zeta_i\rangle\overline{\langle X\zeta_j,\zeta_j\rangle}\geqslant 0$, $1\leqslant i,j\leqslant n$. Le résultat provient alors du lemme 2. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte immédiatement du lemme 2. ■

Notons en particulier que si le support $K$ de la suite $(\rho_{i,j})$ est strictement contenu dans la diagonale $\Delta$, par exemple lorsqu'on a $K=\{1,2,\ldots,k\}$, $1\leqslant k<n$, alors, si la norme $n_1$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$, l'opérateur $X$ est un opérateur scalaire.

## 2. Etude de la semi-norme $n_1$: cas $K\setminus\Delta\neq\emptyset$

Dans tout ce paragraphe, nous considérons exclusivement les semi-normes $n_1$ sur $L(H)$ définies par l'expression

$$n_1(T)=\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{i,j}|\langle T\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle|,\qquad T\in L(H)$$

pour lesquelles le support $K$ de la suite $(\rho_{i,j})$ vérifie $K\setminus\Delta\neq\emptyset$.

THÉORÈME 2. *Soit $H$ un espace de Hilbert de dimension finie $n\geqslant 2$ et soit $X$ un opérateur sur $H$ tel que la semi-norme $n_1$ soit constante sur l'orbite unitaire de $X$. Si $\xi$ et $\eta$ sont deux vecteurs orthogonaux vérifiant $\langle X\xi,\eta\rangle=0$, alors pour tout opérateur $T$ sur $H$ on a $\langle (XT-TX)\xi,\eta\rangle=0$.*

*Preuve.* Supposons les vecteurs $\xi$ et $\eta$ unitaires. Soit $(i,j)\in K\setminus\Delta$; on peut supposer $i<j$; en fait, nous supposerons qu'on a $(1,2)\in K$. Soit $(\eta_i)$ une base

orthonormée de $H$ vérifiant $\eta_1 = \xi$ et $\eta_2 = \eta$, soit $A$ un opérateur auto-adjoint sur $H$ et soit $(U(t))_{t\in\mathbf{R}}$ le groupe unitaire sur $H$ de générateur i$A$, i.e. $U(t) = \exp(\mathrm{i}tA)$, $t \in \mathbf{R}$. Posons $f_{i,j}(t) = |\langle XU(t)\eta_i, U(t)\eta_j\rangle|$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $t \in \mathbf{R}$, $g(t) = \sum_{(i,j)\in K} \{\rho_{i,j} f_{ij}(t); f_{ij}(0) \neq 0\}$ et $h(t) = \sum_{(i,j)\in K} \{\rho_{i,j} f_{ij}(t); f_{ij}(0) = 0\}$. Comme la semi-norme $n_1$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$, la fonction $\varphi = g + h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est elle-même constante. Or il est immédiat que la fonction $g$ est dérivable à l'origine et que la fonction $h$ admet à l'origine une dérivée à droite $h'_{\mathrm{d}}(0)$ et une dérivée à gauche $h'_{\mathrm{g}}(0)$. Nécessairement on a $h'_{\mathrm{d}}(0) - h'_{\mathrm{g}}(0) = 0$. Par un calcul élémentaire, on trouve $h'_{\mathrm{d}}(0) - h'_{\mathrm{g}}(0) = 2\sum\{\rho_{i,j}|\langle (XA - AX)\eta_i, \eta_j\rangle|; (i,j) \in K,\ \langle X\eta_i, \eta_j\rangle = 0\}$. En particulier on obtient $\langle (XA - AX)\eta_1, \eta_2\rangle = \langle (XA - AX)\xi, \eta\rangle = 0$, cette relation étant vérifiée pour tout opérateur auto-adjoint $A$ sur $H$. Si maintenant $T$ est un opérateur quelconque sur $H$, la décomposition de $T$ en partie réelle et partie imaginaire permet d'établir l'égalité: $\langle (XT - TX)\xi, \eta\rangle = 0$. □

L'objet du théorème qui suit est de constater que le centre "local" de l'algèbre $L(H)$ est "localement" trivial.

THÉORÈME 3. *Soit $H$ un espace de Hilbert complexe, soit $X$ un opérateur sur $H$ et soient $\xi$ et $\eta$ deux vecteurs unitaires orthogonaux. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *pour tout opérateur $T$ sur $H$, on a $\langle (XT - TX)\xi, \eta\rangle = 0$;*

(ii) *il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{C}$ tel qu'on ait $X\xi = \lambda\xi$ et $X^*\eta = \overline{\lambda}\eta$.*

*Preuve.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Soit $T$ l'opérateur auto-adjoint défini par: $T\xi = \eta$, $T\eta = \xi$ et $T\zeta = 0$ pour tout vecteur $\zeta$ orthogonal à $\xi$ et $\eta$. On a alors $\langle (XT - TX)\xi, \eta\rangle = \langle X\eta, \eta\rangle - \langle X\xi, \xi\rangle = 0$. Ainsi $\langle X\xi, \xi\rangle = \langle X\eta, \eta\rangle = \lambda$.

Désignons maintenant par $T$ la projection orthogonale sur $\mathbf{C}\xi$. On a $\langle (XT - TX)\xi, \eta\rangle = \langle X\xi, \eta\rangle = 0$ et $\langle X^*\eta, \xi\rangle = \langle \eta, X\xi\rangle = 0$.

Supposons que $H$ est de dimension 2. On voit que $\xi$ est vecteur propre de $X$ et $\eta$ de $X^*$. De plus on a $\mu = \langle X^*\eta, \eta\rangle = \langle \eta, X\eta\rangle = \overline{\lambda}$, ce qui achève la preuve dans ce cas.

Supposons maintenant que $H$ est de dimension finie $n \geqslant 3$ ou de dimension infinie et soit $\zeta$ un vecteur unitaire orthogonal à $\xi$ et $\eta$. Soit $T$ un opérateur auto-adjoint sur $H$ tel que $T\eta = \zeta$ et $T\theta = 0$ si $\theta$ est orthogonal à $\eta$ et $\zeta$. On a alors $\langle (XT - TX)\xi, \eta\rangle = \langle X(T\xi), \eta\rangle - \langle X\xi, T\eta\rangle = -\langle X\xi, \zeta\rangle = 0$. Ainsi $\xi$ est vecteur propre de $X$ associé à la valeur propre $\lambda = \langle X\xi, \xi\rangle$.

Avec les mêmes notations, considérons un opérateur auto-adjoint $T'$ sur $H$ tel que $T'\xi = \zeta$ et $T'\theta = 0$ si $\theta$ est orthogonal à $\xi$ et $\zeta$. On a donc $\langle (XT' - T'X)\xi, \eta\rangle = \langle X(T'\xi), \eta\rangle - \langle X\xi, T'\eta\rangle = \langle X\zeta, \eta\rangle = \langle \zeta, X^*\eta\rangle = 0$. Il en résulte que $\eta$ est un vecteur propre de $X^*$ associé à la valeur propre $\mu = \langle X^*\eta, \eta\rangle = \langle \eta, X\eta\rangle = \overline{\lambda}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): On a pour tout opérateur $T$ sur $H$: $\langle (XT - TX)\xi, \eta\rangle = \langle T\xi, X^*\eta\rangle - \langle T(X\xi), \eta\rangle = \lambda\langle T\xi, \eta\rangle - \lambda\langle T\xi, \eta\rangle = 0$. ■

Il est à noter que dans le théorème précédent l'espace de Hilbert $H$ n'est pas supposé de dimension finie.

REMARQUE. En particulier, lorsque $H$ est de dimension 2, on obtient la propriété élémentaire suivante, énoncée avec les mêmes notations que ci-dessus: les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) pour tout opérateur $T$ sur $H$, on a $\langle (XT - TX)\xi, \eta\rangle = 0$;

(ii) $X$ possède une seule valeur propre et $\xi$ est vecteur propre de $X$.

