J. OPERATOR THEORY
35(1996), 281–316

UNE APPROCHE DE L'INTERPOLATION LIBRE GÉNÉRALISÉE PAR LA THÉORIE DES OPÉRATEURS ET CARACTÉRISATION DES TRACES $H^p|_\Lambda$

ANDREAS HARTMANN

Communicated by Nikolai K. Nikolskii

ABSTRACT.
We prove the necessity and sufficiency of the generalized Carleson condition (CG) for free interpolation in the Hardy spaces H^p, $1 < p \leqslant \infty$, by identifying scalar operator interpolation, unconditional bases and condition (CG). For this type of interpolation, N.K. Nikolskii and S.V. Khrushchëv have announced without proof a characterization of the data space of interpolable function sequences. We give the proof for this conjecture and apply the result to the characterization of the trace space $H^p|_\Lambda$, where Λ is a finite union of interpolating sequences, generalizing a result of V.I. Vasyunin. We finish with the explicit construction of a linear continuous operator of interpolation.

KEYWORDS: *Free interpolation, Hardy spaces, interpolating sequences, lifting of the commutant, Nehari's theorem, unconditional bases.*

AMS SUBJECT CLASSIFICATION: Primary 47A57; Secondary 30E05.

INTRODUCTION

Cet article se divise en trois parties. Dans la *première*, nous allons démontrer la nécessité et la suffisance de la condition de Carleson généralisée (CG) pour l'interpolation libre (au sens faible) dans H^p $(1 < p \leqslant \infty)$. Dans ce but, nous allons exploiter l'équivalence entre les bases inconditionnelles et l'interpolation libre scalaire des opérateurs. En effet, si $\theta = \prod_{n\geqslant 1} \vartheta_n$ et si K_θ^p est un espace complémentaire convenable de θH^p dans H^p, nous pouvons exhiber une base inconditionnelle $(K^p_{\vartheta_n})_{n\geqslant 1}$ de K^p_θ et pour $\mu \in \ell^\infty$, il existe un opérateur continu de K^p_θ dans K^p_θ qui interpole la suite $(\mu_n I_n)_{n\geqslant 1}$ (où I_n est l'identité dans $K^p_{\vartheta_n}$), c'est-à-dire $T|_{K^p_{\vartheta_n}} = \mu_n I_n$. Maintenant, d'une part, nous pouvons identifier cette interpolation à l'interpolation libre (au sens faible) et d'autre part, à l'aide d'une généralisation du théorème du relèvement du commutant, nous trouvons l'équivalence entre les bases inconditionnelles et la condition (CG).

Une fois établie cette condition, nous allons donner dans la *deuxième partie* une caractérisation de l'espace des données RX_+ pour $X_+ = H^p$, où R est l'opérateur de restriction généralisé

$$\begin{aligned} R : X_+ &\to \ell^\infty\left(X_+/\vartheta_n X_+\right) \\ f &\to (f + \vartheta_n X_+)_{n\geqslant 1}. \end{aligned}$$

(Nous utilisons l'indice "+" pour les espaces de fonctions holomorphes). Comme $\|f_n\|_{X_+/\vartheta X_+} \leqslant \|f_n\|_{X_+}$, l'opérateur R est toujours continu. Pour un espace de suites ℓ on écrira

$$(f_n)_{n\geqslant 1} \in \ell(X_+/\vartheta_n X_+) \Leftrightarrow \left(\|f_n\|_{X_+/\vartheta_n X_+}\right) \in \ell.$$

Dans le cas $X_+ = H^p$, $1 < p \leqslant \infty$, nous allons démontrer, que R est bien défini et surjectif sur $\ell^p\left(H^p/\vartheta_n H^p\right)$ si et seulement si $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la condition de Carleson généralisée. Ce résultat était conjecturé sans preuve par N.K. Nikolskii et S.V. Khrushchëv dans [16].

