J. OPERATOR THEORY
35(1996), 39–65

BIMODULES DE HOPF ET POIDS OPERATORIELS DE HAAR

JEAN-MICHEL VALLIN

Communicated by Şerban Strătilă

ABSTRACT. In this article we define the category of Hopf (-von Neumann) bimodules and a notion of Haar operatorial weight. For every locally compact groupoid with a Haar system we give two such objects and characterize finite groupoids in those terms.

KEYWORDS: *Groupoids, Kac algebras, quantum groupoids.*

AMS SUBJECT CLASSIFICATION: 22A22, 46L10, 22D25, 16W30.

1. PRELIMINARIES

1.1. INTRODUCTION. Les travaux de V.J.R. Jones ([9]) sur la théorie de l'indice et ceux d'A. Ocneanu ([11]) sur les invariants des variétés de dimension trois incitent à généraliser la structure d'algèbre de Hopf et la notion de poids de Haar ([3], [18], [4], [19], [1], ...) au cadre des algèbres d'opérateurs associées aux groupoïdes ([2]).

Nous abordons ce problème avec le formalisme des algèbres de Kac. On suppose donc connue la théorie des poids et poids opératoriels, on adoptera les notations classiques de [2], [5], [6].

Dans le chapitre préliminaire sont rappelés des résultats fondamentaux dus à J.L. Sauvageot ([13], [14], [15]). Le deuxième chapitre est consacré à la définition des bimodules de Hopf; on formalise et unifie ainsi des résultats de T. Yamanouchi ([20]) et M. Maltsiniotis ([10]), en y adjoignant une notion de poids opératoriel de Haar. Le troisième chapitre est consacré aux deux exemples fondamentaux que permet de définir un groupoïde localement compact G muni d'un système de Haar, l'un est commutatif et l'autre symétrique. Dans le quatrième chapitre, les groupoïdes finis sont caractérisés à l'aide d'une propriété du poids opératoriel de

Haar généralisant [3], (2.2.1, HWii) et naturellement liée aux égalités heuristiques dans G:

$$(xx^{-1})t = t(yy^{-1}) = t.$$

Trois questions restent ouvertes:

– Peut-on construire cette théorie dans le cadre des C^*-algèbres comme pour les algèbres de Kac ([4]) ou à partir "d'unitaires" multiplicatifs généralisant ([1]) ?

– Peut-on définir dans la catégorie que nous avons construite une dualité prolongeant celles de [3], (4.1.1) et [1] qui échange les deux exemples du troisième chapitre et qui ferait ainsi, du cas symétrique, un modèle fondamental de groupoïde quantique ? Dans [21], T. Yamanouchi définit une telle dualité dans le cadre purement algébrique de la dimension finie; l'axiomatique développée dans notre article est certes plus lourde mais plus générale, et met en évidence d'intéressantes propriétés d'invariance de deux poids opératoriels, analogues à la mesure de Haar et au poids de Plancherel d'un groupe topologique localement compact.

Une réponse à l'une ou l'autre de ces deux questions permettrait aussi de caractériser les groupoïdes en termes d'objets commutatifs d'une catégorie.

– De même, à un groupoïde est associé (3.2) un N-N bimodule M, où M et N sont commutatifs, pour définir les "duaux de groupoïdes" (3.3) il suffit de prendre M quelconque et N toujours abélien. En toute généralité, l'exemple de [17], c'est-à-dire l'action d'une algèbres de Hopf sur une algèbre de von Neumann non necessairement commutative, relève du cas où ni M, ni N ne sont abéliens, cette situation fera l'objet de travaux ultérieurs ainsi que le cas de la dimension finie en comparaison avec la théorie développée par T. Yamanouchi dans [21].

1.2. Rappels et préliminaires techniques

1.2.1. Notations. On notera dans toute la suite, N une algèbre de von Neumann commutative munie d'une trace τ normale, semi-finie, fidèle (n.s.f.f.).

Soit K un espace hilbertien, X une partie de l'algèbre $\mathcal{L}(K)$ des opérateurs bornés sur K, ρ une représentation sur K, normale et non dégénérée de l'algèbre de von Neumann N. L'espace hilbertien K a naturellement une structure de N-module (en même temps à droite et à gauche), notée K_ρ $(= {}_\rho K)$ en posant pour tous ξ dans K et tout n dans N:

$$n \underset{\rho}{\cdot} \xi = \rho(n)\xi.$$

On notera $\mathcal{L}_X(K)$, le commutant de X dans $\mathcal{L}(K)$ et $\mathcal{D}(K_\rho, \tau)$, l'ensemble des vecteurs ξ de K qui sont τ-bornés pour ρ, c'est-à-dire tels qu'il existe un nombre réel k vérifiant pour tout élément n dans $\mathcal{N}_\tau$:

$$||\rho(n)\xi||^2 \leqslant k\tau(n^*n).$$

Si ρ' désigne une autre représentation normale et non dégénérée de N dans un espace hilbertien K', on notera $\mathcal{L}_{\rho,\rho'}(K,K')$ l'ensemble des opérateurs d'entrelacement de ρ et ρ', on construit d'après [15] le produit tensoriel de K par K' au dessus de N, noté $K_\rho \underset{\tau}{\otimes}{}_{\rho'}K'$, qui est le completé séparé du produit tensoriel algébrique $\mathcal{D}(K_\rho,\tau) \odot \mathcal{D}(K'_{\rho'},\tau)$ pour un produit scalaire convenable; on notera $\xi_\rho \underset{\tau}{\otimes}{}_{\rho'}\xi'$, ou $\xi \underset{\tau}{\otimes} \xi'$ si aucune confusion n'est possible, l'image dans $K_\rho \underset{\tau}{\otimes}{}_{\rho'}K'$ du tenseur algébrique élémentaire $\xi \odot \xi'$. Si τ' désigne une autre trace n.s.f.f. sur N, les deux produits tensoriels que l'on vient de construire sont isomorphes mais l'isomorphisme ne préserve pas les tenseurs élémentaires $\xi \underset{\tau}{\otimes} \xi'$.

Soient π et π' deux autres représentations normales et non dégénérées de N dans des espaces hilbertiens H et H', pour tous x, y respectivement dans $\mathcal{L}_{\rho,\rho'}(K,K')$ et $\mathcal{L}_{\pi,\pi'}(H,H')$, on définit naturellement un produit tensoriel $x \underset{\rho,\rho',\tau,\pi,\pi'}{\otimes} y$ de $K_\rho \underset{\tau}{\otimes}{}_\pi H$ vers $K'_{\rho'} \underset{\tau}{\otimes}{}_{\pi'}H'$, les isomorphismes rappelés plus haut montrent que ce produit tensoriel est indépendant de τ; donc si ρ et ρ' (resp. π et π') sont égaux on l'écrira plus simplement $x_\rho \otimes {}_{\rho'}y$. On peut ainsi construire pour toute sous-algèbre de von Neumann R de $\mathcal{L}_{\rho(N)}(K)$ et pour toute sous-algèbre de von Neumann S de $\mathcal{L}_{\rho'(N)}(K')$ un produit tensoriel $R_\rho \otimes {}_{\rho'}S$, indépendant de τ, qui a pour réalisation dans $L(K_\rho \underset{\tau}{\otimes}{}_{\rho'}K')$ la sous-algèbre de von Neumann de $L(K_\rho \underset{\tau}{\otimes}{}_{\rho'}K')$ engendrée par les tenseurs $r_\rho \otimes {}_{\rho'}s$ pour tous les r dans R et tous les s dans S.

De plus, si M^1 et M^2 sont des algèbres de von Neumann opérant dans des espaces hilbertiens L^1 et L^2, si π^1 et π^2 sont deux représentations de N, normales, préservant l'unité, et à valeurs respectivement dans M^1 et M^2, le commutant dans $\mathcal{L}(L^1_{\pi^1} \underset{\tau}{\otimes}{}_{\pi^2}L^2)$ de l'algèbre $\mathcal{L}_{M^1}(L^1)_{\pi^1} \otimes {}_{\pi^2}\mathcal{L}_{M^2}(L^2)$ est, à isomorphisme normal près, indépendant de (L^1, L^2, τ), on le notera $M^1_{\pi^1} \star {}_{\pi^2}M^2$.

Plus précisement, si on considère γ^1 et γ^2 deux représentations normales non dégénérées de M^1 et M^2 respectivement dans des espaces hilbertiens K^1 et K^2, N se représente dans K^1 et dans K^2 par $\gamma^1 \circ \pi^1$ et $\gamma^2 \circ \pi^2$ respectivement, et on a:

1.2.2. THÉORÈME. ([14], 1.2.4) (i) *Il existe une unique représentation, notée $\gamma^1_{\pi^1} \star {}_{\pi^2}\gamma^2$, de $M^1_{\pi^1} \star {}_{\pi^2}M^2$ dans $\mathcal{L}(K^1_{\gamma^1\circ\pi^1} \underset{\tau}{\otimes}{}_{\gamma^2\circ\pi^2}K^2)$ telle que pour tout T_1 dans $\mathcal{L}_{\mathrm{Id},\gamma_1}(L^1,K^1)$, tout T_2 dans $\mathcal{L}_{\mathrm{Id},\gamma_2}(L^2,K^2)$, et tout Z dans $M^1_{\pi^1} \star {}_{\pi^2}M^2$:*

$$(T_1 \underset{\tau}{\otimes} T_2)Z = (\gamma^1_{\pi^1} \star {}_{\pi^2}\gamma^2)(Z)(T_1 \underset{\tau}{\otimes} T_2).$$

(ii) *On a:*

$$(\gamma^1_{\pi^1} \star {}_{\pi^2}\gamma^2)(M^1_{\pi^1} \star {}_{\pi^2}M^2) = \gamma^1(M^1)_{\gamma^1\circ\pi^1} \star {}_{\gamma^2\circ\pi^2}\gamma^2(M^2).$$

(iii) *Si γ_1 et γ_2 sont fidèles alors $\gamma^1_{\pi^1} \star_{\pi^2}\gamma^2$ aussi.*

1.2.3. COROLLAIRE. *Soient x et y deux opérateurs respectivement dans $\mathcal{L}_{\pi^1(N)}(L^1)$ et $\mathcal{L}_{\pi^2(N)}(L^2)$ tels que l'opérateur $x_{\pi^1} \otimes_{\pi^2} y$ appartient à $M^1_{\pi^1} \star_{\pi^2} M^2$, alors on a:*

$$\gamma^1_{\pi^1} \star_{\pi^2}\gamma^2(x_{\pi^1} \otimes_{\pi^2} y) = \gamma^1(x)_{\gamma^1\circ\pi^1} \otimes_{\gamma^2\circ\pi^2}\gamma^2(y).$$