Enonçons un résultat partiel:

THÉORÈME 4. *Si la semi-norme $n_1$ est constante sur l'orbite unitaire de l'opérateur $X$, alors $X$ possède une seule valeur propre.*

*Preuve.* Soit $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de $H$ telle que la matrice de $X$ dans cette base soit triangulaire supérieure, i.e. on a $\langle X\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Il résulte alors du théorème 2 qu'on a $\langle (XT - TX)\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, pour tout opérateur $T$ sur $H$, puis du théorème 3 qu'on a $\langle X\varepsilon_i, \varepsilon_i\rangle = \langle X\varepsilon_j, \varepsilon_j\rangle$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. ■

Lorsque le support $K$ de la suite $(\rho_{i,j})$ vérifie $K \setminus \Delta \neq \emptyset$ et lorsque $H$ est de dimension au moins 3, la solution du problème indiqué dans l'introduction est donnée par le résultat suivant:

THÉORÈME 5. *Si l'espace $H$ est de dimension finie $n \geqslant 3$ et si la semi-norme $n_1$ est constante sur l'orbite unitaire de l'opérateur $X$, alors $X$ est un opérateur scalaire.*

*Preuve.* Soit $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de $H$ suivant laquelle la matrice de $X$ est triangulaire supérieure. On a $\langle X\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, donc, en utilisant le théorème 2, on a $\langle (XT - TX)\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, pour tout opérateur $T$ sur $H$. En raison du théorème 3, pour toute paire d'entiers $\{i, j\}$ vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$, il existe un scalaire $\lambda_{ij} \in \mathbf{C}$ vérifiant $X\varepsilon_j = \lambda_{ij}\varepsilon_i$ et $X^*\varepsilon_j = \overline{\lambda}_{ij}\varepsilon_j$. Par le théorème 4, nous savons que $X$ possède une seule valeur propre $a$ et on a $\lambda_{ij} = a$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Ainsi on a $X\varepsilon_i = a\varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $X^*\varepsilon_j = \overline{a}\varepsilon_j$, $2 \leqslant j \leqslant n$. Posons $b = \langle X\varepsilon_n, \varepsilon_1\rangle$. L'opérateur $X$ est donné par $X\varepsilon_i = a\varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, et $X\varepsilon_n = b\varepsilon_1 + a\varepsilon_n$. Considérons l'opérateur $U$ de permutation de la base $(\varepsilon_i)$ échangeant les vecteurs $\varepsilon_2$ et $\varepsilon_n$. Suivant la base $(U\varepsilon_i)$, notée $(\eta_i)$, l'opérateur $X$ est donnée par $X\eta_i = a\eta_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq 2$; $X\eta_2 = b\eta_1 + a\eta_2$. Il suffit alors d'utiliser à nouveau les théorèmes 2 et 3 pour établir l'égalité $b = 0$, ce qui achève la preuve. ■

Il reste à examiner le cas où l'espace $H$ est de dimension 2. Nous commencerons par un cas particulier: notons $r_1$ la semi-norme sur $L(H)$ définie par $r_1(T) = |\langle T\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle| + |\langle T\varepsilon_2, \varepsilon_1|$, $T \in L(H)$.

THÉORÈME 6. *Supposons l'espace $H$ de dimension 2. Etant donné un opérateur $X$ sur $H$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *la semi-norme $r_1$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$;*

(ii) *l'opérateur $X$ possède une seule valeur propre.*

*Preuvre.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Cela résulte du théorème 4.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Soit $a$ la valeur propre de $X$. On a donc $X = aI + bN$, où $I$ est l'opérateur identique, $N$ est un opérateur nilpotent de norme 1 et $a$ et $b$ sont des scalaires. Or on a $r_1(X) = r_1(aI + bN) = |b|r_1(N)$ et pour tout opérateur unitaire $U$, on a $r_1(U^*XU) = r_1(aI + bU^*NU) = |b|r_1(U^*NU)$. Si on a $b = 0$, $X$ est un opérateur scalaire; sinon il suffit d'établir que la semi-norme $r_1$ est constante sur l'orbite unitaire de l'opérateur nilpotent $N$. Soit $\{\eta_1, \eta_2\}$ une base orthonormée de $H$ telle que la matrice de $N$ dans cette base soit donnée par:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considérons les vecteurs unitaires et orthogonaux $\xi = (\alpha, \beta)$ et $\eta = \gamma(\overline{\beta}, -\overline{\alpha})$, avec $\gamma\overline{\gamma} = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1$. On a $|\langle N\xi, \eta\rangle| + |\langle N\eta, \xi\rangle| = \beta\overline{\beta} + \alpha\overline{\alpha} = 1$, ce qui établit le résultat. ■

L'étude du cas général en dimension 2 fait l'objet du théorème suivant:

THÉORÈME 7. *Supposons l'espace $H$ de dimension 2 et soit $X$ un opérateur non scalaire sur $H$. Soient $n_1$ la semi-norme sur $L(H)$ donnée par:*

$$n_1(T) = \sum_{i,j=1}^{2} \rho_{i,j} |\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle|, \quad T \in L(H).$$

*Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *la semi-norme $n_1$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$;*

(ii) *la semi-norme $n_1$ est proportionnelle à $r_1$ et l'opérateur $X$ possède une seule valeur propre.*

*Preuve.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Il résulte du théorème 4 que $X$ possède une seule valeur propre. Soit $\{\eta_1, \eta_2\}$ une base orthonormée trigonalisant $X$, i.e. on a $\langle X\eta_1, \eta_1\rangle = \langle X\eta_2, \eta_2\rangle = a$, $\langle X\eta_1, \eta_2\rangle = 0$; posons $b = \langle X\eta_2, \eta_1\rangle$. Définissons les opérateurs unitaires $U$ et $V$ par $U\varepsilon_1 = \eta_1$, $U\varepsilon_2 = \eta_2$; $V\varepsilon_1 = \eta_2$, $V\varepsilon_2 = \eta_1$. On a:

$$n_1(X) = n_1(U^*XU) = \sum_{i,j=1}^{2} \rho_{i,j} |\langle X\eta_i, \eta_j\rangle| = (\rho_{1,1} + \rho_{2,2})|a| + \rho_{2,1}|b| =$$

$$= n_1(V^*TV) = \sum_{i,j=1}^{2} \rho_{i,j}|\langle X\eta_j, \eta_i\rangle| = (\rho_{1,1} + \rho_{2,2})|a| + \rho_{1,2}|b|.$$

Comme $X$ n'est pas un opérateur scalaire, le scalaire $b$ n'est pas nul et on a $\rho_{1,2} = =\rho_{2,1}$. La semi-norme $n_1$ est donc donnée par $n_1(T) = \rho_{1,1}|\langle T\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle| + \rho_{2,2}|\langle T\varepsilon_2, \varepsilon_2\rangle| + +\rho_{1,2}r_1(T)$, $T \in L(H)$.

Or, par hypothèse, la semi-norme $n_1$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$ et, puisque $X$ possède une seule valeur propre, la semi-norme $r_1$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$ en vertu du théorème 6. Ainsi la semi-norme $p_1$ définie sur $L(H)$ par $p_1(T) = \rho_{1,1}|\langle T\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle| + \rho_{2,2}|\langle T\varepsilon_2, \varepsilon_2\rangle|$, $T \in L(H)$ est elle-même constante sur l'orbite unitaire de $X$. Il résulte alors du théorème 1 l'égalité $\rho_{1,1} = \rho_{2,2}$; de plus, si le scalaire $\rho_{1,1}$ n'était pas nul, $X$ serait un multiple scalaire d'un opérateur auto-adjoint positif, donc un opérateur scalaire puisque $X$ possède une seule valeur propre. Ainsi on a $\rho_{1,1} = \rho_{2,2} = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Cette implication provient du théorème 6. ∎

DEUXIEME PARTIE: ETUDE DES SEMI-NORMES DE TYPE $l^p$ $(1 < p < \infty)$.

On considère dans cette partie l'espace $L(H)$ des opérateurs sur un espace de Hilbert complexe $H$ de dimension finie $n \geqslant 2$ muni de semi-normes du type:

$$n_p(T) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \rho_{i,j}|\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

où $(\varepsilon_k)$ est une base orthonormée de $H$ et $(\rho_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une suite de scalaires positifs ou nuls. Dans le cas $p = 2$ nous supposerons de plus qu'on a $\rho_{i,j} = 0$ ou $1$ bien que certains résultats restent valables sous l'hypothèse $\rho_{i,j} \geqslant 0$. On note $\rho$ la fonctionnelle définie par $\rho(T) = n_p(T)^p$.

On se propose de caractériser les opérateurs $X$, pour lesquels la semi-norme $n_p$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$. On a donc

$$(*) \qquad n_p(U^*XU) = n_p(X), \text{ pour tout opérateur unitaire } U.$$

On obtient les résultats suivants.