La *troisième partie* sera consacrée à la caractérisation de $H^p|_\Lambda$, qui sera une conséquence de l'identification de l'espace des traces $H^p|_\Lambda$ à l'espace des données $\ell^p(H^p/\vartheta_n H^p)$ si $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in$ (CG), ϑ_n étant des produits de Blaschke correspondants. En particulier, si Λ est une réunion finie d'ensembles de Carleson, il existe une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de produits de Blaschke qui vérifie (CG) et $\sup\limits_{n\geqslant 1} \dim H^p/B_n H^p < \infty$ et telle que les zéros de $\prod\limits_{n\geqslant 1} B_n$ coïncident avec Λ. Dans cette situation on peut caractériser uniformément la norme $\|\cdot\|_{H^p/B_n H^p}$ en fonction des données locales, c'est-à-dire $\{f(\lambda)\}_{\lambda\in\sigma_n}$ (avec σ_n l'ensemble des zéros de B_n), ce qui fournira ensuite la caractérisation explicite des traces $H^p|_\Lambda$. Ceci généralise le résultat de V.I. Vasyunin ([21]) à $p < \infty$.

Nous allons donner ensuite un résultat d'interpolation pour les fonctions H^∞ uniformément bornées inférieurement sur une réunion finie d'ensemble de Carleson, qui servira aussi dans la discussion de l'opérateur linéaire d'interpolation.

Nous remarquons qu'une autre caractérisation des traces $H^p|_\Lambda$ était indépendamment trouvé par J. Bruna, A. Nicolau et K. Øyma ([3]).

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes:

(1) Si $1 < p < \infty$, alors q sera l'exposant conjugué

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

(2) le produit scalaire est donné par

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\,\mathrm{d}t,$$

(3) et la forme bilinéaire est donnée par

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t.$$

1. LA CONDITION DE CARLESON GÉNÉRALISÉE

Dans ce paragraphe nous allons donner les définitions de l'interpolation libre au sens faible (cf. [14]) et démontrer la nécessité et la suffisance de la condition de Carleson généralisée pour ce type d'interpolation. Dans ce but, nous reprenons les idées qui étaient développées pour le cas $p = 2$ dans [13], [14] et [20]. Principalement il s'agit du procédé suivant.

Nous allons étudier les liens entre l'interpolation libre et les bases inconditionnelles. Ensuite nous allons caractériser ces bases inconditionnelles à l'aide des projections spectrales correspondantes. Le théorème du relèvement du commutant nous donne une formulation explicite et une estimation de la norme de ces projections. Cette estimation des normes avec la définition de l'interpolation libre nous permettra de ramener l'interpolation libre (des fonctions) dans H^p à l'interpolation libre (des idempotents de ℓ^∞) dans H^∞. V.I. Vasyunin ([20]) a donné la condition nécessaire et suffisante — la condition de Carleson généralisée — dans ce cas et donc aussi pour l'interpolation libre dans H^p.

1.1. INTERPOLATION LIBRE GÉNÉRALISÉE. Soit $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $H^\infty = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty\}$ et

$$X_+ \subset \mathrm{Nev} = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : f = f_1/f_2 \text{ avec } f_1, f_2 \in H^\infty\}.$$

Dans tout ce qui suit, $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions intérieures (c'est-à-dire $\vartheta_n \in H^\infty$ et $|\vartheta_n| = 1$ p.p. $\mathbb{T}$) et nous supposons que $\theta = \prod_{n\geqslant 1} \vartheta_n$ converge dans H^2.

DÉFINITION 1.1. On dit qu'une *fonction* $f \in X_+$ *interpole une suite* $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset X_+$ par rapport à $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$, si

$$f - f_n \in \vartheta_n X_+, \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Dans ce cas on dit aussi que la *suite* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est *interpolable*.

Nous définissons la liberté de l'interpolation de la façon suivante.

DÉFINITION 1.2. On dira que $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ est *d'interpolation libre* (généralisée) au sens faible, si la suite $(\mu_n f_n)_{n\geqslant 1}$ est interpolable pour $\mu \in \ell^\infty$ et une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ interpolable.

REMARQUES 1.3. (i) Soit $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbf{D}$. Nous posons $\vartheta_n = b_{\lambda_n} = \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n} \frac{\lambda_n - z}{1-\overline{\lambda_n} z}$ (facteur de Blaschke) et $f_n(z) \equiv a_n$ pour $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^\infty$. D'après le résultat de L. Carleson ([4]), $(b_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est d'interpolation libre au sens faible si et seulement si Λ vérifie la condition de Carleson, c'est-à-dire

$$\inf_{\lambda\in\Lambda} \prod_{\mu\neq\lambda} |b_\mu(\lambda)| = \delta > 0.$$

Si une suite Λ vérifie cette condition, nous écrivons $\Lambda \in (\mathrm{C})$, et nous appelons Λ une *suite de Carleson*. La constante δ sera appelée constante de Carleson (Dans la terminologie anglaise, ces suites-là sont aussi connues sous le nom “interpolating sequences”).