Démonstration. L'égalité de 1.2.2 (i) est vérifiée par les deux opérateurs $\gamma^1_{\pi^1} \star_{\pi^2}\gamma^2(x_{\pi^1} \otimes_{\pi^2} y)$ et $\gamma^1(x)_{\gamma^1\circ\pi^1} \otimes_{\gamma^2\circ\pi^2}\gamma^2(y)$; comme les vecteurs $T_1 \underset{\tau}{\otimes} T_2(\xi)$ engendrent $K^1_{\pi^1} \underset{\tau}{\otimes}_{\pi^2} K^2$ si T_1, T_2, ξ décrivent $\mathcal{L}_{\mathrm{Id},\gamma_1}(L^1, K^1)$, $\mathcal{L}_{\mathrm{Id},\gamma_2}(L^2, K^2)$ et $L^1_{\pi^1} \underset{\tau}{\otimes}_{\pi^2} L^2$ respectivement, on en déduit le corollaire 1.2.3. ∎

1.2.4. REMARQUE. Le théorème 1.2.2 s'étend naturellement au cas où γ_1 et γ_2 sont deux antireprésentations.

D'après [13], proposition III.4, si ω et ω' sont des éléments positifs des préduaux M^1_* et M^2_* de M^1 et M^2 respectivement, la condition:

$$\tau\left(\frac{\mathrm{d}(\omega\circ\pi^1)}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}(\omega'\circ\pi^2)}{\mathrm{d}\tau}\right) < \infty$$

permet de définir un élément positif de $(M^1_{\pi^1}\star_{\pi^2} M^2)_*$, noté $\omega_{\pi^1} \underset{\tau}{\star}_{\pi^2}\omega'$. De manière plus générale, si φ^1 et φ^2 sont des poids normaux semi-finis respectivement sur M^1 et M^2 tels que φ^2 soit un N-poids ([13], definition III.10, p. 41) c'est-à-dire tel que, pour tout élément positif x de M^2 et tout unitaire u de N, on a:

$$\varphi^2(\pi^2(u)x\pi^2(u^*)) = \varphi^2(x)$$

alors on peut construire un poids normal sur $M^1_{\pi^1}\star_{\pi^2} M^2$ noté $\varphi^1_{\pi^1} \underset{\tau}{\star}_{\pi^2}\varphi^2$, qui est fidèle si φ^1 et φ^2 le sont. Avec les notations qui précèdent, on a:

1.2.5. LEMME. ([13]) *Soit $(\varphi^2_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille filtrante croissante d'éléments positifs de M^2_* de borne supérieure φ^2, et soit φ^1 une forme linéaire positive de M^1_* telle que $\frac{\mathrm{d}(\varphi^1\circ\pi^1)}{\mathrm{d}\tau}$ est borné. Si φ^2_0 est un élément positif de M^2_* tel que:*

$$\varphi^2_0 \leqslant \varphi^2,$$

alors on a:

$$\varphi^1_{\pi^1} \underset{\tau}{\star}_{\pi^2}\varphi^2_0 \leqslant \sup_{\alpha\in I}\varphi^1_{\pi^1} \underset{\tau}{\star}_{\pi^2}\varphi^2_\alpha$$

$$\varphi^1_{\pi^1} \underset{\tau}{\star}_{\pi^2}\varphi^2 = \sup_{\alpha\in I}\varphi^1_{\pi^1} \underset{\tau}{\star}_{\pi^2}\varphi^2_\alpha.$$

Démonstration. L'inégalité est une conséquence de [13], p. 43, l'égalité en découle d'après la définition de $\varphi^1_{\pi^1} \underset{\tau}{\star}_{\pi^2}\varphi^2$. ∎

Si P_2 est un poids opératoriel de M^2 dans $\pi^2(N)$, on montre que le poids $\varphi^1_{\pi^1} \underset{\tau}{\star} (\tau \circ (\pi^2)^{-1} \circ P_2)$ est indépendant de τ et on le note:

$$\varphi^1_{\pi^1} \star_{\pi^2} P_2.$$

On déduit alors du lemme 1.2.5 le résultat suivant:

1.2.6. PROPOSITION. *Avec les notations qui précèdent, pour tout élément positif x dans $M^1_{\pi^1} \star_{\pi^2} M^2$, l'application:*

$$\omega \longmapsto \omega_{\pi^1} \star_{\pi^2} P_2(x)$$

est dans l'extension positive $\widehat{M^1_*}$ de M^1 au sens de [5].

Démonstration. Pour limiter la lourdeur des notations, nous ne ferons pas apparaitre les représentations π_1 et π_2 dans les produits fibrés qui vont suivre. Soient ω et ω' deux éléments positifs M^1_*, soit x un élément positif de $M^1_{\pi^1} \star_{\pi^2} M^2$, soit τ' une trace n.s.f.f. sur N telle que $\frac{\mathrm{d}((\omega+\omega')\circ\pi^1)}{\mathrm{d}\tau'}$ est borné, alors $\frac{\mathrm{d}(\omega\circ\pi^1)}{\mathrm{d}\tau'}$ et $\frac{\mathrm{d}(\omega'\circ\pi^1)}{\mathrm{d}\tau'}$ le sont aussi. En posant $\nu' = \tau' \circ (\pi^2)^{-1} \circ P_2$, on a:

$$(\omega + \omega') \star P_2 = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant \nu' \\ \varphi \in M^2_*}} (\omega + \omega') \underset{\tau'}{\star} \varphi.$$

On en tire facilement l'inégalité:

$$(\omega + \omega') \star P_2(x) \leqslant \omega \star P_2(x) + \omega' \star P_2(x).$$

Réciproquement, on peut supposer que $(\omega + \omega') \star P_2(x)$ est fini, ce qui entraine que $\omega \star P_2(x)$ et $\omega' \star P_2(x)$ aussi. Soit $(\nu^\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante croissante dans M^2_* convergeant vers ν'. Pour tout réel ε strictement positif, soit α_0 et β_0 dans I tels que pour tous α, β supérieurs respectivement à α_0 et β_0 on a:

$$\omega \star P_2(x) \leqslant \omega \underset{\tau'}{\star} \nu^\alpha(x) + \varepsilon$$

$$\omega' \star P_2(x) \leqslant \omega' \underset{\tau'}{\star} \nu^\beta(x) + \varepsilon.$$

Soit γ_0 dans I supérieur à la fois à α_0 et β_0; d'après le lemme 1.2.5, pour tout γ plus grand que γ_0, on peut écrire que:

$$\begin{aligned} \omega \star P_2(x) + \omega' \star P_2(x) &\leqslant \omega \underset{\tau'}{\star} \nu^\gamma(x) + \omega' \underset{\tau'}{\star} \nu^\gamma(x) + 4\varepsilon \\ &\leqslant (\omega + \omega') \underset{\tau'}{\star} \nu^\gamma(x) + 4\varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité:

$$\omega \star P_2(x) + \omega' \star P_2(x) = (\omega + \omega') \star P_2(x).$$

Soit à présent, $(\omega_j)_{j\in J}$ une famille croissante d'éléments positifs de M_*^1 convergeant vers ω. On a clairement pour tout j dans J:

$$\omega_j \star P_2(x) \leqslant \omega \star P_2(x).$$

Réciproquement, soit ε un réel strictement positif et α_0 dans J tel que pour tout α dans I supérieur ou égal à α_0 on a:

$$\omega \star P_2(x) \leqslant \omega \underset{T'}{\star} \nu^\alpha(x) + \varepsilon.$$

Soit j_0 dans J tel que pour tout j dans J supérieur ou égal à j_0:

$$\sup_{k\in J} \omega_k \underset{T'}{\star} \nu^\alpha(x) \leqslant \omega_j \underset{T'}{\star} \nu^\alpha(x) + \varepsilon.$$

On en déduit d'après le lemme 1.2.5 que:

$$\begin{aligned}\omega \star P_2(x) &\leqslant \omega \underset{T'}{\star} \nu^\alpha(x) + \varepsilon\\ &\leqslant \sup_{k\in J} \omega_k \underset{T'}{\star} \nu^\alpha(x) + \varepsilon\\ &\leqslant \omega_j \underset{T'}{\star} \nu^\alpha(x) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

La proposition en découle. ∎

2. BIMODULES DE HOPF ET POIDS OPÉRATORIELS DE HAAR

2.1. BIMODULES DE VON NEUMANN

2.1.1. DÉFINITION. On appelle *bimodule de von Neumann* sur N, tout triplet (M, s, r) où M est une algèbre de von Neumann, et où s et r sont deux représentations normales, préservant l'unité, de N dans M, telles que, pour tous n, n' dans N, on a:

$$s(n)r(n') = r(n')s(n).$$

2.1.2. REMARQUE. La condition ci-dessus est moins contraignante que celle de [10] qui exige que s et r soient à valeurs dans le centre de M ce qui exclurait, même en dimension finie, les "duaux" de groupoïdes (voir cas symétrique).

Dans les conditions de la définition 2.1.1, M est de deux manières un N-module à gauche, de deux manières un N-module à droite, et de quatre manières un N-N-bimodule. On notera ces structures: ${}_sM$, ${}_rM$, M_s, M_r, ${}_sM_s$, ${}_sM_r$, ${}_rM_s$, ${}_rM_r$; par exemple les structures ${}_sM$ et ${}_sM_r$ sont données pour tous n, n' dans N et m dans M par:

$$n \underset{s}{\cdot} m = s(n)m$$

$$n \underset{s}{\cdot} m \underset{r}{\cdot} n' = s(n)mr(n').$$

Si H est un espace hilbertien dans lequel M opère, H est un N-N-bimodule de trois manières; on note ces structures ${}_sH_s$, ${}_rH_r$, ${}_sH_r(= {}_rH_s)$.

Par exemple la structure ${}_sH_r$ est donnée, pour tous n,n' de N et tout ξ de H par:

$$n \underset{s}{\cdot} \xi \underset{r}{\cdot} n' = s(n)r(n')\xi.$$

Ainsi, on peut définir quatre produits tensoriels hilbertiens de H par H au dessus de N: $H_s \underset{\tau}{\otimes} {}_sH$, $H_s \underset{\tau}{\otimes} {}_rH$, $H_r \underset{\tau}{\otimes} {}_sH$, $H_r \underset{\tau}{\otimes} {}_rH$. Comme N est commutative, on a, dans $\mathcal{L}(H_s \underset{\tau}{\otimes} {}_rH)$ la relation: $s(n)_s \otimes {}_r\mathbf{1} = \mathbf{1}_s \otimes {}_rr(n)$. Du fait de la commutation de s et r, les opérateurs $\mathbf{1}_s \otimes {}_rs(n)$, $r(n)_s \otimes {}_r\mathbf{1}$ et $r(n)_s \otimes {}_rs(n)$ ont un sens dans $\mathcal{L}(H_s \underset{\tau}{\otimes} {}_rH)$ donc dans $M_s \star {}_rM$. L'espace hilbertien $H_s \underset{\tau}{\otimes} {}_rH$ et l'algèbre de von Neumann $M_s \star_r M$ deviennent des N-N-bimodules notés respectivement ${}_r(H_s \underset{\tau}{\otimes} {}_rH)_s$ et ${}_r(M_s \star_r M)_s$ en posant pour tous ξ dans $H_s \underset{\tau}{\otimes} {}_rH$, tout x dans $M_s \star_r M$, et tous n, n' dans N:

$$n \underset{r}{\cdot} \xi \underset{s}{\cdot} n' = (r(n)_s \otimes {}_rs(n'))\xi$$

$$n \underset{r}{\cdot} x \underset{s}{\cdot} n' = (r(n)_s \otimes {}_r\mathbf{1})x(\mathbf{1}_s \otimes {}_rs(n')).$$

2.1.3. LEMME. (cf. [20], p. 10) *Les espaces hilbertiens* $(H_s \underset{\tau}{\otimes} {}_rH)_s \underset{\tau}{\otimes} {}_rH$ *et* $H_s \underset{\tau}{\otimes} {}_r(H_s \underset{\tau}{\otimes} {}_rH)$ *sont canoniquement isomorphes et isométriques, ce qui induit un isomorphisme entre les algèbres de von Neumann* $(M_s \star_r M)_s \star_r M$ *et* $M_s \star_r (M_s \star_r M)$.