THÉORÈME 1. *Soit $p$ un réel strictement supérieur à un et différent de deux. Si la semi-norme $n_p$ est constante sur l'orbite unitaire d'un opérateur $X$, alors $X$ est nécessairement un opérateur scalaire.*

THÉORÈME 2. *Si $p$ est égal à deux et si la semi-norme $n_2$ est constante sur l'orbite unitaire d'un opérateur $X$, on a les possibilités suivantes:*

(i) $n_2$ *est la norme de Hilbert-Schmidt et* $X$ *est quelconque;*

(ii) $n_2$ *est de la forme* $n_2(T) = \sum_{k=1}^{m} \|T\varepsilon_k\|^2$ *ou de la forme* $n_2(T) = \sum_{k=1}^{m} \|T^*\varepsilon_k\|^2$, *et* $X$ *est le multiple d'un opérateur unitaire;*

(iii) *la semi-norme* $n_2$ *est définie par*

$$n_2(T) = \left( \sum_{i,j \in \{1,\dots,k\}} |\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle|^2 + \sum_{l=1}^{k} \left( \sum_{j \in I_l} |\langle T\varepsilon_l, \varepsilon_j\rangle|^2 + \sum_{i \in I_l^c} |\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_l\rangle|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

*où* $I_l$ *désigne une partie de* $\{k+1, \dots, n\}$ *et* $I_l^c$ *son complémentaire dans* $\{k+1, \dots, n\}$ $(k \in \{1, \dots, n-1\})$. *On suppose que l'une des parties* $I_l$ *est non vide et est distincte de* $\{k+1, \dots, n\}$. *Alors* $X$ *est le multiple d'un opérateur unitaire ayant au plus deux valeurs propres.*

(iv) *La semi-norme* $n_2$ *ne correspond pas à l'un des cas précédents et* $X$ *est nécessairement un opérateur scalaire.*

*Preuve du théorème 1.* On définit les semi-normes suivantes:

$$n'(T) = \left( \sum_{k=1}^{n} |\langle T\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad n''(T) = \left( \sum_{i,j} |\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

LEMME 1. *Si* $X$ *est un opérateur qui vérifie* $(*)$, *alors on a*

$$n_p(X) = \left[ \left( \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^{n} \rho_{i,i} \right] - \frac{1}{n(n-1)} \left[ \sum_{i \neq j} \rho_{i,j} \right] \right) n'(X)^p + \frac{1}{n(n-1)} \left[ \sum_{i \neq j} \rho_{i,j} \right] n''(X)^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

*Preuve du lemme 1.* Si $\sigma$ appartient à l'ensemble $\Sigma_n$ des permutations de $\{1, \dots, n\}$, on définit l'opérateur unitaire $U_\sigma$ par:

$$U_\sigma \varepsilon_i = \varepsilon_{\sigma(i)}.$$

Puisque $X$ vérifie la condition $(*)$, il vient

$$\rho(X) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \rho(U_\sigma^* X U_\sigma) = \frac{1}{n!} \sum_{i,j} \rho_{i,j} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} |\langle X\varepsilon_{\sigma(i)}, \varepsilon_{\sigma(j)}\rangle|^p =$$

$$= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^{n} \rho_{i,i} \right) \left( \sum_{k=1}^{n} |\langle X\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle|^p \right) + \frac{1}{n(n-1)} \left( \sum_{i \neq j} \rho_{i,j} \right) \left( \sum_{i \neq j} |\langle X\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle|^p \right).$$

Ce qui entraîne immédiatement le lemme 1. ∎

LEMME 2. *Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3. Alors tout opérateur sur $H$, pour lequel une semi-norme du type:*

$$[an'(T)^p + bn''(T)^p]^{\frac{1}{p}} \quad (\text{avec } a+b>0, \text{ et } a>0 \text{ si } p=2), \; T \in L(H),$$

*est constante sur l'orbite unitaire de $X$, est nécessairement un opérateur scalaire.*

*Preuve du lemme 2.* Traitons d'abord le cas $p \neq 2$. On pose

$$\varphi(T) = \sum_{k=1}^{n}(a+b)|\langle T\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle|^p + \sum_{i\neq j} b|\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle|^p.$$

Comme $\varphi$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$, on peut supposer que $\varepsilon_1$ est un vecteur propre de $X$, et que l'image de $\varepsilon_2$ par $X$ est un combinaison linéaire de $\varepsilon_1$ et de $\varepsilon_2$.

Pour deux réels $z$ et $\omega$, on introduit l'opérateur unitaire

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\varepsilon_1\otimes\varepsilon_1 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\varepsilon_1\otimes\varepsilon_2 + e^{i\omega}\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\varepsilon_2\otimes\varepsilon_1 - e^{i\omega}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\varepsilon_2\otimes\varepsilon_2 + \sum_{k=3}^{n}\varepsilon_k\otimes\varepsilon_k.$$

On note $x_{i,j} = \langle X\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle$, $q = \frac{p}{2}$, $u = x_{1,1}+x_{2,2}$, $v = x_{1,1}-x_{2,2}$ et $w = x_{2,1}$. L'égalité $\varphi(X) = \varphi(U^*XU)$ montre qu'il existe une constante $c$, indépendante de $z$ et de $\omega$, telle que

$$\begin{aligned}(1+z^2)^p c = {} & (a+b)[(1+z^2)^2|u|^2 + (1-z^2)^2|v|^2 + 4z^2|w|^2 + 2(1-z^4)\mathrm{Re}(\overline{u}v) + \\ & +4z(1+z^2)\mathrm{Re}(e^{i\omega}\overline{u}w) + 4z(1-z^2)\mathrm{Re}(e^{i\omega}\overline{v}w)]^q + (a+b)[(1+z^2)^2|u|^2 + \\ & (1-z^2)^2|v|^2 + 4z^2|w|^2 - 2(1-z^4)\mathrm{Re}(\overline{u}v) - 4z(1+z^2)\mathrm{Re}(e^{i\omega}\overline{u}w) + 4z(1- \\ & -z^2)\mathrm{Re}(e^{i\omega}\overline{v}w)]^q + b[4z^2|v|^2 + 4z^4|w|^2 + 8z^3\mathrm{Re}(e^{i\omega}\overline{v}w)]^q + b[4z^2|v|^2 + 4|w|^2 - \\ & -8z\mathrm{Re}(e^{i\omega}\overline{v}w)]^q + 2^q b(1+z^2)^q\sum_{k=3}^{n}\{[2|x_{k,1}|^2 + 2z^2|x_{k,2}|^2 + 4z\mathrm{Re}(e^{i\omega}\overline{x_{k,1}}x_{k,2})]^q + \\ & +[2z^2|x_{k,1}|^2 + 2|x_{k,2}|^2 - 4z\mathrm{Re}(e^{i\omega}\overline{x_{k,1}}x_{k,2})]^q\},\end{aligned}$$

où $\mathrm{Re}(\alpha)$ désigne la partie réelle du nombre complexe $\alpha$.

Supposons que $v$ et $w$ ne soient pas tous les deux nuls. Pour un nombre complexe $d \notin \mathbf{R}^-$, on note $d^q$ la puissance $q$ ième de $d$ correspondant à la détermination principale du logarithme. On remarque alors que les deux premières expressions du membre de droite se prolongent en la variable $z$ dans un voisinage du segment $[0, i[$, pour tout $\omega$ tel que $e^{i\omega}$ apartienne à un ouvert du tore. Les expressions suivantes se prolongent dans un voisinage du segment $[0, i[$, sauf pour un nombre finis de points $e^{i\omega}$ du tore. On peut donc choisir $\omega$ de sorte que le membre de droite se prolonge dans un voisinage du segment $[0, i[$. Le principe du prolongement analytique assure que l'égalité ci-dessus est encore valable dans ce voisinage. En faisant tendre $z$ vers i, on obtient

$$0=(a+b)[4|v|^2-4|w|^2+8\mathrm{iRe}(e^{\mathrm{i}\omega}\overline{v}w)]^q+b[-4|v|^2+4|w|^2-8\mathrm{iRe}(e^{\mathrm{i}\omega}\overline{v}w)]^q.$$

On en déduit que $v=w=0$, sauf dans le cas où $a=0$ et où $q$ est un entier impair.