(ii) Dans le deuxième chapitre, nous allons donner un autre type d'interpolation approprié aux espaces de type $\ell(X_+/\vartheta_n X_+)$.

1.2. BASES INCONDITIONNELLES. Soit $\mathcal{Y} = (Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de sous-espaces de l'espace de Banach Y. On la suppose complète dans Y et faiblement topologiquement libre, c'est-à-dire $Y_n \cap \operatorname{span}(Y_k : k \neq n) = \{0\}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Soit $\mathcal{E}_n$ la projection spectrale associée à Y_n qui est bien définie sur l'enveloppe linéaire $\operatorname{Lin}(Y_k : k \geqslant 1)$ par l'équation $\mathcal{E}_n\Big(\sum_{k\geqslant 1} y_k\Big) = y_n$. Alors

$$\mathcal{E}_n|_{Y_n} = I$$
$$\mathcal{E}_n|_{Y_k} = 0 \quad k \neq n.$$

Les projections $\mathcal{E}_n$ sont continues si et seulement si la suite $\mathcal{Y}$ est topologiquement libre, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{dist}(y/\|y\|, \operatorname{span}(Y_k : k \neq n)) \geqslant \delta_n > 0$ pour tout $y \in Y_n$, $y \neq 0$, et $n \geqslant 1$. Si ceci est le cas, la paire $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}')$, où $\mathcal{Y}' = (\mathcal{E}_n^* Y^*)_{n\geqslant 1}$, $\mathcal{E}_n^*$ étant les projections adjointes, s'appelle biorthogonale. Soit aussi $\mathcal{E}_\sigma = \sum_{n\in\sigma} \mathcal{E}_n$ pour un ensemble fini $\sigma \subset \mathbf{N}$. Nous avons le résultat suivant (cf. [13]), qui généralise le théorème de Lorch-Grinblyum (cf. [15] pour les références).

THÉORÈME 1.4. *Soient $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}'$ deux familles biorthogonales de sous-espaces, complètes dans Y, respectivement Y^*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\mathcal{Y}$ est une base inconditionnelle;*

(ii) $\sup_{\sigma \in \mathcal{K}} \|\mathcal{E}_\sigma\| < \infty$;

(iii) $M(\mathcal{Y}) \supset \{L_\mu : L_\mu|_{Y_n} = \mu_n I, \mu \in \ell^\infty\} \quad (\simeq \ell^\infty)$.

Ici $M(\mathcal{Y}) = \{T \in \mathcal{B}(Y) : TY_n \subset Y_n, \text{ pour } n \geqslant 1\}$, $\mathcal{B}(Y)$ est l'ensemble des endomorphismes continus de Y et $\mathcal{K}$ est l'ensemble des sous ensembles finis de $\mathbf{N}$.

REMARQUE 1.5. (i) Si $\mathcal{Y}$ est une base inconditionnelle dans un espace réfléxif Y, alors $\mathcal{Y}'$ l'est aussi dans Y^*.

(ii) Un calcul direct montre que l'assertion (iii) du théorème 1.4 est équivalente à dire que pour tout $x \in Y$ et $\mu \in \ell^\infty$, il existe un unique élément $y \in Y$ tel que

$$\mathcal{E}_n y = \mu_n \mathcal{E}_n x, \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \tag{1.1}$$

C'est cette équivalence qui nous permettra d'établir les liens entre les bases inconditionnelles et l'interpolation.