Démonstration. Soient ξ_1 dans $\mathcal{D}(H_s, \tau)$, ξ_2 dans $\mathcal{D}({}_rH, \tau)$ et h dans H.

Calculons la norme de $\xi_1 \otimes (h \underset{T}{\otimes} \xi_2)$ dans $H_s \underset{T}{\otimes} {}_r(H_s \underset{T}{\otimes} {}_rH)$:

$$\begin{aligned}
\langle \xi_1 \underset{T}{\otimes} (h \underset{T}{\otimes} \xi_2), \xi_1 \underset{T}{\otimes} (h \underset{T}{\otimes} \xi_2)\rangle &= \langle \langle \xi_1, \xi_1\rangle_{T^o} \underset{r}{\cdot} (h \underset{T}{\otimes} \xi_2), h \underset{T}{\otimes} \xi_2\rangle \\
&= \langle [r(\langle \xi_1, \xi_1\rangle_{T^o})h] \underset{T}{\otimes} \xi_2, h \underset{T}{\otimes} \xi_2\rangle \\
&= \langle s(\langle \xi_2, \xi_2\rangle_T) r(\langle \xi_1, \xi_1\rangle_{T^o})h, h\rangle \\
&= \langle r(\langle \xi_1, \xi_1\rangle_{T^o}) s(\langle \xi_2, \xi_2\rangle_T)h, h\rangle \\
&= \langle \xi_1 \underset{T}{\otimes} [s(\langle \xi_2, \xi_2\rangle_T)h], \xi_1 \underset{T}{\otimes} h\rangle \\
&= \langle (\xi_1 \underset{T}{\otimes} h) \underset{s}{\cdot} \langle \xi_2, \xi_2\rangle_T, \xi_1 \underset{T}{\otimes} h\rangle \\
&= \langle (\xi_1 \underset{T}{\otimes} h) \underset{T}{\otimes} \xi_2, (\xi_1 \underset{T}{\otimes} h) \underset{T}{\otimes} \xi_2\rangle.
\end{aligned}$$

Ce dernier produit scalaire étant à prendre dans $(H_s \underset{T}{\otimes} {}_rH)_s \underset{T}{\otimes} {}_rH$, on en déduit, d'après [15] (remarque 2.2), un isomorphisme isométrique entre $(H_s \underset{T}{\otimes} {}_rH)_s \underset{T}{\otimes} {}_rH$ et $H_s \underset{T}{\otimes} {}_r(H_s \underset{T}{\otimes} {}_rH)$; il est clair que cet isomorphisme échange $(\mathcal{L}_M(H) \underset{T}{\otimes} \mathcal{L}_M(H)) \underset{T}{\otimes} \mathcal{L}_M(H)$ et $\mathcal{L}_M(H) \underset{T}{\otimes} (\mathcal{L}_M(H) \underset{T}{\otimes} \mathcal{L}_M(H))$. On en déduit la fin du lemme en passant aux commutants. ∎

2.1.4. REMARQUE. En vertu du lemme 2.1.3 on peut donc écrire sans parenthèses les deux espaces: $H_s \underset{T}{\otimes} {}_rH_s \underset{T}{\otimes} {}_rH$ et $M_s \star_r M_s \star_r M$.

2.1.5. NOTATIONS. (i) Soit Σ la reflexion de $H_s \underset{T}{\otimes} {}_rH$ vers $H_r \underset{T}{\otimes} {}_sH$, telle que, pour tous ξ_1, ξ_2 respectivement dans $\mathcal{D}(H, s)$ et $\mathcal{D}(H, r)$, on a:

$$\Sigma(\xi_1 \underset{T}{\otimes} \xi_2) = \xi_2 \underset{T}{\otimes} \xi_1.$$

On note alors $\varsigma_{(s,r)}$ l'isomorphisme de $M_s \star_r M$ sur $M_r \star_s M$ défini, pour tout x de $M_s \star_r M$, par:

$$\varsigma_{(s,r)}(x) = \Sigma x \Sigma^*.$$

(ii) Si ξ est un vecteur de H, on note ω_ξ la forme linéaire de M_*^+ définie pour tout x de M par:

$$\omega_\xi(x) = \langle x\xi, \xi\rangle.$$

2.2. BIMODULES DE HOPF ET POIDS OPÉRATORIELS DE HAAR

2.2.1. DÉFINITION. (i) Soit (M, s, r) un bimodule de von Neumann, on appelle *coproduit* de (M, s, r) tout homomorphisme normal injectif Γ de M vers $M_s \star_r M$ qui vérifie pour tout n dans N:

(a) $$\Gamma(r(n)) = r(n)_s \otimes_r \mathbf{1};$$

(b) $$\Gamma(s(n)) = \mathbf{1}_s \otimes_r s(n);$$

(c) $$(\Gamma_s \star_r \mathrm{Id}) \circ \Gamma = (\mathrm{Id}_s \star_r \Gamma) \circ \Gamma;$$

on dit alors que le quadruplet (M, s, r, Γ) est un *bimodule de Hopf.*

(ii) On dit qu'un bimodule de Hopf est *commutatif* si M est commutative.

(iii) On dit qu'un bimodule de Hopf est *symétrique* ou *co-commutatif* si l'on a:

$$s = r$$

$$\varsigma_{(r,r)} \circ \Gamma = \Gamma.$$

(iv) Si (M, s, r, Γ) est un bimodule de Hopf, on appelle *co-involution* de (M, s, r, Γ) tout anti-automorphisme involutif j, de M, tel que:

$$j \circ s = r$$

$$(j_s \star_r j) \circ \Gamma = \varsigma_{(s,r)} \circ \Gamma \circ j.$$

On dit alors que (M, s, r, Γ, j) est un bimodule de Hopf co-involutif.

2.2.2. REMARQUE. (i) Les définition 2.2.1 (i) et 2.2.1 (ii) expriment que Γ est un morphisme de N-N-bimodules de ${}_rM_s$ dans ${}_r(M_s \star_r M)_s$ et donnent, d'après le lemme 2.1.3, un sens à la définition 2.2.1 (iii). De même, la première égalité de définition 2.2.1 (iv) exprime que j est un morphisme de N-modules de M_s vers M_r, l'application $j_s \star_r j$ est donc à valeurs dans $M_r \star_s M$ ce qui donne un sens à la deuxième égalité de la définition 2.2.1 (iv).

(ii) La définition du coproduit donnée ici diffère de celle de [21] par l'algèbre d'arrivée et le fait que l'on a $\Gamma(1) = 1$.

(iii) D'après les paragraphes 1.1 et 1.2, les définitions de 2.2.1 sont indépendantes de la trace τ n.s.f.f. sur N.

2.2.3. DÉFINITION. (i) Soit (M, s, r, Γ) un bimodule de Hopf sur N, on dit qu'un poids opératoriel n.s.f.f. P de M dans $r(N)$ est un *poids opératoriel de Haar* pour (M, s, r, Γ) si pour tout ω dans M_*^+, et pour tous x, y dans $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$ on a:

$$(\omega_s \star_r P)\Gamma = \omega \circ P.$$

(ii) Si de plus j est une co-involution de (M, s, r, Γ), on dit que τ est compatible avec (M, s, r, Γ, j, P) si, en outre, on a pour tout t dans $\mathbf{R}$:

$$j \circ \sigma_{-t}^{\tau \circ P} = \sigma_t^{\tau \circ P} \circ j.$$

(iii) On définit naturellement *les morphismes* de ces differentes *classes d'algèbres* qui sont donc des catégories.

2.2.4. REMARQUE. La catégorie sous-jacente à la définition 2.2.3 (i) contient les algèbres de Kac définies par M. Enock, J.M. Schwartz, G. Kac, L. Vainermann et les groupes "quantiques" au sens des théories developpées par S.L. Woronowicz, S. Baaj et G. Skandalis; ces algèbres correspondent à la situation où l'algèbre N est réduite au corps des complexes. Nous allons maintenant montrer que ces catégories englobent également les groupoïdes localement compacts munis d'un système de Haar ainsi que leurs "duaux".

3. EXEMPLES FONDAMENTAUX ASSOCIÉS AUX GROUPOÏDES

3.1. NOTATIONS. Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations et définitions de la théorie des groupoïdes données dans [12] par J. Renault.

Soit G un groupoïde topologique localement compact muni d'un système de Haar $\{\lambda^u \mid u \in G^0\}$; on note μ une mesure quasi-invariante sur G^0, ν la mesure sur G associée, ν^{-1} la mesure image de ν par l'application $(z \mapsto z^{-1})$ et δ la dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à ν^{-1}. On peut donc définir les involutions isométriques fondamentales J, $\widehat{J}$ et j_G de $L^2(G, \nu)$ et $L^\infty(G, \nu)$ en notant pour tous f dans $L^2(G, \nu)$, g dans $L^\infty(G, \nu)$ et ν-presque tout x dans G:

$$J(f)(x) = \overline{f}(x)$$

$$\widehat{J}(f)(x) = \delta^{-\frac{1}{2}}(x)\overline{f}(x^{-1})$$

$$j_G(g)(x) = g(x^{-1}).$$

En particulier on a:

$$\omega_f \circ j_G = \omega_{\widehat{J}f}.$$

L'algèbre $\mathcal{K}(G)$ des fonctions sur G à support compact a deux structures d'algèbre involutive et permet, grace à Λ_ν, de définir deux algèbres hilbertiennes à gauche dans $L^2(G, \nu)$.

Le produit et l'involution dans le premier cas sont donnés, pour tous f et g dans $\mathcal{K}(G)$ et tout x dans G, par:

$$fg(x) = f(x)g(x)$$

$$f^*(x) = \overline{f}(x).$$

Dans le deuxième cas ils sont définis par:

$$f \star g(x) = \int_G f(s)g(s^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda^{r(x)}(s)$$

$$f^\sharp(x) = \delta(x^{-1})\overline{f}(x^{-1}).$$

Les algèbres de von Neumann de leur représentation de Gelfand-Segal s'identifient à $L^\infty(G,\nu)$ opérant par multiplication dans $L^2(G,\nu)$ pour la première, et à l'algèbre $\mathcal{L}(G)$, de la représentation régulière gauche de G, notée L, opérant par convolution (cf. [12]). Ces deux algèbres sont en position standard dans $L^2(G,\nu)$. Le commutant $\widehat{J}\mathcal{L}(G)\widehat{J}$ de $\mathcal{L}(G)$ dans $L^2(G,\nu)$ est égal à l'algèbre $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ de la représentation régulière droite, notée R, de G; plus précisément, si f est dans $K(G)$, on a:

$$\widehat{J}L(f)\widehat{J} = R(\delta^{\frac{1}{2}}f^\sharp).$$

Les algèbres $L^\infty(G,\nu)$ et $\mathcal{L}(G)$ sont deux exemples fondamentaux de bimodules de Hopf co-involutifs sur $L^\infty(G^0,\mu)$; elles sont munies d'un poids opératoriel invariant à gauche. On prendra pour H l'espace hilbertien $L^2(G,\nu)$. Les applications s et r (source et but) permettent de définir deux représentations notées s_G et r_G de $L^\infty(G^0,\mu)$ vers $L^\infty(G,\nu)$ en posant pour tout f de $L^\infty(G^0,\mu)$ et pour ν-presque tout x de G:

$$[r_G(f)](x) = f(xx^{-1})$$

$$[s_G(f)](x) = f(x^{-1}x).$$

Il est alors clair que $(L^\infty(G,\nu), s_G, r_G)$ est une N-algèbre de von Neumann.