Nous nous plaçons désormais dans le cas où $a=0$ et où $q$ est un entier impair, on peut supposer que $b=1$. Notons $\alpha_1,\alpha_2,\beta,\gamma_3,\ldots,\gamma_n$, les arguments respectifs de $u,v,w,\overline{x_{3,1}}x_{3,2},\ldots,\overline{x_{n,1}}x_{n,2}$. Il vient,

$$\begin{aligned}(**)\quad (1+z^2)^p c = {} & [(1+z^2)^2|u|^2+(1-z^2)^2|v|^2+4z^2|w|^2+2(1-z^4)\mathrm{Re}(\overline{u}v)+\\ &+4z(1+z^2)\cos(\omega-\alpha_1+\beta)|u|\,|w|+4z(1-z^2)\cos(\omega-\alpha_2+\beta)|v|\,|w|]^q+\\ &+[(1+z^2)^2|u|^2+(1-z^2)^2|v|^2+4z^2|w|^2-2(1-z^4)\mathrm{Re}(\overline{u}v)-4z(1+\\ &+z^2)\cos(\omega-\alpha_1+\beta)|u|\,|w|+4z(1-z^2)\cos(\omega-\alpha_2+\beta)|v|\,|w|]^q+\\ &+4^q[z^2|v|^2+z^4|w|^2+2z^3\cos(\omega-\alpha_2+\beta)|v|\,|w|]^q+4^q[z^2|v|^2+|w|^2-\\ &-2z\cos(\omega-\alpha_2+\beta)|v|\,|w|]^q+2^p(1+z^2)^q\sum_{k=3}^{n}\{[|x_{k,1}|^2+z^2|x_{k,2}|^2+\\ &+2z\cos(\omega+\gamma_k)|x_{k,1}|\,|x_{k,2}|]^q+\\ &+[z^2|x_{k,1}|^2+|x_{k,2}|^2-2z\cos(\omega+\gamma_k)|x_{k,1}|\,|x_{k,2}|]^q\}.\end{aligned}$$

La partie de l'expression de droite qui appartient au sous-espace engendré par les fonctions $\sin(q\omega)$ et $\cos(q\omega)$ doit être nulle. D'où

$$\begin{aligned}0={}&2^{2q+1}z^q(1-z^2)^q|v|^q|w|^q\left[\frac{1}{2^{(q-1)}}\cos^q(\alpha_2-\beta)\cos(q\omega)+\right.\\ &\left.+(-1)^{(q-1)}\frac{1}{2^{(q-1)}}\sin^q(\alpha_2-\beta)\sin(q\omega)\right]+8^qz^{3q}|v|^q|w|^q\left[\frac{1}{2^{(q-1)}}\cos^q(\alpha_2-\beta)\cos(q\omega)+\right.\\ &\left.+(-1)^{(q-1)}\frac{1}{2^{(q-1)}}\sin^q(\alpha_2-\beta)\sin(q\omega)\right]-8^qz^q|v|^q|w|^q\left[\frac{1}{2^{(q-1)}}\cos^q(\alpha_2-\beta)\cos(q\omega)-\right.\\ &\left.-(-1)^{(q-1)}\frac{1}{2^{(q-1)}}\sin^q(\alpha_2-\beta)\sin(q\omega)\right],\end{aligned}$$

et par suite,

$$0=|v|^q|w|^q[2(1-z^2)^q+2^qz^{2q}-2^q].$$

En faisant $z=0$, on obtient $vw=0$ car $q\neq 1$.

Si $v=0$, on développe le membre de droite de l'égalité (**) suivant les fonctions $\sin(k(\omega-\alpha_1+\beta))$ et $\cos(k(\omega-\alpha_1+\beta))$, $k$ variant de 0 à $q-1$. La nullité du coefficient de $\cos((q-1)(\omega-\alpha_1+\beta))$ donne après simplifications

$$0=[(1+z^2)|u|^2+4z^2|w|^2]|u|^{q-1}|w|^{q-1}+2^q(1+z^2)^{q+1}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=3}^{n}\{[|x_{k,1}|^{q-1}|x_{k,2}|^{q-1}[|x_{k,1}|^2+|x_{k,2}|^2][\cos^{q-1}(\gamma_k')+(-1)^{(q-1)/2}\sin^{q-1}(\gamma_k')]\}.$$

En faisant $z = \mathrm{i}$, on obtient $uw = 0$. Si $u = 0$, il vient (cf. (**))

$$c(1+z^2)^p = 2^p|w|^p(1+z^p)^2,$$

or $(1+z^2)^p$ ne divise pas $(1+z^p)^2$, par conséquent $w$ doit être nul. On a donc montré que si $v$ est nul, $w$ est aussi nul.

Lorsque $w$ est nul, on remarque que le polynôme impair figurant dans le membre de droite de (**) doit être nul. Après développement et simplifications, on voit qu'il existe deux polynômes $P$ et $Q$ tels que

$$(1+z^2)^{q-2}P(z^2) = 2|v|^p[2^p z^{2q} + (1-z^2)^{2q}]/(1+z^2)^2 + 2q|u|^2|v|^{p-2}(1-z^2)^{2q-2} +$$

$$+q(q-1)(1-z^2)^{2q-4}|v|^{p-4}\{(1+z^2)^2|u|^4 + 4(1-z^2)^2\mathrm{Re}(\overline{u}v)^2\} + (1-z^2)Q(z^2).$$

En faisant $z = \mathrm{i}$ dans l'expression précédente, on trouve $v = 0$.

Traitons maintenent le cas où $p = 2$. L'invariance par conjugaison unitaire de la norme de Hilbert-Schmidt permet de se ramener au cas où $b = 0$. On a d'après l'égalité (**)

$$c(1+z^2)^2 = a\{2(1+z^2)^2|u|^2 + 2(1-z^2)^2|v|^2 + 8z^2|w|^2 + 8z(1-z^2)\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\omega}\overline{v}w)\}.$$

En faisant $z = \mathrm{i}$, pour tout $\omega$, on obtient

$$0 = |v|^2 - |w|^2 + 2\mathrm{i}\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\omega}\overline{v}w).$$

Il en résulte que $v = w = 0$.

On observe donc que dans tous les cas, on a $v = w = 0$. Compte tenu du choix de la base, cela montre que $X$ ne possède qu'une valeur propre et que $X$ est un opérateur scalaire sur tout sous espace stable de dimension 2. On en déduit alors par une récurrence finie (en prenant une base de trigonalisation pour $X$) que $X$ est nécessairement un opérateur scalaire.

La combinaison du lemme 1 et du lemme 2 fournit la preuve du théorème 1.

*Preuve du théorème 2.* Nous nous plaçons désormais dans le cas où $p = 2$ et où $X$ est un opérateur pour lequel la semi-norme $n_2$ est constante sur l'orbite unitaire $U(X)$ de $X$.

LEMME 3. *Si la semi-norme $n_2$ est constante sur l'orbite unitaire d'un opérateur $X$ qui n'est pas un multiple de l'identité, on a les relations suivantes:*

$$n\rho_{k,k} + \sum_{l=1}^{n}\rho_{l,l} = \sum_{l=1}^{n}\rho_{l,k} + \sum_{l=1}^{n}\rho_{k,l}, \quad \text{pour } k \in \{1,\ldots,n\}.$$

*Preuve du lemme 3.* Notons $\Sigma_n(k)$ l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,n\}$ qui laissent invariant $k$. Comme $X$ vérifie $(*)$, la somme

$$\varphi_k(T) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n(k)} n(U_\sigma T U_\sigma^*)$$

est constante sur $U(X)$, et on a

$$\begin{aligned}
\varphi_k(T) = {} & \Bigg[(n-1)!\rho_{k,k} - (n-2)!\left(\sum_{j\neq k}\rho_{k,j} + \sum_{i\neq k}\rho_{i,k}\right) + \\
& + (n-3)!\left(\sum_{\substack{j\neq k,\ i\neq k\\ i\neq j}}\rho_{i,j}\right)\Bigg]|\langle T\varepsilon_k,\varepsilon_k\rangle|^2 + \\
& + \left[(n-2)!\left(\sum_{j\neq k}\rho_{k,j}\right) - (n-3)!\left(\sum_{\substack{j\neq k,\ i\neq k\\ i\neq j}}\rho_{i,j}\right)\right]\|T\varepsilon_k\|^2 + \\
& + \left[(n-2)!\left(\sum_{i\neq k}\rho_{i,k}\right) - (n-3)!\left(\sum_{\substack{j\neq k,\ i\neq k\\ i\neq j}}\rho_{i,j}\right)\right]\|T^*\varepsilon_k\|^2 + \\
& + \left[(n-2)!\left(\sum_{l\neq k}\rho_{l,l}\right) - (n-3)!\left(\sum_{\substack{j\neq k,\ i\neq k\\ i\neq j}}\rho_{i,j}\right)\right]\left(\sum_{l\neq k}|\langle T\varepsilon_l,\varepsilon_l\rangle|^2\right) + \\
& + (n-3)!\left(\sum_{\substack{j\neq k,\ i\neq k\\ i\neq j}}\rho_{i,j}\right)\|T\|_2^2 = \\
= {} & a_k|\langle T\varepsilon_k,\varepsilon_k\rangle|^2 + b_k\|T\varepsilon_k\|^2 + c_k\|T^*\varepsilon_k\|^2 + d_k\left(\sum_{l\neq k}|\langle T\varepsilon_l,\varepsilon_l\rangle|^2\right) + e_k\|T\|_2^2.
\end{aligned}$$

Comme la norme de Hilbert-Schmidt est unitairement invariante, l'application $\varphi_k$ donnée par

$$\varphi_k(T) = a_k|\langle T\varepsilon_k,\varepsilon_k\rangle|^2 + b_k\|T\varepsilon_k\|^2 + c_k\|T^*\varepsilon_k\|^2 + d_k\left(\sum_{l\neq k}|\langle T\varepsilon_l,\varepsilon_l\rangle|^2\right), \quad T\in L(H),$$

est encore constante sur l'orbite unitaire de $X$.