1.3. LIEN ENTRE L'INTERPOLATION ET LES BASES INCONDITIONNELLES. Dans tout ce paragraphe nous comprenons la dualité par rapport au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini dans l'introduction. Prenons maintenant $X \subset L^1(\mathbf{T})$ un sous-espace *idéal*, c'est-à-dire tel que pour $g \in L^1(\mathbf{T})$ et $f \in X$, nous avons

$$|g| \leqslant |f| \quad \text{p.p.}\,\mathbf{T} \quad \text{implique} \quad g \in X \quad \text{et} \quad \|g\|_X \leqslant \|f\|_X,$$

et tel qu'on peut identifier X^* à un sous-espace vectoriel de $L^1(\mathbf{T})$ par rapport à la dualité $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $Y = X, X^*$. On suppose que les polynômes trigonométriques $\mathcal{P}$ sont denses dans Y, et que la projection de Riesz

$$P_+ : \mathcal{P} \to Y$$

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

est continue. Nous définissons $P_- = I - P_+$, et nous posons

$$Y_+ = P_+ Y, \quad Y_- = P_- Y.$$

Remarquons que l'on peut identifier $(X_+)^* = X^*/(X_+)^\perp \simeq (X^*)_+$ (pour la définition de "$\simeq$", voir (1.3)), ce qui justifie l'écriture X_+^*, que nous allons utiliser dans la suite. De plus, il est clair que la multiplication par une fonction essentiellement bornée est aussi une opération continue. Pour une fonction intérieure θ les espaces θY, θY_+ et θY_- sont fermés. La projection $P_\theta = \theta P_- \overline{\theta} : Y_+ \to Y_+$ est alors bien définie et continue. On définit $K_\theta^Y = P_\theta Y_+$, et on vérifie

$$K_\theta^Y = Y_+ \cap \theta Y_-.$$

En effet l'inclusion "$\subset$" se démontre directement à partir de la définiton de K_θ^Y. Pour l'inclusion inverse il suffit de vérifier que P_θ est l'identité sur $Y_+ \cap \theta Y_-$.

Nous dirons qu'une fonction intérieure θ_1 divise la fonction θ_2 et nous écrirons $\theta_1 | \theta_2$ s'il existe une fonction intérieure θ telle que $\theta_1 \theta = \theta_2$ (on peut trouver cette définition dans [15]). Si Y vérifie les conditions énoncées au début de ce paragraphe, alors pour les espaces K_θ^Y nous obtenons les propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉS 1.6. Tout sous-espaces invariant de $P_+ \overline{z}$ dan Y_+ est de la forme K_θ^Y avec une fonction intérieure θ.

(ii) $K_{\theta_1}^Y \cap K_{\theta_2}^Y = \{0\}$ si et seulement si pgcd$(\theta_1, \theta_2) = 1$. En effet nous avons plus généralement $K_{\theta_1}^Y \cap K_{\theta_2}^Y = K_\theta^Y$ avec $\theta =$ pgcd(θ_1, θ_2).

(iii) $\mathrm{span}(K_{\theta_i}^Y : i \geqslant 1) = K_\theta^Y$ avec $\theta =$ ppcm$(\theta_i : i \geqslant 1)$.

(iv) Si $(\vartheta_n)_{n \geqslant 1}$ est d'interpolation libre au sens faible, alors pgcd$(\vartheta_n, \vartheta_k) = 1$, $n \neq k$.

REMARQUE 1.7. Les propriétés 1.6 (i)–(iii) étaient démontrées dans [15] pour le cas $Y = X = X^* = L^2$. Essentiellement elles résultent de la structure des sous-espaces invariants de $P_+ \bar{z}$. Pour le cas général on trouve la description des sous-espaces invariants de $P_+ \bar{z}$ dans le théorème sur les sous espaces invariants des treillis de Banach ([15]). Ceci permet de montrer les propriétés (i)–(iii).

Soit maintenant $\theta = \prod_{n \geqslant 1} \vartheta_n$ où ϑ_n sont premières entre elles (pgcd$(\vartheta_n, \vartheta_k) = 1$, $n \neq k$), et posons

$$X_n = K_{\vartheta_n}^X.$$

On remarque que la famille $\mathcal{X}(X_n)_{n \geqslant 1}$ est complète dans K_θ^X (d'aprés la propriété (iii)) et que la suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est faiblement topologiquement libre, et par conséquent, les projections spectrales $\mathcal{E}_n$ par rapport à $\mathcal{X}$ sont bien définies sur une partie dense de K_θ^X. Pour traduire (1.1) en interpolation libre au sens faible, il faut trouver une base $\mathcal{Y} = (Y_n)_{n \geqslant 1}$, dont les projections spectrales vérifient $\ker \mathcal{E}_n \subset \vartheta_n X$. En effet il s'avèrera que la base duale $(X'_n)_{n \geqslant 1} = (\mathcal{E}_n^*(K_\theta^X)^*)_{n \geqslant 1}$ a cette propriété. Afin de vérifier ceci, il faut calculer $(K_\theta^X)^*$. Par définition on avait