On définit deux fonctions λ et λ', de $L^1(G,\nu)$ dans $L^1(G^0,\mu)$, en posant pour tous f dans $L^1(G,\nu)$ et μ-presque tout u dans G^0:

$$\lambda(f)(u) = \int_G f(x)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)$$

$$\lambda'(f)(u) = \int_G f(x^{-1})\delta(x^{-1})\,\mathrm{d}\lambda^u(x).$$

Pour tous i,j dans $\{s,r\}$ on note:

$$G^2_{i,j} = \{(x,y) \mid (x,y) \in G^2,\, i(x) = j(y)\}.$$

On définit une mesure positive $\nu^2_{i,j}$ sur $G^2_{i,j}$ en posant pour tous f, g, h, k respectivement dans $\mathcal{K}(G^2_{r,r})$, $\mathcal{K}(G^2_{s,r})$, $\mathcal{K}(G^2_{r,s})$ et $\mathcal{K}(G^2_{s,s})$:

$$\nu^2_{r,r}(f) = \int_{G^0} \iint_{G^2_{r,r}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\lambda^u(y)\,\mathrm{d}\mu(u)$$

$$\nu^2_{s,r}(g) = \int_{G^0} \iint_{G^2_{s,r}} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^{s(x)}(y)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u)$$

$$\nu^2_{r,s}(h) = \int_{G^0} \iint_{G^2_{r,s}} h(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^{s(y)}(x)\,\mathrm{d}\lambda^u(y)\,\mathrm{d}\mu(u)$$

$$\nu^2_{s,s}(k) = \int_{G^0} \iint_{G^2_{r,r}} k(x^{-1},y^{-1})\delta(x^{-1})\delta(y^{-1})\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\lambda^u(y)\,\mathrm{d}\mu(u).$$

On note $G^{(3)}$ l'ensemble des triplets (x,y,z) où (x,y) et (y,z) sont dans $G^2_{s,r}$ et ν^3 la mesure sur $G^{(3)}$ définie pour tout f dans $\mathcal{K}(G^{(3)})$ par:

$$\nu^3(f) = \int_{G^0} \iiint_{G^{(3)}} f(x,y,z))\,\mathrm{d}\lambda^{s(y)}(z)\,\mathrm{d}\lambda^{s(x)}(y)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u).$$

3.2. Cas commutatif

3.2.1. Lemme. *Avec les notations qui précèdent, on a l'inclusion:*

$$\mathcal{K}(G) \subset \mathcal{D}((L^2(G,\nu)_s,\mu) \cap \mathcal{D}((L^2(G,\nu)_r,\mu).$$

Démonstration. Soit f dans $\mathcal{K}(G)$; si on note $\mathrm{supp}(f)$ son support, on a:

$$\mathrm{supp}(\lambda(f)) \subset (\mathrm{supp}(f)) \cdot (\mathrm{supp}(f))^{-1}$$

$$\mathrm{supp}(\lambda'(f)) \subset (\mathrm{supp}(f))^{-1} \cdot (\mathrm{supp}(f)).$$

On en déduit le lemme d'après [20] (2.1). ∎

3.2.2. Lemme. (cf. [20], (2.1), (2.2)) (i) *Pour tous éléments i, j dans $\{s, r\}$, les espaces hilbertiens $L^2(G,\nu)_i \underset{\mu}{\otimes}{}_j L^2(G,\nu)$ et $L^2(G^2_{i,j},\nu^2_{i,j})$ sont canoniquement isomorphes isométriques, les algèbres de von Neumann $L^\infty(G,\nu)_i \star_j L^\infty(G,\nu)$ et $L^\infty(G^2_{i,j},\nu^2_{i,j})$ s'identifient.*

(ii) *Les espaces hilbertiens $L^2(G,\nu)_s \underset{\mu}{\otimes}{}_r L^2(G,\nu)_s \underset{\mu}{\otimes}{}_r L^2(G,\nu)$ et $L^2(G^{(3)},\nu^3)$ sont canoniquement isomorphes et isométriques ce qui permet d'identifier $L^\infty(G,\nu)_r \star_r L^\infty(G,\nu)_s \star_r L^\infty(G,\nu)$ et $L^\infty(G^{(3)},\nu^3)$.*

Démonstration. (i) Les quatre premiers isomorphismes proviennent de [20], (2.1) et (2.2), ils permettent d'identifier les algèbres $L^\infty(G,\nu) \underset{\mu}{\otimes} L^\infty(G,\nu)$ et $L^\infty(G^2_{i,j},\nu^2_{i,j})$; en passant aux commutants, $L^\infty(G,\nu)_i \star_j L^\infty(G,\nu)$ s'identifie aussi à $L^\infty(G^2_{i,j},\nu^2_{i,j})$.

(ii) D'après [15], (2.2) et (2.3) et le lemme 3.2.1, l'ensemble des $f_1 \underset{\mu}{\otimes} h \underset{\mu}{\otimes} f_2$, où f_1 et f_2 parcourent $\mathcal{K}(G)$ et h parcourt $L^2(G,\nu)$, engendre un sous-espace vectoriel dense de $L^2(G,\nu)_s \underset{\mu}{\otimes} {}_r L^2(G,\nu)_s \underset{\mu}{\otimes} {}_r L^2(G,\nu)$; or, d'après le lemme 2.1.3, si f_1', f_2' sont dans $\mathcal{K}(G)$ et h' dans $\mathrm{L}^2(G,\nu)$ on a:

$$\begin{aligned}
&\langle f_1 \underset{\mu}{\otimes} h \underset{\mu}{\otimes} f_2, f_1' \underset{\mu}{\otimes} h' \underset{\mu}{\otimes} f_2'\rangle \\
&= \langle (f_1 \underset{\mu}{\otimes} h) \underset{\mu}{\otimes}, f_2, (f_1' \underset{\mu}{\otimes} h') \underset{\mu}{\otimes}, f_2'\rangle \\
&= \langle f_1 \underset{\mu}{\otimes} s(\langle f_2, f_2'\rangle_\mu)h, f_1' \underset{\mu}{\otimes} h'\rangle \\
&= \int_{G^0} \iint_{G^2} f_1\overline{f_1'}(x)\langle f_2, f_2'\rangle_\mu(y^{-1}y)h\overline{h'}(y)\,\mathrm{d}\lambda^{s(x)}(y)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u) \\
&= \int_{G^0} \iint_{G^2} f_1\overline{f_1'}(x) \int_G f_2\overline{f_2'}(z)\,\mathrm{d}\lambda^{s(y)}(z) h\overline{h'}(y)\,\mathrm{d}\lambda^{s(x)}(y)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u) \\
&= \int_{G^0} \iiint_{G^{(3)}} f_1\overline{f_1'}(x)h\overline{h'}(y)f_2\overline{f_2'}(z)\,\mathrm{d}\lambda^{s(y)}(z)\,\mathrm{d}\lambda^{s(x)}(y)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u).
\end{aligned}$$

On en déduit que $L^2(G,\nu)_s \underset{\mu}{\otimes} {}_r L^2(G,\nu)_s \underset{\mu}{\otimes} {}_r L^2(G,\nu)$ et $L^2(G^{(3)},\nu^3)$ sont isomorphes; la fin de (ii) se démontre comme celle de (i). ∎

3.2.3. THÉORÈME. *En posant pour tous ξ dans $L^2(G^2_{r,r},\nu^2_{r,r})$, $\nu^2_{s,r}$-presque tout (x,y) dans $G^2_{s,r}$ et f dans $L^\infty(G,\nu)$:*

$$W_G\xi(x,y) = \xi(x,xy)$$

$$\Gamma_G(f) = W_G(1_r \otimes_r f)W_G^*,$$

on définit un isomorphisme isométrique W_G de $H_r \underset{\mu}{\otimes} {}_r H$ sur $H_s \underset{\mu}{\otimes} {}_r H$ qu'on appellera isométrie fondamentale de G et tel que le quintuplet $(L^\infty(G,\nu), s_G, r_G, \Gamma_G, j_G,)$ est un bimodule de Hopf sur $L^\infty(G^0,\mu)$, commutatif et co-involutif.

Démonstration. D'après [20], (2.3), W_G est un unitaire et on a pour tout ξ dans $L^2(G^2_{s,r},\nu^2_{s,r})$ et $\nu^2_{s,r}$-presque tout (x,y) dans $G^2_{r,r}$:

$$W_G^*(\xi)(x,y) = \xi(x,x^{-1}y)$$

Un calcul élémentaire prouve que pour tous f dans $\mathcal{K}(G)$, $\nu^2_{s,r}$-presque tout (z,t) dans $G^2_{s,r}$, et ξ dans $L^2(G^2_{s,r},\nu^2_{s,r})$ l'égalité suivante est vraie:

$$(\Gamma_G(f))\xi(z,t) = f(zt)\xi(z,t).$$

Ceci entraîne, d'après 3.2.2 (i) et (ii), que Γ_G est à valeurs dans $L^\infty(G,\nu)_s \star {}_rL^\infty(G,\nu)$ et $(\Gamma_G)_s \star_r i$ dans $\mathcal{L}(L^2(G^{(3)}),\nu^3)$. Plus précisément, d'après 1.2.3, pour tous g, h dans $\mathcal{K}(G)$, et ν^3-presque tout (x,y,z) dans $G^{(3)}$ on a:

$$[(\Gamma_G)_s \star_r i](f_s \otimes_r g)(x,y,z) = \Gamma_G(f)_s \otimes_r g(x,y,z) = f(xy)g(z).$$

Par linéarité et continuité on en déduit, pour tout ψ dans $L^\infty(G^2_{s,r},\nu^2_{s,r})$ et ν^3-presque tout (x,y,z) dans $G^{(3)}$, que:

$$[(\Gamma_G)_s \star_r i](\psi)(x,y,z) = \psi(xy,z).$$

Ainsi pour tout f dans $L^\infty(G,\nu)$ et ν^3-presque tout (x,y,z) dans $G^{(3)}$ on a:

$$[(\Gamma_G)_s \star_r i](\Gamma_G(f))(x,y,z) = \Gamma_G(f)(xy,z) = f((xy)z).$$

Un calcul analogue prouve l'égalité suivante:

$$[i_s \star_r, (\Gamma_G)](\Gamma_G(f)))(x,y,z) = \Gamma_G(f)(x,yz) = f(x(yz)).$$

La propriété d'associativité de G permet alors d'affirmer que Γ_G est un coproduit.