Pour le calcul de $\varphi_k$ sur $U(X)$, on peut choisir la base orthonormée $(\varepsilon_l)$ de manière arbitraire. Si $X$ n'est pas un multiple de l'identité, on considère une base $(\varepsilon_l)$ pour laquelle la compression $Y$ de $X$ sur l'orthogonal $E$ de $\varepsilon_k$ n'est pas multiple de l'identité. Si $V$ est un opérateur unitaire sur $E$, on pose

$$U = \varepsilon_k \otimes \varepsilon_k \oplus V.$$

Il vient,

$$\varphi_k(X) = a_k|\langle X\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle|^2 + b_k\|X\varepsilon_k\|^2 + c_k\|X^*\varepsilon_k\|^2 + d_k\left(\sum_{l\neq k}|\langle Y\varepsilon_l, \varepsilon_l\rangle|^2\right) = \varphi_k(U^*XU) =$$

$$= a_k|\langle X\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle|^2 + b_k\|U^*X\varepsilon_k\|^2 + c_k\|U^*X^*\varepsilon_k\|^2 + d_k\left(\sum_{l\neq k}|\langle XV\varepsilon_l, V\varepsilon_l\rangle|^2\right) =$$

$$= a_k|\langle X\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle|^2 + b_k\|X\varepsilon_k\|^2 + c_k\|X^*\varepsilon_k\|^2 + d_k\left(\sum_{l\neq k}|\langle YV\varepsilon_l, V\varepsilon_l\rangle|^2\right)$$

D'où,

$$d_k\left(\sum_{l\neq k}|\langle Y\varepsilon_l, \varepsilon_l\rangle|^2\right) = d_k\left(\sum_{l\neq k}|\langle YV\varepsilon_l, V\varepsilon_l\rangle|^2\right)$$

pour tout opérateur unitaire $V$ sur $E$. Puisque $Y$ n'est pas un multiple de l'identité, on voit, en appliquant le lemme 2 dans le cadre du sous-espace $E$, que $d_k$ doit nécessairement être nul.

On désigne par $\tau_{l,k}$ la transposition qui échange $l$ et $k$. Sur l'orbite unitaire de $X$, on a

$$\varphi_k(T) = \frac{1}{n}\left[\varphi_k(T) + \sum_{l\neq k}\varphi_k(U^*_{\tau_{l,k}}TU_{\tau_{l,k}})\right] = \frac{1}{n}\left[a_k\sum_{l=1}^{n}|\langle T\varepsilon_l, \varepsilon_l\rangle|^2 + (b_k + c_k)\|T\|_2^2\right].$$

On en déduit que l'expression

$$a_k\sum_{l=1}^{n}|\langle T\varepsilon_l, \varepsilon_l\rangle|^2$$

est constante sur l'orbite unitaire de $X$. Comme $X$ n'est pas un multiple de l'identité, il résulte du lemme 2 que $a_k$ est nul. Ainsi $a_k$ et $d_k$ sont nuls et le lemme 3 s'ensuit immédiatement. ■

LEMME 4. *Si la semi-norme $n_2$ est différente de la norme de Hilbert-Schmidt et est constante sur l'orbite unitaire d'un opérateur $X$, alors $X$ est nécessairement multiple d'un opérateur unitaire.*

*Preuve du lemme 4.* On a vu précédemment que l'application $\varphi_k$ est constante sur $U(X)$. Or, pour un opérateur unitaire $U$, on a

$$\varphi_k(X) = b_k\|X\varepsilon_k\|^2 + c_k\|X^*\varepsilon_k\|^2 = \langle [b_kX^*X + c_kXX^*]\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle =$$

$$= \varphi_k(U^*XU) = b_k\|XU\varepsilon_k\|^2 + c_k\|X^*U\varepsilon_k\|^2 = \langle U^*[b_kX^*X + c_kXX^*]U\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle.$$

L'opérateur positif $Z_k = b_kX^*X + c_kXX^*$ vérifie donc la relation

$$\langle Z_k\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle = \langle U^*Z_kU\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle.$$

Par conséquent, les valeurs propres de $Z$ sont totutes égales, et $Z_k = \alpha_k I$ avec $\alpha_k \in$ $\in \mathbf{R}_+^*$. L'opérateur $X$ vérifie donc la relation

$$b_kX^*X + c_kXX^* = \alpha_k I.$$

Posons $R = X^*X$ et $S = XX^*$. La relation précédente montre que les décompositions spectrales de $R$ et $S$ s'écrivent sous la forme

$$R = \sum_{i=1}^m r_iP_i \text{ et } S = \sum_{i=1}^m r_{\sigma(i)}P_i \text{ avec } r_1 < \cdots < r_m,\ \sigma \in \Sigma_m \text{ et } \mathrm{rg}(P_i) = \mathrm{rg}(P_{\sigma(i)}).$$

Soit $(i_1, \ldots, i_q)$ un cycle maximal de $\sigma$ ($\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma(i_q) = i_1$). Il vient

$$\begin{gathered} b_kr_{i_1} + c_kr_{i_2} = \alpha_k \\ b_kr_{i_2} + c_kr_{i_3} = \alpha_k \\ \cdots\cdots \\ b_kr_{i_q} + c_kr_{i_1} = \alpha_k. \end{gathered}$$

Ce que l'on peut encore écrire sous la forme (avec $u$ et $v$ non nuls)

$$\begin{gathered} r_{i_2} = u + vr_{i_1} \\ r_{i_3} = u + vr_{i_2} \\ \cdots\cdots \\ r_{i_1} = u + vr_{i_q}. \end{gathered}$$

Si $v \notin \{-1, 1\}$, on a $r_{i_1} = \dfrac{u}{1-v}$ et $vr_{i_q} = r_{i_1} - u = \dfrac{vu}{1-v}$, d'où $r_{i_q} = r_{i_1}$, ce qui est impossible lorsque $q > 1$, c'est-à-dire lorsque $X$ n'est pas multiple d'un opérateur unitaire.

Le cas $v = 1$ est impossible car $u \neq 0$ et si $v = -1$ on obtient pour $q > 2$, $u = r_{i_1} + r_{i_2} = r_{i_2} + r_{i_3}$, ce qui est absurde. Maintenant si $q = 2$ et $v = -1$, les relations $b_k r_{i_1} + c_k r_{i_2} = \alpha_k$ et $b_k r_{i_2} + c_k r_{i_1} = \alpha_k$ entraînent $b_k = c_k$. On a donc montré que si $X$ n'est pas un multiple d'un opérateur unitaire, on avait nécessairement $b_k = c_k$.

Nous supposons désormais que $X$ n'est pas un multiple d'un opérateur unitaire. On peut donc considérer sans restreindre la généralité du problème que $X$ vérifie la relation

$$X^*X + XX^* = 2I.$$

D'où, en désignant par $\mathrm{sp}(T)$ le spectre d'un opérateur $T$:

$$\mathrm{sp}(R) \setminus \{1\} = \mathrm{sp}(S) \setminus \{1\} = \{r_1, 2-r_1, r_2, 2-r_2, \ldots, r_p, 2-r_p\}, \quad \text{avec } 0 \leqslant r_i < 1.$$

Posons $E_i = \ker(R - r_i I) \oplus \ker(R - (2-r_i)I)$; les deux sous-espaces intervenant dans cette somme directe sont de même dimension (on note respectivement $P_i$ et $Q_i$ les deux projections orthogonales sur ces sous espaces). Si $x \in \ker(R - r_i I)$, on a

$$RXx = (2I - S)Xx = 2Xx - XX^*Xx = 2Xx - XRx = (2 - r_i)Xx.$$

Cela implique que le sous-espace $E_i$ est stable par $X$, et que, si l'on note $X_i$ la restriction de $X$ à $E_i$, la matrice de $X_i$ par rapport à une base orthonormée respectant la somme directe ci-dessus est de la forme

$$X_i = \begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Il vient

$$X_i^* X_i = \begin{bmatrix} AA^* & 0 \\ 0 & B^*B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i P_i & 0 \\ 0 & (2-r_i)Q_i \end{bmatrix}$$

et

$$X_i X_i^* = \begin{bmatrix} BB^* & 0 \\ 0 & AA^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-r_i)P_i & 0 \\ 0 & r_i Q_i \end{bmatrix}.$$

On voit donc que $A$ et $B$ sont de la forme $A = s_i U_i$ et $B = t_i V_i$ où $s_i$ et $t_i$ sont deux réels positifs tels que $s_i^2 + t_i^2 = 2$, et où $U_i$ et $V_i$ sont deux opérateurs unitaires. On en déduit que $X$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t_1 V_1 \\ s_1 U_1 & 0 \end{bmatrix} & 0 & & & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & t_2 V_2 \\ s_2 U_2 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & t_p V_p \\ s_p U_p & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & & & 0 & W \end{bmatrix}$$

où $W$ est unitaire.