$K_\theta^X = P_\theta X_+ = P_\theta P_+ X = PX$ si on pose $P = P_\theta P_+$. Nous remarquons qu'en tant que produit de deux projections définies sur $Y = X, X^*$, P est aussi définie sur X^* et vérifie de plus $(P|X)^* = P|X^*$. Puisque $K_\theta^X \subset X$ et X^* s'identifie à l'aide du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à un sous-espace vectoriel de $L^1(\mathbb{T})$ on a

$$(1.2) \qquad (K_\theta^X)^* = \frac{X^*}{(K_\theta^X)^\perp} = \frac{X^*}{(PX)^\perp} = \frac{X^*}{\ker P|_{X^*}} \simeq PX^* = K_\theta^{X^*}.$$

La dernière équivalence est une conséquence de la continuité de P qui entraîne $Y = PY \dot{+} (I - P)Y = PY \dot{+} \ker P$, d'où l'identification naturelle et l'encadrement important de la norme quotient:

$$PY \simeq \frac{Y}{\ker P}$$

$$(1.3) \qquad \frac{1}{\|P\|}\|Pu\|_Y \leqslant \|u\|_{\frac{Y}{\ker P}} \leqslant \|Pu\|_Y.$$

Remarquons que nous avons toujours $(\operatorname{im} P) = (\ker P^*)_\perp$.

On peut maintenant démontrer la

PROPOSITION 1.8. *Soit X un espace réflexif et supposons que $\mathcal{X}$ est topologiquement libre. Dans K_θ^X nous avons:*

$$\ker \mathcal{E}_n^* = \vartheta_n X_+^* \cap \theta X_-^* \subset \vartheta_n X_+^*$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{E}_n^* = \vartheta_n' X_+^* \cap \theta X_-^*,$$

où $\vartheta_n' = \theta/\vartheta_n$.

Preuve.

$$\ker \mathcal{E}_n^* = \overline{(\mathcal{E}_n K_\theta^X)}^\perp = \overline{(P_{\vartheta_n} X_+)}^\perp = \ker P_{\vartheta_n}|_{K_\theta^{X^*}} = \vartheta_n X_+^* \cap \theta X_-^*.$$

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{Im} \mathcal{E}_n^*} &= (\ker \mathcal{E}_n)^\perp = (\operatorname{span}(K_{\vartheta_k}^X : k \neq n))^\perp = (K_{\vartheta_n'}^X)^\perp \\ &= (P_{\vartheta_n'} X_+)^\perp = \ker P_{\vartheta_n'}|_{K_\theta^{X^*}} = \vartheta_n' X_+^* \cap \theta X_-^*.\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{E}_n^*$ est une projection continue, son image est fermée, ce qui démontre la proposition. ∎

REMARQUE 1.9. Comme les $X_n' = \vartheta_n' X_+^* \cap \theta X_-^*$ sont des sous-espaces invariants de $P_\theta z$ dans $K_\theta^{X^*}$, nous pouvons appliquer le même raisonnement qu'on utilise pour démontrer la propriété 1.6 (iii) (pour X_n) aussi pour X_n', ce qui justifie la complétude de $\mathcal{X}' = (X_n')_{n\geqslant 1}$ dans $K_\theta^{X^*}$.

LEMMA 1.10. *Soit X un espace réflexif. Si $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ est d'interpolation libre au sens faible dans X_+^*, alors $\mathcal{X}$ est topologiquement libre.*