D'après la définition 2.2.1 et le lemme 3.2.2, l'application $(j_G)_s \star_r (j_G)$ est à valeurs dans $L^\infty(G^2_{r,s},\nu^2_{r,s})$; une démarche similaire à ce qui précède prouve que pour tout ψ dans $L^\infty(G^2_{s,r},\nu^2_{s,r})$ et $\nu^2_{s,r}$-presque tout (x,y) dans $G^2_{r,s}$ on a:

$$[(j_G)_s \star_r (j_G)]\psi(x,y) = \psi(x^{-1},y^{-1}).$$

En utilisant à nouveau le corollaire 1.2.3, on a pour tout ψ dans $L^\infty(G^2_{s,r},\nu^2_{s,r})$ et $\nu^2_{r,s}$-presque tout (x,y) dans $G^2_{r,s}$:

$$\varsigma_{(s,r)}(\psi)(x,y) = \psi(y,x).$$

Donc pour tout f dans $L^\infty(G,\mu)$:

$$\begin{aligned}[(j_G)_s \star_r (j_G)](\Gamma_G(f))(x,y) &= \Gamma_G(f)(x^{-1},y^{-1}) = f(x^{-1}y^{-1}) = f((yx)^{-1})\\ &= (j_G \circ f)(yx) = (\Gamma_G \circ j_G \circ f)(y,x)\\ &= (\varsigma_{(s,r)} \circ \Gamma_G \circ j_G \circ f)(x,y)).\end{aligned}$$

De plus pour tout g dans $L^\infty(G^0,\mu)$, pour ν-presque tout x dans $L^2(G,\nu)$, l'égalité suivante est vraie:

$$(j_G \circ s_G(g))(x) = s_G(g)(x^{-1}) = g(xx^{-1}) = r_G(g)(x).$$

On en déduit que j_G est une co-involution de $(L^\infty(G,\nu), s_G, r_G, \Gamma_G)$. ∎

REMARQUE. Ce dernier théorème est une modeste contribution à l'humble remarque qui suit la définition 3.1 de [20].

3.2.4. LEMME ET DÉFINITION. *Il existe un unique poids opératoriel n.s.f.f., que nous noterons P_G, de $L^\infty(G,\nu)$ dans $r_G(L^\infty(G^0,\mu))$, tel que:*

(i) $\nu = \mu \circ r_G^{-1} \circ P_G$;

(ii) $P_G = r_G \circ \lambda$.

On appellera P_G le *poids de Haar* de $L^\infty(G,\nu)$.

Démonstration. (i) Les mesures ν et $\mu \circ r_G^{-1}$ s'assimilent à des traces; d'après [6], 5.1 il existe un unique poids opératoriel P_G vérifiant (i).

(ii) est une conséquence immédiate de (i). ∎

3.2.5. REMARQUE. En identifiant $L^\infty(G^0,\mu)$ et $r_G(L^\infty(G^0,\mu))$ et en utilisant le même abus de notation que dans [13], on assimilera λ et P_G, et donc ν avec $\mu \circ P_G$.

3.2.6. LEMME. *Pour tous g dans $L^2(G,\nu)$ et ψ dans $L^\infty(G^2,\nu^2_{s,r})^+$ l'égalité suivante est vérifée:*

$$[(\omega_g)_s \star_r (P_G)](\psi) = \int_{G^2_{s,r}} \psi(x,y) g\overline{g}(x)\,\mathrm{d}\nu^2_{s,r}(x,y).$$

Démonstration. D'après [13], III.4 et III.11 on a:

$$(\omega_g)_s \star_r (P_G) = (\omega_g)_r \star_r \nu = \sup_{\substack{h \in \mathcal{K}(G) \\ \|h\|_\infty \leqslant 1}} (\omega_g)_s \star_r (\omega_h).$$

Or si h appartient à $\mathcal{K}(G)$:

$$(\omega_g)_s \star_r (\omega_h)(\psi) = \int_{G^2_{s,r}} \psi(x,y) g\overline{g}(x) h\overline{h}(y)\,\mathrm{d}\nu^2_{s,r}(x,y)$$

le lemme en découle rapidement. ∎

3.2.7. THÉORÈME. *Le quintuplet $(L^\infty(G,\nu), s_G, r_G, \Gamma_G, j_G)$ est un bimodule de Hopf co-involutif et commutatif, P_G est un poids opératoriel de Haar, le poids μ est compatible avec $(L^\infty(G,\nu), s_G, r_G, \Gamma_G, j_G, P_G)$; de plus, pour tous f et f' dans $\mathcal{N}_{P_G}$ et pour tout élément positif ω dans $L^\infty(G,\nu)_*$, on a:*

$$(\omega_s \star_r P_G)(\Gamma_G(\overline{f})(\mathbf{1}_s \otimes_r f')) = [(\omega \circ j_G)_s \star_r P_G]((\mathbf{1}_s \otimes_r \overline{f})\Gamma_G(f')). \tag{3.1}$$

Démonstration. Soient φ dans $L^\infty(G,\nu)$, ω dans $L^\infty(G,\nu)_*^+$ et g dans $L^2(G,\nu)$ tel que $\omega = \omega_g$; d'après le lemme 3.2.6 et la propriété (3.2) d'invariance à gauche du système de Haar $\{\lambda^u \mid u \in G^0\}$ (cf. [12] 2.2 (ii)), on peut écrire que:

$$\begin{aligned}
[(\omega_g)_s \star_r (P_G)](\Gamma_G(\varphi)) &= \int_{G^2_{s,r}} \Gamma_G(\varphi)(x,y) g\overline{g}(x)\,\mathrm{d}\nu^2_{s,r}(x,y)\\
&= \int_{G^2_{s,r}} \varphi(xy) g\overline{g}(x)\,\mathrm{d}\nu^2_{s,r}(x,y)\\
&= \int_{G^0}\int_G g\overline{g}(x)\int_G \varphi(xy)\,\mathrm{d}\lambda^{s(x)}(y)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u) \qquad (3.2)\\
&= \int_{G^0}\int_G g\overline{g}(x)\int_G \varphi(t)\,\mathrm{d}\lambda^{r(x)}(t)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u)\\
&= \int_{G^0}\int_G g\overline{g}(x) P_G(\varphi)(x)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u)\\
&= \omega \circ P_G(\varphi)
\end{aligned}$$

on en déduit que:

$$[(\omega_g)_s \star_r (P_G)] \circ \Gamma_G = \omega \circ P_G.$$

Soient f et f' dans $\mathcal{N}_{P_G}$; d'après le lemme 3.2.6 et (3.2) on sait que:

$$\begin{aligned}
[(\omega_g)_s \star_r (P_G)](\Gamma_G(\overline{f})(\mathbf{1}_s \otimes_r f')) &= \int_{G^2_{s,r}} \overline{f}(xy) f'(y) g\overline{g}(x)\,\mathrm{d}\nu^2_{s,r}(x,y)\\
&= \int_{G^0}\int_G g\overline{g}(x)\int_G \overline{f}(xy) f'(y)\,\mathrm{d}\lambda^{s(x)}(y)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u)\\
&= \int_{G^0}\int_G g\overline{g}(x)\int_G \overline{f}(t) f'(x^{-1}t)\,\mathrm{d}\lambda^{r(x)}(t)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u)\\
&= \int_G g\overline{g}(x^{-1})\delta(x^{-1})\int_G \overline{f}(t) f'(xt)\,\mathrm{d}\lambda^{s(x)}(t)\,\mathrm{d}\nu(x)\\
&= \int_{G^0}\int_G \widehat{J}g\overline{\widehat{J}g}(x)\int_G \overline{f}(t) f'(xt)\,\mathrm{d}\lambda^{s(x)}(t)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u)\\
&= \int_{G^2_{s,r}} \overline{f}(t)\Gamma_G(f')(x,t)\widehat{J}g\overline{\widehat{J}g}(x)\,\mathrm{d}\nu^2_{s,r}(x,t)\\
&= [(\omega_{\widehat{J}g})_s \star_r (P_G)]((\mathbf{1}_s \otimes_r \overline{f})\Gamma_G(\overline{f}'))\\
&= [(\omega_g \circ j_G)_s \star_r (P_G)]((\mathbf{1}_s \otimes_r \overline{f})\Gamma_G(\overline{f}')).
\end{aligned}$$

Le groupe modulaire de ν étant trivial, μ est donc compatible, et on en déduit le théorème. ∎

CAS SYMÉTRIQUE

3.3.1. NOTATIONS. On sait d'après [12] que $r_G(L^\infty(G^0,\mu))$ est incluse dans $\mathcal{L}(\mathcal{G})$; on peut donc assimiler l'application r_G à une représentation de $L^\infty(G^0,\mu)$ dans $\mathcal{L}(G)$, on note $\widehat{s}_G$ et $\widehat{r}_G$ deux copies de celle ci; pour simplifier on n'écrira pas toujours G en indice dans ce paragraphe.

3.3.2. DÉFINITION ET PROPOSITION. ([20], théorème 2.6) *Si on note pour tout x dans $\mathcal{L}(G)$:*

$$\widehat{j}_G(x) = Jx^*J$$

$$\widehat{\Gamma}_G(x) = W_G^*(x_s \otimes {}_r\mathbf{1})W_G$$

alors le quintuplet $(\mathcal{L}(G), \widehat{s}_G, \widehat{r}_G, \widehat{\Gamma}_G, \widehat{j}_G)$ est un bimodule de Hopf symétrique, muni d'une co-involution, et tel que pour tout f dans $\mathcal{K}(G)$, pour tout ξ dans $L^2(G^2_{r,r}, \nu^2_{r,r})$ et tout (x,y) dans $G^2_{r,r}$ on a:

$$\widehat{\Gamma}_G(L(f))\xi(x,y) = \int_G f(s)\xi(s^{-1}x, s^{-1}y)\,\mathrm{d}\lambda^{r(x)}(s).$$

Démonstration. Le fait que $\widehat{\Gamma}_G$ vérifie 2.2.1 (i), (a) et (b) est un calcul de routine et (c) est une reformulation du théorème 2.6 de [20]. Soient f dans $\mathcal{K}(G)$, ξ dans $L^2(G^2_{r,r}, \nu^2_{r,r})$, et (s,t) dans $G^2_{r,r}$; on a:

$$\begin{aligned}
[\varsigma_{(\widehat{r}_G,\widehat{r}_G)} \circ \widehat{\Gamma}_G(L(f))]\xi(s,t) &= [\Sigma\Gamma_G(L(f))\Sigma^*]\xi(s,t) \\
&= [\Gamma_G(L(f))\Sigma^*]\xi(t,s) = [\Gamma_G(L(f))\Sigma^*]\xi(t,s) \\
&= \int_G f(x)\Sigma^*\xi(x^{-1}t, x^{-1}s)\,\mathrm{d}\lambda^{r(s)}(x) \\
&= \int_G f(x)\xi(x^{-1}s, x^{-1}t)\,\mathrm{d}\lambda^{r(s)}(x) = \widehat{\Gamma}_G(L(f))]\xi(s,t).
\end{aligned}$$