Considérons un opérateur $Y$ de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & sU_2 \\ rU_1 & 0 \end{bmatrix},$$

où $r$ et $s$ sont deux réels tels que $r^2+s^2=2$, et où $U_1$ et $U_2$ sont des matrices unitaires d'ordre $q \geqslant 1$. Dans le cas où $r$ et $s$ sont tous les deux non nuls, l'opérateur unitaire $U = U_1U_2$ se diagonalise sur une base orthonormée $e_k$; on a donc $Ue_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_k}e_k$. Posons $x_k = \sqrt{\frac{s}{r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k}U_2e_k$, $y_k = e_k$, $u_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ et $u'_k = \begin{pmatrix} -x_k \\ y_k \end{pmatrix}$. On vérifie que $u_k$ est un vecteur propre de $Y$ pour la valeur propre $\alpha_k = \sqrt{rs}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}e_k$ et $u'_k$ est un vecteur propre de $Y$ pour la valeur propre $-\alpha_k$. On introduit la famille de vecteurs $\{\nu_1,\nu'_1,\dots,\nu_q,\nu'_q\}$ définis par

$$\nu_k = \sqrt{\frac{r}{r+s}}u_k \quad \text{et} \quad \nu'_k = \frac{s-r}{2\sqrt{s(s+r)}}u_k + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s+r}{s}}u'_k.$$

La famille de vecteurs $\{\nu_1,\nu'_1,\dots,\nu_q,\nu'_q\}$ est une base orthonormée dans laquelle la matrice de $Y$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & (s_1-r_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \\ 0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \alpha_m & (s_m-r_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_m} \\ 0 & -\alpha_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

L'examen des cas $r=0$ ou $s=0$ montre que $Y$ est encore de la forme précédente, avec $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$ ($Y^2=0$). On en déduit que l'on peut choisir la base orthonormée $(\varepsilon_k)$ de sorte que la matrice de $X$ dans cette base soit de la forme

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & (s_1-r_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \\ 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix} & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \begin{bmatrix} \lambda_m & (s_m-r_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_m} \\ 0 & -\lambda_m \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & & 0 & \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{m+1}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{n-m}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

où les réels $r_i$ et $s_i$ sont distincts et vérifient la relation $(r_i)^2 + (s_i)^2 = 2$, où les $\lambda_i$ sont des nombres complexes tels que $|\lambda_i|^2 = r_i s_i$, et où les $\theta_i$ sont des nombres réels.

Comme la semi-norme $n_2$ est non nulle, on déduit du lemme 3 qu'il existe au moins un coefficient $\rho_{i,i}$ qui vaut un, et on peut supposer pour la suite que $\rho_{1,1} = 1$. Soit $F_1$ le sous espace engendré par $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$. Si $V$ est un opérateur unitaire sur $F_1$, on pose

$$U\varepsilon_1 = V\varepsilon_1,\ U\varepsilon_2 = V\varepsilon_2 \text{ et } U\varepsilon_k = \varepsilon_k \text{ pour } k > 2.$$

Il vient

$$\rho(X) = \rho(U^*XU) = \rho_{1,1}|\langle V^*XV\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle|^2 + \rho_{1,2}|\langle V^*XV\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle|^2 +$$

$$+\rho_{2,1}|\langle V^*XV\varepsilon_2, \varepsilon_1\rangle|^2 + \rho_{2,2}|\langle V^*XV\varepsilon_2, \varepsilon_2\rangle|^2 + \sum_{(i,j)\notin\{1,2\}^2} \rho_{i,j}|\langle X\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle|^2.$$

Il en résulte que l'opérateur

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & (s_1 - r_1)e^{i\theta_1} \\ 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}$$

a une orbite unitaire sur laquelle la fonction $\rho'$

$$\rho'(Y) = \sum_{(i,j)\in\{1,2\}^2} \rho_{i,j}|\langle Y\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle|^2$$

est constante. En considérant l'opérateur unitaire $V$ défini par $V\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ et $V\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, on voit que l'expression

$$\rho'(Y) + \rho'(V^*YV) =$$

$$= [(\rho_{1,1} + \rho_{2,2}) - (\rho_{1,2} + \rho_{2,1})][|\langle Y\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle|^2 + |\langle Y\varepsilon_2, \varepsilon_2\rangle|^2] + (\rho_{1,2} + \rho_{2,1})\|Y\|_2^2$$

est constante sur l'orbite unitaire de $Y_1$. Comme la norme de Hilbert-Schmidt est invariante par conjugaison unitaire, on en déduit que la quantité

$$[(\rho_{1,1} + \rho_{2,2}) - (\rho_{1,2} + \rho_{2,1})][|\langle Y\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle|^2 + |\langle Y\varepsilon_2, \varepsilon_2\rangle|^2]$$

est constante sur l'orbite unitaire de $Y_1$, qui n'est pas un multiple de l'identité. On obtient, en utilisant le lemme 2, l'identité

$$\rho_{1,1} + \rho_{2,2} = \rho_{1,2} + \rho_{2,1}.$$

Le coefficient $\rho_{2,2}$ est non nul. En effet, si $\rho_{2,2} = 0$, on a d'après l'identité ci-dessus $\rho'(Y) = \|Y\varepsilon_1\|^2$ ou $\rho'(Y) = \|Y^*\varepsilon_1\|^2$, d'où , puisque $\rho'$ est constante sur $U(Y_1)$, $\rho'(Y_1) = \|Y_1 x\|^2$ ou $\rho'(Y) = \|Y_1^* x\|^2$ lorsque $\|x\| = 1$; cela impose à $Y_1$ d'être un multiple d'un opérateur unitaire. On aboutit donc à une contradiction. On obtient donc

$$\rho_{1,2} = \rho_{2,2} = \rho_{1,2} = \rho_{2,1} = 1.$$

En faisant le même type de raisonnement pour le sous espace $F_i$ engendré par $\varepsilon_{2i-1}$ et $\varepsilon_{2i}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et l'opérateur

$$Y_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & (s_i - r_i)e^{i\theta_i} \\ 0 & -\lambda_i \end{bmatrix},$$

on voit que l'on a nécessairement

$$\rho_{2i-1,2i-1} = \rho_{2i,2i} = \rho_{2i-1,2i} = \rho_{2i,2i-1} = 1$$

ou

$$\rho_{2i-1,2i-1} = \rho_{2i,2i} = \rho_{2i-1,2i} = \rho_{2i,2i-1} = 0.$$

Supposons que $\rho_{2i-1,2i-1} = \rho_{2i,2i} = \rho_{2i-1,2i} = \rho_{2i,2i-1} = 0$, on considère alors le sous espace $F_1 \oplus F_i$ et l'opérateur

$$Z_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & (s_1 - r_1)e^{i\theta_1} \\ 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \lambda_i & (s_i - r_i)e^{i\theta_i} \\ 0 & -\lambda_i \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

L'opérateur $Z_i$ n'est pas multiple d'un opérateur unitaire et vérifie la relation $Z_i^* Z_i + {} + Z_i Z_i^* = 2I$. $(\|Z_i\|_2^2 = 4)$. La semi-norme $n_2$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$, on en déduit (comme dans le cas de l'opérateur $Y_i$ agissant sur $E_i$) que l'expression

$$\rho''(T) = \sum_{k,l \in \{1;2;2i-1;2i\}} \rho_{k,l} |\langle T\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle|^2$$

est constante sur l'orbite unitaire de $Z_i$. Dans ce cadre, on peut appliquer le lemme 1 et le lemme 2, on obtient alors, en posant $I = \{1;2;2i-1;2i\}$,

$$\rho''(T) = \left[\frac{1}{4}\left(\sum_{k\in I}\rho_{k,k}\right) - \frac{1}{12}\left(\sum_{\substack{k,l\in I\\k\neq l}}\rho_{k,l}\right)\right]\left(\sum_{k\in I}|\langle T\varepsilon_k, \varepsilon_k\rangle|^2\right) + \frac{1}{12}\left(\sum_{\substack{k,l\in I\\k\neq l}}\rho_{k,l}\right)\|T\|_2^2,$$

pour $T$ appartenant à l'orbite unitaire de $Z_i$. La norme de Hilbert-Schmidt étant constante sur l'orbite unitaire de $Z_i$, on a d'après le lemme 2,

$$3\sum_{k\in I}\rho_{k,k} = \sum_{\substack{k,l\in I\\k\neq l}}\rho_{k,l},$$

d'où
$$\rho''(T) = \frac{1}{4}\left[\sum_{k\in I}\rho_{k,k}\right]\|Z_i\|_2^2 = \sum_{k\in I}\rho_{k,k} = 2.$$
Le raisonnement montrant que $b_k = c_k$ lorsque $X$ n'est pas le multiple d'un opérateur unitaire peut être repris pour l'opérateur $Z_i$. Il fournit, compte tenu du lemme 2 appliqué à $Z_i$, les relations
$$\rho_{1,2i-1} + \rho_{1,2i} = \rho_{2i-1,1} + \rho_{2i,1} = 1$$
$$\rho_{2,2i-1} + \rho_{2,2i} = \rho_{2i-1,2} + \rho_{2i,2} = 1$$
$$\rho_{2i-1,1} + \rho_{2i-1,2} = \rho_{1,2i-1} + \rho_{2,2i-1} = 1$$
$$\rho_{2i,1} + \rho_{2i,2} = \rho_{1,2i} + \rho_{2,2i} = 1.$$
Il y a donc quatre possibilités pour la fonctionnelle $\rho''$:

1) $\rho''(T) = |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_1\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2,\varepsilon_2\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_2\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2|\varepsilon_1\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_{2i-1},\varepsilon_1\rangle|^2 + {}$ $+ |\langle T\varepsilon_{2i},\varepsilon_2\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_{2i}\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2,\varepsilon_{2i-1}\rangle|^2$;
2) $\rho''(T) = |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_1\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2,\varepsilon_2\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_2\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2,\varepsilon_1\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_{2i},\varepsilon_1\rangle|^2 + {}$ $+ |\langle T\varepsilon_{2i-1},\varepsilon_2\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_{2i}\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2,\varepsilon_{2i-1}\rangle|^2$;
3) $\rho''(T) = |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_1\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2,\varepsilon_2\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_2\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2,\varepsilon_1\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_{2i-1},\varepsilon_1\rangle|^2 + {}$ $+ |\langle T\varepsilon_{2i},\varepsilon_2\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_{2i-1}\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2,\varepsilon_{2i}\rangle|^2$;
4) $\rho''(T) = |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_1\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2,\varepsilon_2\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_2\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2,\varepsilon_1\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_{2i-1},\varepsilon_2\rangle|^2 + {}$ $+ |\langle T\varepsilon_{2i},\varepsilon_1\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_1,\varepsilon_{2i-1}\rangle|^2 + |\langle T\varepsilon_2,\varepsilon_{2i}\rangle|^2$.

On a vu précédemment que dans une autre base orthonormée $Z_i$ pouvait se mettre sous la forme
$$Z_i = \begin{bmatrix} 0 & t_iW_i \\ s_iV_i & 0 \end{bmatrix}, \text{ où } V_i \text{ et } W_i \text{ sont unitaires.}$$
Comme $(s_i)^2 + (t_i)^2 = 2$ et comme $Z_i$ n'est pas unitaire, on a nécessairement $s_i > 1$ ou $t_i > 1$. Supposons par exemple $s_i > 1$ (le cas $t_i > 1$ est analogue) et considérons l'opérateur unitaire
$$U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & V_i \end{bmatrix},$$
il vient
$$U^*Z_iU = \begin{bmatrix} 0 & t_iW_iV_i \\ s_iI & 0 \end{bmatrix}.$$
Dans les cas 3) et 4), on obtient $2 = \rho''(Z_i) = \rho''(U^*Z_iU) \geqslant 2(s_i)^2 > 2$, ce qui est absurde. Dans le cas 1), on conjugue par l'opérateur unitaire
$$U' = \begin{bmatrix} W_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$
et on aboutit à la même contradiction. Dans le cas 2), on conjugue par l'opérateur unitaire $U'U''$, ou $U''$ est l'opérateur qui échange $\varepsilon_{2i-1}$ et $\varepsilon_{21}$ en laissant $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ fixes,

on se ramène ainsi au cas précédent. On voit donc que dans tous les cas, on aboutit à une contradiction, par conséquent on a obligatoirement

$$\rho_{2i-1,2i-1} = \rho_{2i,2i} = \rho_{2i-1,2i} = \rho_{2i,2i-1} = 1, \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Pour $m+1 \leqslant l \leqslant n-m$, on considère le sous espace $F_1 \oplus \mathbb{C}\varepsilon_l$ et l'opérateur

$$T_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & (s_1 - r_1)e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_l} \end{bmatrix}.$$

L'opérateur $T_1$ n'est pas multiple d'un opérateur unitaire et vérifie la relation $T_1^* T_1 + T_1 T_1^* = 2I$. La semi-norme $n_2$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$, on en déduit que l'expression

$$\rho^3(T) = \sum_{k,m \in \{1;2;l\}} \rho_{k,m} |\langle T\varepsilon_k, \varepsilon_m \rangle|^2,$$

est constante sur l'orbite unitaire de $T_1$. On a

$$\rho^3(T_1) = 2|\lambda_1|^2 + |\lambda_1|^2 (s_1 - r_1)^2 \frac{1}{s_1 r_1} + \rho_{l,l} = 2 + \rho_{l,l}.$$

D'autre part, en conjuguant $T_1$ par l'opérateur unitaire $U$ qui permute de manière circulaire les éléments de la base, on obtient

$$\rho^3(T_1) = 1 + |\lambda_1|^2 + \rho_{l,l}|\lambda_1|^2 + \rho_{l,2}|\lambda_1|^2 (s_1 - r_1)^2 \frac{1}{s_1 r_1} = 1 + (1 + \rho_{l,l}) s_1 r_1 + 2\rho_{l,2}(1 - s_1 r_1).$$

Puisque $s_1 r_1 \neq 1$, l'égalité

$$2 + \rho_{l,l} = 1 + (1 + \rho_{l,l}) s_1 r_1 + 2\rho_{l,2}(1 - s_1 r_1)$$

implique $\rho_{l,l} = \rho_{l,2} = 1$.

En récapitulant ce qui précède on voit que $\rho_{i,i} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Cela entraîne, compte tenu du lemme 2,

$$2n = n\rho_{k,k} + \sum_{l=1}^{n} \rho_{l,l} = \sum_{l=1}^{n} \rho_{l,k} + \sum_{l=1}^{n} \rho_{k,l}, \text{ pour } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Il s'ensuit que $\rho_{i,j} = 1$ pour tout couple $(i,j)$, et par conséquent la semi-norme $n_2$ est la norme de Hilbert-Schmidt. On a donc montré que si $X$ n'est pas le multiple d'un opérateur unitaire, alors la semi-norme $n_2$ est nécessairement la norme de Hilbert-Schmidt, ce qui achève la preuve du lemme 4.

LEMME 5. *Soit $T$ un opérateur. On a l'égalité $|\langle Tx, y \rangle| = |\langle Ty, x \rangle|$, pour tout couple de vecteurs orthogonaux $(x, y)$, si et seulement si $T = aI + bS$ où $a$ et $b$ sont deux nombres complexes et $S$ est un opérateur auto-adjoint.*

*Preuve du lemme 5.* Supposons que $T$ soit un opérateur qui vérifie l'égalité $|\langle Tx, y|\rangle = |\langle Ty, x\rangle|$, pour tout couple de vecteurs orthogonaux $(x, y)$. On voit en trigonalisant $T$ suivant une base orthonormée que $T$ est normal, la réciproque étant vraie en dimension 2. On considère un triplet de valeurs propres $(\alpha, \beta, \gamma)$ de $T$ associées aux vecteurs propres $(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Soient $x = u\nu_1 + v\nu_2 + w\nu_3$ et $y = u'\nu_1 + v'\nu_2 + w'\nu_3$ deux vecteurs orthogonaux, il vient

$$|\alpha u\overline{u}' + \beta v\overline{v}' + \gamma w\overline{w}'| = |\langle Tx, y\rangle| = |\langle Ty, x\rangle| = |\overline{\alpha} u\overline{u}' + \overline{\beta} v\overline{v}' + \overline{\gamma} w\overline{w}'|.$$

On en déduit que pour tout couple $(a, b)$ de nombres complexes, on a

$$|a(\alpha - \gamma) + b(\beta - \gamma)| = |a(\overline{\alpha} - \overline{\gamma}) + b(\overline{\beta} - \overline{\gamma})|,$$

ce qui équivaut à

$$2\mathrm{Re}[a\overline{b}(\alpha - \gamma)(\overline{\beta} - \overline{\gamma})] = 2\mathrm{Re}[a\overline{b}(\overline{\alpha} - \overline{\gamma})(\beta - \gamma)].$$

Comme les nombres complexes $a$ et $b$ sont arbitraires, l'égalité ci-dessus entraîne

$$(\alpha - \gamma)(\overline{\beta} - \overline{\gamma}) = (\overline{\alpha} - \overline{\gamma})(\beta - \gamma).$$

Les points $\alpha, \beta$ et $\gamma$ sont donc alignés et $T$ est bien de la forme indiquée. La réciproque est immédiate. ∎