Preuve. Nous avons déjà observé (cf. la propriété 1.6 (iv)), que l'interpolation libre au sens faible entraîne pgcd $(\vartheta_n, \vartheta_k) = 1, n \neq k$. Le système $\mathcal{X}$ est donc faiblement topologiquement libre (dáprès la propriété (ii)). Il suffit donc de démontrer la continuité des projections spectrales. Dans ce but, nous remarquons d'abord que $f \in X_+^*$ interpole la suite $(P_{\vartheta_n} f)_{n\geqslant 1}$ et qu'il existe ainsi d'après l'interpolation libre au sens faible une fonction $g \in X_+^*$ telle que $g - \mu_n P_{\vartheta_n} f \in \vartheta_n X_+^*$ pour $\mu \in \ell^\infty$, et puisque $\ker P_{\vartheta_n} = \vartheta_n X_+^*$, on a aussi $g - \mu_n f \in \vartheta_n X_+^*$, $n \geqslant 1$. Pour $P_\theta g$ nous avons toujours $P_\theta g - \mu_n f \in \vartheta_n X_+^*$, $n \geqslant 1$, et $P_\theta g$ est en effet l'unique fonction qui résoud le problème d'interpolation dans $K_\theta^{X^*}$. Ainsi, pour $\mu \in \ell^\infty$, l'opérateur

$$M_\mu : K_\theta^{X^*} \to K_\theta^{X^*}$$

$$f \mapsto g,$$

qui à $f \in K_\theta^{X^*}$ associe la fonction $g \in K_\theta^{X^*}$ telle que $g - \mu_n f \in \vartheta_n X_+^*$, $n \geqslant 1$, est bien défini. On se persuade facilement de sa linéarité et la continuité est une conséquence du théorème du graphe fermé. Choisissons $\mu = (\delta_{nk})_{n\geqslant 1}$ et étudions M_μ. On vérifie que $g = M_\mu f = 0$ pour $f \in \vartheta_n X_+^* \cap \theta X_-^*$ et $M_\mu f = f$ pour $f \in \vartheta_n' X_+^* \cap \theta X_-^*$. M_μ est donc en effet égal à $\mathcal{E}_n^*$, d'où la continuité de $\mathcal{E}_n^*$ et donc celle de $\mathcal{E}_n$. ∎

On applique maintenant (1.1) à la base duale et les égalités $\mathcal{E}_n^* y = \mu_n \mathcal{E}_n^* x$ se traduisent grâce à la proposition précédente en interpolation libre au sens faible.

COROLLAIRE 1.11. *Soit X un espace réfléxif vérifiant les conditions au début de ce paragraphe et θ une fonction intérieure. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *est une base inconditionnelle dans* K_θ^X;

(ii) $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite d'interpolation libre au sens faible dans* X_+^*.

Preuve. Nous avons déjà remarqué que dans un espace réfléxif $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle si et seulement si $(X_n')_{n\geqslant 1}$ l'est.

Soient alors $f, f_n \in X_+^*$ telles que $f - f_n \in \vartheta_n X_+^*$ et $\mu \in \ell^\infty$. Quitte à considérer $P_\theta f$, $P_\theta f_n$ — qui vérifient aussi $P_\theta f - P_\theta f_n \in \vartheta_n X_+^*$ — nous pouvons supposer que $f, f_n \in K_\theta^{X^*}$ et nous avons donc $\mathcal{E}_n^* f = \mathcal{E}_n^* f_n$. D'après le théorème 1.4 (cf. aussi (1.1)), il existe $g \in K_\theta^{X^*}$ telle que $\mathcal{E}_n^* g = \mu_n \mathcal{E}_n^* f_n$, ce qui implique que pour tout $n \geqslant 1$ on a $g - \mu_n f_n \in \ker \mathcal{E}_n^* \subset \vartheta_n X_+^*$. Pour la reciproque, nous observons d'abord que d'apreś la dernière remarque avant le lemme 1.10, $\mathcal{X}'$ est complète, et d'après le lemme 1.10 que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ sont topologiquement libres. Afin de démontrer que $\mathcal{X}'$ est une base inconditionnelle, à l'aide du théorème 1.4, il suffit donc de vérifier que pour $\mu \in \ell^\infty$ et $f \in K_\theta^{X^*}$, il existe $g \in K_\theta^{X^*}$ telle que $\mu_n \mathcal{E}_n^* f = \mathcal{E}_n^* g$, $n \geqslant 1$. Soit alors $f \in K_\theta^{X^*}$. Si on pose $f_n = \mathcal{E}_n^* f$, alors $f - f_n \in \vartheta_n X_+^*$. L'interpolation libre au sens faible entraîne pour toute suite $\mu \in \ell^\infty$ l'existence d'une fonction $g \in K_\theta^{X^*}$ telle que $g - \mu_n f_n \in \vartheta_n X_+^*$. Puisque g et f_n appartiennent à $K_\theta^{X^*}$, on a $g - \mu_n f_n \in \vartheta_n X_+^* \cap \theta X_-^* = \ker \mathcal{E}_n^*$ et donc $\mathcal{E}_n^* g = \mu_n \mathcal{E}_n^* f_n = \mu_n \mathcal{E}_n^* f$. D'où le corollaire. ∎