On en déduit que $(\mathcal{L}(G), \widehat{s}_G, \widehat{r}_G, \widehat{\Gamma}_G)$ est un bimodule de Hopf symétrique. On peut remarquer que J est dans $\mathcal{L}_{\mathrm{Id},\widehat{j}_G}(L^2(G,\nu), L^2(G,\nu))$, d'après le théorème 1.2.2 et la remarque 1.2.4, pour tout x dans $\mathcal{L}(G)_s \otimes {}_r\mathcal{L}(G)$ l'égalité suivante est donc vraie:

$$\begin{aligned}
(\widehat{j}_G \star \widehat{j}_G)(x) &= [(\widehat{j}_G \star \widehat{j}_G)(x) \cdot J \underset{\mu}{\otimes} J]J \underset{\mu}{\otimes} J \\
&= [(J \underset{\mu}{\otimes} J)x^*]J \underset{\mu}{\otimes} J.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous f dans $\mathcal{K}(G)$, ξ dans $L^2(G^2_{r,r}, \nu^2_{r,r})$, et (s,t) dans $G^2_{r,r}$ on a:

$$\begin{aligned}
[(\widehat{\jmath}_G \star \widehat{\jmath}_G) \circ \widehat{\Gamma}_G(L(f))]\xi(s,t) &= [(J \underset{\mu}{\otimes} J)\widehat{\Gamma}_G(L(f)^*)(J \underset{\mu}{\otimes} J)]\xi(s,t) \\
&= \overline{[\widehat{\Gamma}_G(L(f)^*)(J \underset{\mu}{\otimes} J)]\xi(s,t)} \\
&= \overline{\int_G \overline{f}(x^{-1})\delta(x^{-1})\overline{\xi(x^{-1}s, x^{-1}t)}\, d\lambda^{r(t)}(x)} \\
&= \int_G f(x^{-1})\delta(x^{-1})\xi(x^{-1}s, x^{-1}t)\, d\lambda^{r(t)}(x) \\
&= \widehat{\Gamma}_G \circ \widehat{\jmath}_G(L(f)).
\end{aligned}$$

La fin du théorème en découle. ∎

3.3.3. RAPPEL. D'après 3.1, sur $\mathcal{L}(G)$ il existe un poids canonique, que lui confère la théorie de Tomita, et que nous noterons $\widehat{\nu}$ (voir par exemple [12]).

3.3.4. THÉORÈME. (i) *Il existe un unique poids opératoriel, que nous noterons $\widehat{P}_G$, de $\mathcal{L}(G)$ dans $\widehat{r}_G(L^\infty(G^0, \mu))$ vérifiant:*

$$\widehat{\nu} = \mu \circ \widehat{P}_G;$$

(ii) *Pour tout f dans $\mathcal{K}(G)$ tel que $L(f)$ est positif on a:*

$$\widehat{P}_G(L(f)) = f|G^0.$$

Démonstration. D'après 3.1 le groupe modulaire de $\widehat{\nu}$ s'écrit, pour tout x de $\mathcal{L}(G)$ et tout nombre réel t:

$$\sigma_t^{\widehat{\nu}}(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}$$

où Δ^{it} désigne l'opérateur, dans $L^2(G,\nu)$, de multiplication par la fonction à valeurs complexes $(g \mapsto \delta^{it}(g))$, donc ce groupe modulaire laisse fixe point par point l'algèbre $\widehat{r}_G(L^\infty(G^0, \mu))$; d'après [6], 5.1 il existe un unique poids opératoriel $\widehat{P}_G$ qui vérifie la première égalité, d'oú (i). Soit f dans $\mathcal{K}(G)$ tel que $L(f)$ est positif; d'après la théorie de Tomita, il existe, dans l'algèbre hilbertienne achevée de $\mathcal{K}(G)$ pour la convolution, une fonction h de $L^2(G,\nu)$ telle que:

$$f = h^\sharp \star h.$$

Soit k dans $\mathcal{K}(G^0)$; on a:

$$\int_{G^0} k(u)\widehat{P}_G(L(f))(u)\,\mathrm{d}\mu(u) = \mu(\widehat{P}_G(L(f))k) = \mu\circ\widehat{P}_G(L(h^\sharp\star h)r_G(k)))$$

$$= \widehat{\nu}(L((hr_G(\overline{k}))^\sharp\star h)) = \nu(h\overline{h}r_G(k)) = \mu\circ P_G(h\overline{h}r_G(k))$$

$$= \int_{G^0}\int_G h\overline{h}(x)k(xx^{-1})\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u) = \int_{G^0} k(u)\int_G h\overline{h}(x)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\mu(u)$$

$$= \int_{G^0} k(u)(h^\sharp\star h)(u)\,\mathrm{d}\mu(u) = \int_{G^0} k(u)f(u)\,\mathrm{d}\mu(u).$$

La fin du théorème en découle. ∎

REMARQUE. Le poids $\widehat{P}_G$ est "l'espérance conditionnelle généralisée" définie dans [12].

3.3.5. LEMME. *Pour tout élément positif ω dans $\mathcal{L}(G)_*$ et tout f dans $\mathcal{K}(G)$ on a:*

$$((\omega)_{\hat{s}}\star_{\hat{r}}\widehat{P}_G)(\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp\star f))) = \omega\circ\widehat{P}_G(L(f^\sharp\star f)).$$

Démonstration. Dans ce qui suit et pour simplifier l'écriture, on ne fera pas réference à $\widehat{s}$, $\widehat{r}$ et μ dans les produits fibrés $\star$. Le bimodule de Hopf $(\mathcal{L}(G), \widehat{s}_G, \widehat{r}_G, \widehat{\Gamma}_G)$ étant symétrique, pour tous f, ξ et η dans $\mathcal{K}(G)$, on a:

$$\begin{aligned}(\omega_\xi\star\omega_\eta)(\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp\star f))) &= (\omega_\xi\star\omega_\eta)(\varsigma_{(\hat{s}_G,\hat{r}_G)}\circ\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp\star f)))\\ &= (\omega_{\xi\underset{\mu}{\otimes}\eta})(\varsigma_{(\hat{s}_G,\hat{r}_G)}\circ\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp\star f)))\\ &= (\omega_{\eta\underset{\mu}{\otimes}\xi})(\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp\star f)))\\ &= (\omega_\eta\star\omega_\xi)(\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp\star f))).\end{aligned}$$

De même on peut écrire que:

$$(\omega_\xi\star\omega_\eta)(\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp\star f))) = \omega_{(\xi\underset{\mu}{\otimes}\eta)}(\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp\star f)))$$

$$= \int_{G^2_{r,r}}\int_G (f^\sharp\star f)(s)\xi(s^{-1}x)\eta(s^{-1}y)\,\mathrm{d}\lambda^{r(x)}(s)\overline{\xi}(x)\overline{\eta}(y)\,\mathrm{d}\nu^2{}_{r,r}(x,y)$$

$$= \int_{G^0}\int_G\int_G\int_G (f^\sharp\star f)(s)\xi(s^{-1}x)\eta(s^{-1}y)\,\mathrm{d}\lambda^u(s)\overline{\xi}(x)\overline{\eta}(y)\,\mathrm{d}\lambda^u(x)\,\mathrm{d}\lambda^u(y)\,\mathrm{d}\mu(u)$$

$$= \int_{G^0}\int_G\int_G\left(\int_G (f^\sharp\star f)(s)\xi(s^{-1}x)\eta(s^{-1}y)\,\mathrm{d}\lambda^u(s)\right)\overline{\xi}(x)\,\mathrm{d}\lambda^u(x))\overline{\eta}(y)\,\mathrm{d}\lambda^u(y)\,\mathrm{d}\mu(u)$$

$$= \int_G\left(\int_G\left[f^\sharp\star f(s)\int_G \xi(s^{-1}x)\overline{\xi}(x)\,\mathrm{d}\lambda^{r(s)}(x)\right]\eta(s^{-1}y)\,\mathrm{d}\lambda^{r(y)}(s)\right)\overline{\eta}(y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

En posant pour tout s de G et tout φ dans $\mathcal{K}(G)$:

$$h_\varphi(s) = (f^\sharp \star f)(s) \int_G \varphi(s^{-1}x)\overline{\varphi}(x)\, \mathrm{d}\lambda^{r(s)}(x)$$

on définit ainsi une fonction h_φ de $\mathcal{K}(G)$ et l'on a:

$$(3.3)\qquad (\omega_\xi \star \omega_\eta)(\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp \star f))) = (\omega_\eta \star \omega_\xi)(\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp \star f))) = \omega_\eta(L(h_\xi)).$$

D'après [15], 2.2 (a) on déduit de l'égalité précedente que pour tout ω dans $\mathcal{L}(G)_*^+$:

$$\omega_\xi \star \omega(L(f^\sharp \star f)) = \omega \star \omega_\xi(L(f^\sharp \star f)) = \omega(L(h_\xi)).$$

Ceci entraîne que $L(h_\xi)$ est positif.

Soit $(k_i)_{i\in I}$ une unité approchée de $\mathcal{L}(G)$ incluse dans $\mathcal{K}(G)$ (cf. [12]); alors en posant pour tout i dans I:

$$\eta_i = \delta^{\frac{1}{2}} k_i,$$

on a:

$$R(\eta_i) = \widehat{J} L(k_i) \widehat{J}$$

Cela entraîne que la file $(\omega_{\eta_i})_{i\in I}$ converge faiblement en croissant vers $\widehat{\nu}$. Donc, pour tout ω dans $\mathcal{L}(G)_*^+$ tel que $\omega \leqslant \widehat{\nu}$ et pour tout ξ dans $\mathcal{K}(G)$ on a:

$$\begin{aligned}
(\omega_\xi \circ \widehat{P}_G)(L(f^\sharp \star f)) &= \int_G r_G(f^\sharp \star f | G^0)\xi(x)\overline{\xi}(x)\, \mathrm{d}\nu(x)) \\
&= \int_{G^0} f^\sharp \star f(u) \int_G \xi(x)\overline{\xi}(x)\, \mathrm{d}\lambda^u(x)\, \mathrm{d}\mu(u) \\
&= \mu(h_\xi | G^0) \\
&= \widehat{\nu}(L(h_\xi)) \qquad \text{(car } L(h_\xi) \text{ est positif)} \\
&= \lim_I \omega_{\eta_i}(L(h_\xi)) \\
&= \lim_I \omega_\xi \star \omega_{\eta_i}(\widehat{\Gamma}_G L(f^\sharp \star f)) \qquad \text{(suivant (3.3))} \\
&= (\omega_\xi \star \widehat{\nu})(L(f^\sharp \star f)) \qquad \text{(suivant le lemme 1.2.5)} \\
&= ((\omega_\xi)_{\bar{s}} \star_{\bar{r}} \widehat{P}_G)(\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp \star f))).
\end{aligned}$$

On a donc pour tout ξ dans $\mathcal{K}(G)$:

$$((\omega_\xi)_{\bar{s}} \star_{\bar{r}} \widehat{P}_G)(\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp \star f))) = (\omega_\xi \circ \widehat{P}_G)(L(f^\sharp \star f)).$$

Or les applications:

$$(\omega \mapsto (\omega_{\hat{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G)(\widehat{\Gamma}_G(L(f^\sharp \star f))))$$

et

$$(\omega \mapsto (\omega \circ \widehat{P}_G)(L(f^\sharp \star f)))$$

sont, d'après la proposition 1.2.6, dans l'extension positive $\widehat{\mathcal{L}(G)}_+$ de $\mathcal{L}(G)$ et donc égales pour tout ω_ξ avec ξ dans $\mathcal{K}(G)$; comme la deuxième est dans M, on en déduit leur égalité partout d'après [7], lemma 1.4. ∎

3.3.6. LEMME. *Pour tout z dans $\mathcal{L}(G)_{\hat{s}} \star_{\hat{r}} \mathcal{L}(\mathcal{G})$, tout nombre réel positif t et tout élément positif ω dans $\mathcal{L}(G)_*$ on a:*

(i) $(i_{\hat{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{\sigma_t^\nu})(z) = (\mathbf{1}_{\hat{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{\mathrm{i}t}) z (\mathbf{1}_{\hat{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{-\mathrm{i}t})$;

(ii) $\widehat{\Gamma}_G \widehat{\sigma_t^\nu} = (i_{\hat{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{\sigma_t^\nu}) \widehat{\Gamma}_G$;

(iii) $(\omega_{\hat{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G)(i_{\hat{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{\sigma_t^\nu}) = \omega_{\hat{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G$.