Terminons le preuve du théorème 2. Sans restreindre la généralité, on peut se ramener au cas où $\rho_{l,l} = 1$ pour $1 \leqslant l \leqslant k$ et $\rho_{l,l} = 0$ pour $l > k$, et où la semi-norme $n_2$ est constante sur l'orbite unitaire d'un opérateur unitaire $X$ qui n'est pas un opérateur scalaire. On obtient d'après le lemme 3.

$$2nk = \sum_{l=1}^{n} \left( \rho_{l,l} + \sum_{i=1}^{n} \rho_{i,i} \right) = \sum_{l=1}^{n} \left( \sum_{i \neq l} \rho_{i,l} + \sum_{j \neq l} \rho_{l,j} \right) = 2 \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{i,j}.$$

D'où

$$\begin{aligned} nk = \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{i,j} &= \sum_{l=1}^{k} \left( \sum_{i=l}^{n} \rho_{i,l} + \sum_{j=l}^{n} \rho_{l,j} - \sum_{i=1}^{l} \rho_{i,l} - \sum_{j=1}^{l} \rho_{l,j} + 1 \right) + \sum_{i,j>k}^{n} \rho_{i,j} = \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left( n + k - \sum_{i=1}^{l} \rho_{i,l} - \sum_{j=1}^{l} \rho_{l,j} + 1 \right) + \sum_{i,j>k}^{n} \rho_{i,j} \geqslant \\ &\geqslant \sum_{l=1}^{n} (n + k - 2l + 1) + \sum_{i,j>k}^{k} \rho_{i,j} = nk + \sum_{i,j>k}^{n} \rho_{i,j}. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a $\rho_{i,j} = 0$ pour $i$ et $j$ strictement supérieurs à $k$ et $\rho_{i,j} = 1$ pour $i$ et $j$ inférieurs à $k$.

Puisque $n_2$ est constante sur l'orbite unitaire de $X$ on peut prendre pour base orthonormée $(\varepsilon_p)$ une base de vecteurs propres. Soit $l$ un entier inférieur à $k$; on note $E$ le sous-espace engendré par $\varepsilon_l, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \ldots, \varepsilon_n$, et $Y$ la compression de $X$ sur $E$. Si $V$ est un opérateur unitaire sur $E$, on considére l'opérateur unitaire $U = I_{E^\perp} \oplus V$. L'égalité $n(U^*XU) = n(X)$ donne $n'(V^*YV) = n'(Y)$, où $n'$ est la semi-norme définie sur $L(E)$ par

$$n'(S) = \left( \sum_{i,j \in \{l,k+1,\ldots,n\}} \rho_{i,j} |\langle S\varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $X$ n'est pas un opérateur scalaire, on peut supposer que $\varepsilon_l$ et $\varepsilon_{k+1}$ sont deux vecteurs propres correspondant à deux valeurs propres distinctes. Par conséquent, l'opérateur $Y$ n'est pas un opérateur scalaire, et le lemme 3 appliqué à $n'$ donne: $1 = \rho_{l,i} + \rho_{i,l}$, pour $i$ variant de $k+1$ à $n$.

Or $\rho_{i,j}$ vaut 0 ou 1, on voit donc que la semi-norme $n_2$ est nécessairement de la forme suivante

$$n_2(T) = \left( \sum_{i,j \in \{1,\ldots,k\}} |\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle|^2 + \sum_{l=1}^{k} \left( \sum_{j \in I_l} |\langle T\varepsilon_l, \varepsilon_j \rangle|^2 + \sum_{i \in I_l^c} |\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_l \rangle|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $I_l$ désigne une partie de $\{k+1, \ldots, n\}$ et $I_l^c$ son complémentaire dans $\{k+1, \ldots, n\}$.

On distingue ensuite deux cas.

Le premier correspond au cas où tous les $I_l$ sont vides ou tous égaux à $\{k+1, \ldots, n\}$. Alors,

$$n_2(T) = \left( \sum_{i=1}^{k} \|T\varepsilon_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou bien

$$n_2(T) = \left( \sum_{j=1}^{k} \|T^*\varepsilon_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et il est clair que $n_2$ est constante sur l'orbite unitaire d'un opérateur si et seulement si cet opérateur est le multiple d'un opérateur unitaire.

Le second correspond au cas où l'un des $I_l$ est distinct du vide et de $\{k+1, \ldots, n\}$. On peut supposer qu'il s'agit de $I_k$, que $k+1 \in I_k$ et que $k+2 \notin I_k$. En remplaçant au besoin $n_2$ par $\| \|_2 - n_2$, on peut également supposer que $k$ est inférieur à la partie entière de $n/2$. Comme $X$ est unitaire, on prend pour $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}$, une base d'un sous espace propre de $X$ et pour $\varepsilon_{k+1}$ un vecteur propre de $X$. On note $Z$ la compression de $X$ sur le sous espace $F$ engendré par $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n$. On voit que la semi-norme définie sur $F$ par:

$$n''(S)=\left(|\langle S\varepsilon_k,\varepsilon_k\rangle|^2+|\langle S\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1}\rangle|^2+|\langle S\varepsilon_{k+2},\varepsilon_k\rangle|^2+\left(\sum_{\substack{j\in I_k\\ j\geqslant k+3}}|\langle S\varepsilon_k,\varepsilon_j\rangle|^2+\sum_{\substack{i\in I_k^c\\ i\geqslant k+3}}|\langle S\varepsilon_i,\varepsilon_k\rangle|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

est constante sur l'orbite unitaire de $Z$.

En considérant l'opérateur unitaire sur $F$, qui échange $\varepsilon_{k+1}$ et $\varepsilon_{k+2}$, il vient,

$$|\langle Z\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1}\rangle|^2+|\langle Z\varepsilon_{k+2},\varepsilon_k\rangle|^2=|\langle Z\varepsilon_k,\varepsilon_{k+2}\rangle|^2+|\langle Z\varepsilon_{k+1},\varepsilon_k\rangle|^2.$$

Compte tenu que $\varepsilon_{k+1}$ est un vecteur propre de $X$, donc également de $Z$, on obtient

$$|\langle Z\varepsilon_{k+2},\varepsilon_k\rangle|^2=|\langle Z\varepsilon_k,\varepsilon_{k+2}\rangle|^2.$$

On note $G$ l'orthogonal du sous espace engendré par $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}$ et $\varepsilon_{k+1}$. Remarquons que le choix de la base orthonormée $\{\varepsilon_k, \varepsilon_{k+2}, \ldots, \varepsilon_n\}$ de $G$ est arbitraire. On voit donc que la compression $Z_1$ de $X$ sur $G$ vérifie l'égalité $|\langle Z_1x, y\rangle| = |\langle Z_1y, x\rangle|$, pour tout couple de vecteurs orthogonaux. D'après le lemme 5, les valeurs propres de $Z_1$ sont alignées. Comme $Z_1$ est unitaire, il a au plus deux valeurs propres. La liberté du choix des vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}$ montre que $X$ lui-même possède au plus deux valeurs propres.

Réciproquement, si $X$ est le multiple d'un opérateur unitaire ayant au plus deux valeurs propres, il vient d'après le lemme 5, pour une base orthonormée quelconque,

$$n_2(X)=\left(\sum_{i,j\in\{1,\ldots,k\}}|\langle X\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle|^2+\sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{j\in I_l}|\langle X\varepsilon_l,\varepsilon_j\rangle|^2+\sum_{i\in I_l^c}|\langle X\varepsilon_i,\varepsilon_l\rangle|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k}\|X\varepsilon_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=|\alpha|\sqrt{k}.$$

Cela termine la preuve du théorème 2. ∎

## BIBLIOGRAPHIE

1. FONG, C. K.; RADJAVI, H.; ROSENTHAL, P., Norms for matrices and operators, *J. Operator Theory*, **18**(1987), 99–113.
2. DAZORD, J., Sur une norme de matrices, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **312**(1991), 597–600.

3. Parker, W. V., Sets of complex numbers associated with a matrix, *Duke Math. J.*, **15**(1948), 711–715.
4. Fillmore, P.A., On similarity and the diagonal of a matrix, *Amer. Math. Monthly*, **76**(1969), 167–169.

*GILLES CASSIER*
*Equipe d'Analyse,*
*Unité associée au C.N.R.S. no. 754*
*Université de Paris-VI,*
*4, place Jussieu,*
*75230 Paris Cedex 05.*

*JEAN DAZORD*
*Laboratoire de Probabilités et Statistique,*
*I. A. S. B. S. E.,*
*Université Claude Bernard-Lyon 1,*
*43, boulevard du 11 Novembre 1918,*
*69622 Villeurbanne Cedex.*

Received June 25, 1992.