1.4. LA CONDITION DE CARLESON GÉNÉRALISÉE DANS LE CAS CONCRET $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{L^p}$. Soit $X = L^p(\mathbf{T})$ et $H^p(\mathbf{D})$ l'espace de Hardy, c'est-à-dire $f \in H^p(\mathbf{D})$ si et seulement si $f \in \mathrm{Hol}(\mathbf{D})$ et

$$\|f\|_{H^p}^p = \lim_{r \to 1-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p \, dt < \infty.$$

Il est connu que l'on peut identifier $H^p(\mathbf{D})$ à $H^p(\mathbf{T}) = \{f \in L^p(\mathbf{T}) : \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}$. Nous écrirons donc simplement H^p et remarquons aussi que $H^p = P_+ L^p(\mathbf{T})$, si $1 < p < \infty$. Nous posons $K_\theta^p = K_\theta^{L^p} = H^p \cap \theta H_-^p$ $(= P_\theta H^p$ pour $1 < p < \infty)$ et nous allons caractériser les suites d'interpolation libre au sens faible dans H^p pour $1 < p \leqslant \infty$.

Soit toujours $(\vartheta_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions intérieures et $\theta = \prod_{n \geqslant 1} \vartheta_n$. Dans [20], V.I. Vasyunin a introduit la condition suivante: s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$|\theta(z)| \geqslant \delta \inf_{n \geqslant 1} |\vartheta_n(z)|, \quad z \in \mathbf{D},$$

nous dirons que $(\vartheta_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie la *condition de Carleson généralisée* (où condition de Carleson-Vasyunin) et nous écrirons $(\vartheta_n)_{n \geqslant 1} \in (\mathrm{CG})$. Nous appelerons δ la *constante de Carleson généralisée*, la condition (CG) généralise la *condition de Carleson*. En effet, si on prend $\vartheta_n = b_{\lambda_n}$, $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \geqslant 1}$, on obtient (cf. par exemple [13])

$$(\vartheta_n)_{n \geqslant 1} \in (\mathrm{CG}) \Leftrightarrow \Lambda \in (\mathrm{C}).$$

Avec cette notation nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 1.12. *Soit $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions intérieures et $1 < p \leqslant \infty$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes:*

(i) $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in (CG)$;

(ii) *Il existe $c < \infty$ telle que pour $\mu \in \ell^\infty$ où $\mu_k^2 = \mu_k$, il existe $f_\mu \in H^\infty$ avec $f_\mu - \mu_n \in \vartheta_n H^\infty$ et $\|f_\mu\| \leqslant c$;*

(iii) $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ *est d'interpolation libre au sens faible pour H^p;*

(iv) $(K^r_{\vartheta_n})_{n\geqslant 1}$ *est une base inconditionnelle pour $1 < r < \infty$.*

REMARQUES 1.13. Pour $p = 2$, l'équivalence entre (i), (ii) et (iv) est contenue dans la subsection 3.4 de [20] et entre toutes les quatre conditions dans [14]. Remarquons aussi que la condition (CG) implique toujours l'interpolation libre au sens faible (même dans un sens plus fort) dans un espace X, qui vérifie $H^\infty X \subset X$ (ce qui était remarqué dans [15], p. 233). En effet, si $f, f_n \in X$ sont telles que $f - f_n \in \vartheta_n X$ pour tout $n \geqslant 1$, et si $\mu \in \ell^\infty$, alors $gf - \mu_n f_n \in \vartheta_n X$ pour $n \geqslant 1$, où $g \in H^\infty$ est la fonction qui vérifie $g - \mu_n \in \vartheta_n H^\infty$ $(n \geqslant 1)$. Cette fonction g existe d'après [20]. Finalement nous remarquons que l'implication (i) $\Rightarrow$ (iv) pour $1 < p < \infty$ était démontrée dans [13] pour le cas particulier $\vartheta_n = b^{k_n}_{\lambda_n}$ avec $\sup_{n\geqslant 1} k_n < \infty$ et que l'équivalence entre (i) et (iii) dans le cas $\vartheta_n = b^{k_n}_{\lambda_n}$, $\mu \in \ell^\infty$ avec $\mu_n^2 = \mu_n$, sous la seule hypothèse $(b^{k_n}_{\lambda_n})_{n\geqslant 1} \in$ (CG), est démontrée dans [25].