Démonstration. Soient T dans $\mathcal{L}_{\mathrm{Id},\mathrm{Id}}(L^2(G,\nu), L^2(G,\nu))$ $(=\mathcal{L}(G)')$ et T' dans $\mathcal{L}_{\mathrm{Id},\sigma_t^\nu}(L^2(G,\nu), L^2(G,\nu))$; alors pour tout x dans $\mathcal{L}(G)$ on a:

$$(\Delta^{-\mathrm{i}t} T')x = x(\Delta^{-\mathrm{i}t} T')$$

ce qui permet d'affirmer que pour tout z dans $\mathcal{L}(G)_{\hat{s}} \star_{\hat{r}} \mathcal{L}(G)$ l'égalité suivante est vraie:

$$(T_{\hat{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{-\mathrm{i}t} T') z = z (T_{\hat{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{-\mathrm{i}t} T');$$

ceci entraine que:

$$(\mathbf{1}_{\hat{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{\mathrm{i}t}) z (\mathbf{1}_{\hat{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{-\mathrm{i}t})(T_{\hat{s}} \otimes_{\hat{r}} T') = (T_{\hat{s}} \otimes_{\hat{r}} T') z.$$

L'assertion (i) est alors conséquence immédiate du théorème 1.2.2.

(ii) Soient f, ξ dans $\mathcal{K}(G)$, t dans $\mathbf{R}$ et (x,y) dans $G^2_{r,r}$; on peut écrire que:

$$\begin{aligned}
[\widehat{\Gamma}_G \widehat{\sigma_t^\nu}(L(f))]\xi(x,y) &= [\widehat{\Gamma}_G(L(\delta^{\mathrm{i}t} f))]\xi(x,y) \\
&= \int_G \delta^{\mathrm{i}t}(s) f(s) \xi(s^{-1}x, s^{-1}y)\, \mathrm{d}\lambda^{r(x)}(s) \\
&= \delta^{\mathrm{i}t}(y) \int_G f(s) \delta^{-\mathrm{i}t}(s^{-1}y) \xi(s^{-1}x, s^{-1}y)\, \mathrm{d}\lambda^{r(x)}(s) \\
&= \delta^{\mathrm{i}t}(y) \widehat{\Gamma}_G(L(f))(\mathbf{1}_{\hat{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{-\mathrm{i}t})\xi(x,y) \\
&= (\mathbf{1}_{\hat{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{\mathrm{i}t}) \widehat{\Gamma}_G(L(f))(\mathbf{1}_{\hat{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{-\mathrm{i}t})\xi(x,y) \\
&= [(i_{\hat{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{\sigma_t^\nu}) \widehat{\Gamma}_G(L(f))]\xi(x,y);
\end{aligned}$$

on en déduit (ii).

Soit ω un élément positif de $\mathcal{L}(G)_*$, ξ dans $L^2(G)$ et $(\eta_k)_{k\in I}$ la file dans $\mathcal{K}(G)$ définie dans la démonstration de 3.5; alors pour tout x dans $\mathcal{L}(G)_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \mathcal{L}(G)$ on a:

$$\begin{aligned}(\omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G)(i_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{\sigma_t^{\nu}})(x) &= (\omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G)((\mathbf{1}_{\mathfrak{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{it})x(\mathbf{1}_{\mathfrak{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{-it}))\\ &= \lim_{k\in I} \omega_\xi \star \omega_{\eta_k}((\mathbf{1}_{\mathfrak{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{it})x(\mathbf{1}_{\mathfrak{s}} \otimes_{\hat{r}} \Delta^{-it}))\\ &= \lim_{k\in I} \omega_\xi \underset{\mu}{\otimes} \omega_{\Delta^{-it}\eta_k}(x)\\ &= \omega_\xi \star (\widehat{\nu} \circ \widehat{\sigma_t^{\nu}})(x) = \omega_\xi \star \widehat{\nu}(x) = \omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G(x);\end{aligned}$$

on en déduit le lemme. ∎

3.3.7. THÉORÈME. *Le poids $\widehat{P}_G$ est un poids opératoriel de Haar pour le bimodule de Hopf $(\mathcal{L}(G), \widehat{s}_G, \widehat{r}_G, \widehat{\Gamma}_G)$ et μ est compatible avec $(\mathcal{L}(G), \widehat{s}_G, \widehat{r}_G, \widehat{\Gamma}_G, \widehat{P}_G)$.*

Démonstration. Pour tout élément positif ω dans $\mathcal{L}(G)_*$, soit ξ dans $L^2(G,\nu)$ tel que:

$$\omega = \omega_\xi.$$

Pour tous t dans $\mathbf{R}$ et x dans $\mathcal{L}(G)$, d'après [16], théorème 3.1, p. 46, on a:

$$\sigma_t^{\omega\circ\widehat{P}_G}(x) = [D\omega : D\mu]^{it}\widehat{\sigma_t^{\nu}}(x)[D\omega : D\mu]^{-it}.$$

Comme $\widehat{\Gamma}_G$ est un morphisme de bimodules et que $\omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G$ est un $L^\infty(G^0,\mu)$-poids ([13], III.12 (b)) sur $\mathcal{L}(G)_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \mathcal{L}(G)$, on peut écrire que:

$$\begin{aligned}&(\omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G) \circ \widehat{\Gamma}_G(\sigma_t^{\omega\circ\widehat{P}_G}(x))\\ &\qquad= (\omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G)(\widehat{\Gamma}_G([D\omega : D\mu]^{it}\widehat{\sigma_t^{\nu}}(x)[D\omega : D\mu]^{-it}))\\ &\qquad= (\omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G)[(\widehat{r}([D\omega : D\mu]^{it})_{\mathfrak{s}} \otimes_{\hat{r}} \mathbf{1})\widehat{\Gamma}_G(\widehat{\sigma_t^{\nu}}(x))(\widehat{r}([D\omega : D\mu]^{it})_{\mathfrak{s}} \otimes_{\hat{r}} \mathbf{1})]\\ &\qquad= (\omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G)(\mathbf{1}_{\mathfrak{s}} \otimes_{\hat{r}} \widehat{r}([D\omega : D\mu]^{it})\widehat{\Gamma}_G(\widehat{\sigma_t^{\nu}}(x))\mathbf{1}_{\mathfrak{s}} \otimes_{\hat{r}} \widehat{r}([D\omega : D\mu]^{-it}))\\ &\qquad= (\omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G)(\widehat{\Gamma}_G(\widehat{\sigma_t^{\nu}}(x)))\\ &\qquad= (\omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G)((i_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{\sigma_t^{\nu}})\widehat{\Gamma}_G(x))\\ &\qquad= (\omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G) \circ \widehat{\Gamma}_G(x).\end{aligned}$$

Le poids $(\omega_{\mathfrak{s}} \star_{\hat{r}} \widehat{P}_G) \circ \widehat{\Gamma}_G$ est un poids normal égal à $\omega \circ \widehat{P}_G$ sur $L(\mathcal{K}(G))$ (en particulier il est semi-fini), il est stable par le groupe modulaire de ce dernier d'après l'égalité ci-dessus; l'algèbre $L(\mathcal{K}(G))$ est elle même stable par ce groupe modulaire, le poids opératoriel $\widehat{P}_G$ est donc un poids opératoriel de Haar d'après [16], théorème 6.2.

Soit f dans $\mathcal{K}(G)$ et t dans $\mathbf{R}$, on a:

$$\widehat{j} \circ \widehat{\sigma_{-t}^{\nu}}(L(f)) = \widehat{j}(L(\delta^{-it}f)) = L(\delta^{it}\overline{f}^{\sharp}) = \widehat{\sigma_t^{\nu}}(L(\overline{f}^{\sharp})) = \widehat{\sigma_t^{\nu}} \circ \widehat{j}(L(f)).$$

On en déduit la fin du théorème. ∎

3.3.8. REMARQUES. (i) On peut sans grandes difficultés généraliser les exemples qui viennent d'être traités au cas des groupoïdes mesurés au sens de P. Hahn ([7], [8]).

(ii) En dimension finie, les exemples de bimodules de Hopf présentés dans 3.2 et 3.3 sont des "réduites" des algèbres de Kac généralisées associées à un groupoïde fini dans [21], Section 2. Avec les mêmes notations, si $e^{(2)}$ et $f^{(2)}$ désignent les projecteurs $\Gamma^a(\mathbf{1})$ et $\Gamma^s(\mathbf{1})$, ce sont les supports initiaux et finaux de l'isométrie partielle W_G^α définie dans [21]. L'isomorphisme isométrique W_G de théorème 3.2.3 est la partie "unitaire" de W_G^α, on peut identifier les algèbres $L^\infty(G,\mu_\alpha)_s\star_r L^\infty(G,\mu_\alpha)$ et $e^{(2)}(L^\infty(G,\mu_\alpha)\otimes L^\infty(G,\mu_\alpha))e^{(2)}$ ainsi que les algèbres $\mathcal{L}(G)_{\hat{s}}\star_{\hat{r}}\mathcal{L}(G)$ et $f^{(2)}(\mathcal{L}(G)\otimes\mathcal{L}(G))f^{(2)}$; ceci permet d'identifier Γ_G et $\mathrm{Ad}(e^{(2)})\circ\Gamma^a$ ainsi que $\widehat{\Gamma}_G$ et $\mathrm{Ad}(f^{(2)})\circ\Gamma^s$.

Dans le chapitre suivant nous allons caractériser directement les groupoïdes finis en termes de bimodules de Hopf commutatifs munis d'un poids opératoriel de Haar.

4. CAS COMMUTATIF FINI

Dans tout ce qui suit, (M,s,r,Γ,j,P) désigne un bimodule de Hopf sur N muni d'un poids opératoriel de Haar dans les conditions de théorème 3.2.7 et qui est de dimension finie. On peut alors supposer que N est aussi de dimension finie, les algèbres M et N sont ainsi des C^*-algèbres commutatives de spectres finis notés respectivement Z et Z^0; grâce aux isomorphismes de Gelfand on peut identifier M à l'algèbre $C(Z)$ des fonctions sur Z et N à $C(Z^0)$. D'après la remarque 2.2.2 (iii), on peut supposer que μ est la mesure de comptage sur Z^0. Dans ces conditions, il existe deux applications, notées s_Z et r_Z, de Z dans Z^0, telles que, pour tous f dans $C(Z^0)$ et z dans Z, on a:

$$s(f)(z) = f(s_Z(z));$$

$$r(f)(z) = f(r_Z(z)).$$

De même il existe une involution de Z: $(z \mapsto z^{-1})$ telle que pour tous z dans Z et g dans $C(Z)$ l'égalité suivante est vraie:

$$j(g)(z) = g(z^{-1}).$$

On note alors:

$$Z^{(2)} = \{(z,z') \in Z^2 \mid s_Z(z) = r_Z(z')\}$$
$$Z^u = \{z \in Z \mid r_Z(z) = u\}$$
$$Z^{(3)} = \{(z,z',z'') \in Z^3 \mid (z,z') \in Z^{(2)}, (z',z'') \in Z^{(2)}\}.$$

En particulier, d' après l'égalité $j \circ s = r$, pour tout z dans Z on a:

$$r_Z(z^{-1}) = s_Z(z)$$

et donc le couple (z, z^{-1}) est dans $Z^{(2)}$.

4.1. LEMME. *Les algèbres $C(Z)_s\star_r C(Z)$ et $C(Z)_s\star_r C(Z)_s\star_r C(Z)$ s'identifient respectivement à $C(Z^{(2)})$ et $C(Z^{(3)})$.*

Démonstration. Notons P_Z l'espérance conditionnelle de $C(Z)$ dans $C(Z^0)$ définie pour tous f dans $C(Z)$ et u dans Z^0 par:

$$P_Z(f)(u) = \sum_{z \in Z^u} f(z).$$

Soit ν_1 la mesure sur Z égale à $\mu \circ P_Z$ et $\nu^{(2)}$ la mesure de comptage sur $Z^{(2)}$. Un calcul immédiat permet d'affirmer que pour tous f, f', g, g' dans $L^2(Z^{(2)}, \nu^{(2)})$, on a dans $L^2(Z,\nu_1) \underset{\mu}{\otimes} L^2(Z,\nu_1)$ l'égalité suivante:

$$\langle f \underset{\mu}{\otimes} g, f' \underset{\mu}{\otimes} g' \rangle = \sum_{(z,z') \in Z^{(2)}} f\overline{f'}(z) g\overline{g'}(z');$$

on en déduit un isomorphisme isométrique de $L^2(Z,\nu_1) \underset{\mu}{\otimes} L^2(Z,\nu_1)$ sur $L^2(Z^{(2)}, \nu^{(2)})$; cet isomorphisme échange $C(Z)_s \star_r C(Z)$ et $C(Z^{(2)})$. La deuxième identification s'obtient de manière analogue. ∎

4.2. THÉORÈME. *Un bimodule de Hopf co-involutif de dimension finie, muni d'un poids opératoriel de Haar, dans les conditions de théorème 3.2.7, est commutatif si et seulement s'il est isomorphe au bimodule de Hopf, muni d'un poids opératoriel de Haar, associé à un groupoïde fini, sa topologie canonique et un système de Haar.*

4.2.1. REMARQUE. La condition 3.2.7 exige que $\mathbf{1}_s \otimes_r f$ existe pour tout f dans le bimodule et donc que s et r soient à valeurs dans son centre (cf. remarque 2.1.2).

Démonstration du théorème 4.2. D'après 3.2.7 la condition nécessaire est évidente. Si l'on considère, réciproquement, (M, s, r, Γ, j) un bimodule de Hopf sur N, commutatif, co-involutif de dimension finie, muni d'un poids opératoriel dans les conditions de l'énoncé, on peut donc lui appliquer ce qui précède. En particulier, selon le lemme 4.1, Γ est un morphisme de C^*-algèbres de $C(Z)$ dans $C(Z^{(2)})$. En utilisant les isomorphismes de Gelfand, il existe une application de $Z^{(2)}$ vers Z, qui à tout (x, y) de $Z^{(2)}$ associe une image (le produit) notée xy telle que, pour tout f dans $C(Z)$:

$$\Gamma(f)(x, y) = f(xy).$$

Les conditions 2.2.1 (a) et (b) se traduisent pour tout (g, g') dans $Z^{(2)}$ par:

$$r_Z(gg') = r_Z(g)$$

$$s_Z(gg') = s_Z(g').$$

Ainsi pour tout (x, y, z) dans $Z^{(3)}$, on a:

$$s_Z(x) = r_Z(y) = r_Z(yz)$$

$$s_Z(xy) = s_Z(y) = r_Z(z)$$

et donc les couples (x, yz) et (xy, z) sont dans $Z^{(2)}$. L'unicité de $\Gamma_s \star_r i$ et $i_s \star_r \Gamma$ permet d'affirmer que pour tout f dans $C(Z^{(2)})$ on a:

$$(\Gamma_s \star_r i)f(x, y, z) = f(xy, z)$$

$$(i_s \star_r \Gamma)f(x, y, z) = f(x, yz).$$

L'égalité de $(\Gamma_s \star_r i)\Gamma$ et de $(i_s \star_r \Gamma)\Gamma$ se traduit par:

$$x(yz) = (xy)z.$$

De même le fait que j est une co-involution permet d'écrire que:

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

Soit u dans Z^0 et Δ_u la mesure de Dirac au point u sur $C(Z^0)$; en notant λ^u la mesure $\Delta_u \circ P$, il est immédiat de constater que λ^u a pour support Z^u et que l'égalité 3.1 de théorème 3.2.7 entraîne pour tous f, g dans $C(Z)$ et x_0 dans Z:

$$\int_G f(x_0 y)g(y)\,\mathrm{d}\lambda^{s(x_0)}(y) = \int_G f(y)g(x_0^{-1}y)\,\mathrm{d}\lambda^{r(x_0)}(y).$$

Si (x_0, y_0) est un élément quelconque de $Z^{(2)}$, appliquons cette dernière formule aux fonctions caractéristiques respectives de $\{x_0y_0\}$ et $\{y_0\}$. Le membre de gauche n'est pas nul celui de droite n'a cette propriété que si:

$$x_0^{-1}(x_0y_0) = y_0.$$

Si (z,t) appartient à $Z^{(2)}$, alors (t^{-1}, z^{-1}) est dans $Z^{(2)}$ et l'égalité précedente prouve que:

$$(zt)t^{-1} = [t(zt)^{-1}]^{-1} = [t(t^{-1}z^{-1})]^{-1} = [z^{-1}]^{-1} = z.$$

Ainsi Z est un groupoïde, de plus si z et t sont deux éléments quelconques dans Z tels que $zz^{-1} = tt^{-1}$, on a:

$$r_Z(zz^{-1}) = r_Z(tt^{-1}).$$

Ceci entraîne que

$$r_Z(z) = r_Z(t).$$

réciproquement, si z et t sont dans Z et tels que $r_Z(z) = r_Z(t)$, alors (zz^{-1}, t) est dans $Z^{(2)}$ et:

$$zz^{-1} = (zz^{-1})tt^{-1} = zz^{-1}(tt^{-1}) = tt^{-1}.$$

Donc on peut identifier Z^0 et l'espace des unités de Z. En notant ν la mesure $\mu \circ P$, le bimodule de Hopf co-involutif (M, s, r, Γ, j) s'identifie à l'exemple du théorème 3.2.3, l'ensemble $\{\lambda^u \mid u \in Z^0\}$ est un système de Haar pour Z, et P est le poids opératoriel de Haar associé; le théorème en découle. ∎

4.2.2. REMARQUE. Le théorème 4.2 est à rapprocher de [21], 7.3.2; nous utilisons ici une axiomatique plus lourde mais des arguments plus directs.

Acknowledgements. Je tiens beaucoup à remercier M. Enock pour ses nombreux conseils et ses encouragements dans la conception et la réalisation de ce travail de recherche.

REFERENCES

1. S. BAAJ, G. SKANDALIS, Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*-algèbres, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **26**(1993), 425–488.
2. F. COMBES, Poids associé a une algèbre hilbertienne à gauche, *Compositio Math.* **23**(1971), 49–77.
3. M. ENOCK, J.M. SCHWARTZ, *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York.

4. M. ENOCK, J.M. VALLIN, C^*-algèbres et algèbres de Kac, *Proc. London Math. Soc. (3)* **66**(1993), 619–650.
5. U. HAAGERUP, Operator valued weights in von-Neumann Algebras. I, *J. Funct. Anal.* **32**(1979), 175–206.
6. U. HAAGERUP, Operator valued weights in von-Neumann Algebras. II, *J. Funct. Anal.* **33**(1979), 331–361.
7. P. HAHN, Haar measure for measure groupoids, *Trans. Amer. Math. Soc.* **242**(1978).
8. P. HAHN, The regular representations of measure groupoids, *Trans. Amer. Math. Soc.* **242**(1978), 8–78.
9. V.J.R. JONES, Indices for subfactors, *Invent. Math.* **72**(1984), 1–25.
10. G. MALTSINIOTIS, Groupoïdes quantiques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, vol. 314, pp. 249–252.
11. A. OCNEANU, Cours au Collège de France, 1991.
12. J. RENAULT, A Groupoid Approach to C^*-Algebras, Lecture Notes in Math., vol. 793, Springer-Verlag.
13. J.L. SAUVAGEOT, Produit tensoriel de Z-modules, Publ. Math. Univ. Paris 6, **23** (1980).
14. J.L. SAUVAGEOT, Produit tensoriel de Z-modules et applications, *Proc. Inter. Conf. Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory at Buşteni*, Romania, 1983.
15. J.L. SAUVAGEOT, Sur le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert, *J. Operator Theory* **9**(1983), 237–258.
16. Ş. STRĂTILĂ, *Modular theory in operator algebras*, Editura Academiei-Abacus Press Turnbridge Wells England, 1981.
17. L. VAINERMANN, A note on quantum groupoïds, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, vol. 315, pp. 1125–1130.
18. J.M. VALLIN, C^*-algebres de Hopf et C^*-algebres de Kac, *Proc. London Math. Soc. (3)* (1985), 131–174.
19. S.L. WORONOWICZ, Compact Matrix Pseudo-groups, *Comm. Math. Phys.* **3**(1987), 613–665.
20. T. YAMANOUCHI, Duality for actions and co-actions of groupoids on von-Neumann algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.* **484**(1993).
21. T. YAMANOUCHI, Duality for generalized Kac algebras and a caracterisation of finite groupoids algebras, *J. Algebra* **163**(1994), 9–50.

JEAN-MICHEL VALLIN
Unité de Recherche de Paris 6/Orléans
associée au CNRS 747
URA 747, case 191,
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05
FRANCE

Reçu le 21 juin 1994; révision le 10 août 1995 et le 20 octobre 1995.