Preuve du théorème 1.12. L'équivalence entre (i) et (ii) est une conséquence du paragraphe 3.4 de [20] (cette équivalence est en fait indépendante de p) et, d'après la remarque 1.13, comme $H^\infty H^p \subset H^p$, la condition (i) implique la condition (iii).

Nous allons distinguer les cas $p = \infty$ et $p < \infty$:

Pour $p = \infty$, l'implication 3) $\Longrightarrow$ 2) est une conséquence du théoreme 2.3 de [20], ce qui achève la preuve dans ce cas.

Dans le cas $p < \infty$, on obtient l'equivalence entre (iii) et (iv) pour $r = q$ à l'aide du corollaire 1.11. Il s'avère que les assertions sont en fait indépendentes de p Pour achever la preuve, il reste donc à démontrer que la condition (iv) pour $r = q$ entraîne la condition (ii). Nous procèdons de la même façon que dans [13] ou [15] où le cas $p = q = 2$ a été considéré. Supposons alors que $(K^q_{\vartheta_n})_{n\geqslant 1}$ soit une base inconditionnelle. De ce fait, les projections spectrales sont continues. La compression du shift $M_\theta = P_\theta z|_{K^p_\theta}$ vérifie

$$\mathcal{E}_n M_\theta^* = M_\theta^* \mathcal{E}_n \tag{1.4}$$

ce qui implique

$$\mathcal{E}_n^* \in \{M_\theta\}' = \{A : K^p_\theta \to K^p_\theta : M_\theta A = A M_\theta\}.$$

Afin d'étudier le commutant $\{M_\theta\}'$ de M_θ, on généralise le théorème du relèvement du commutant du cas hilbertien ($X = H^2$) au cas H^p.

THÉORÈME 1.14. *Soient $1 < p < \infty$, θ une fonction intérieure et $K_\theta^p = H^p \cap \theta H_-^p$, $M_\theta = P_\theta z|_{K_\theta^p}$. Si A (continu) commute avec M_θ, alors il existe une fonction $\varphi_0 \in H^\infty$ telle que*

$$A = P_\theta \varphi_0|_{K_\theta^p} \quad (= \varphi_0(M_\theta))$$

et

$$\frac{1}{\|P_-\|}\|\varphi_0\|_{H^\infty} \leqslant \|A\| \leqslant \|\varphi_0\|_{H^\infty}.$$

Preuve. En effet, sachant que le théorème de Nehari se généralise à $1 < p < \infty$ (ce qui était déjà remarqué dans [9]), on peut reprendre la démonstration du théorème du relèvement du commutant qui était présenté dans [15] pour le cas $p = 2$. Nous remarquons que dans le cas particulier $p = 2$, nous avons $\|P_-\| = 1$ et donc égalité des normes de A et φ_0. ∎

Revenons à la preuve du théorème 1.12. Nous appliquons le théorème du relèvement du commutant à $\mathcal{E}_\sigma^*$. Cet opérateur appartient à $\{M_\theta\}'$ et par conséquent il existe $\varphi_\sigma \in H^\infty$ telle que $\mathcal{E}_\sigma^* = P_\theta \varphi_\sigma|_{K_\theta^p}$ et $\frac{1}{\|P_-\|}\|\varphi_\sigma\|_{H^\infty} \leqslant \|\mathcal{E}_\sigma^*\| \leqslant \|\varphi_\sigma\|_{H^\infty}$. On passe à l'adjoint pour obtenir

$$\mathcal{E}_\sigma = P_+ \overline{\varphi}_\sigma|_{K_\theta^q} \tag{1.5}$$

et

$$\|\mathcal{E}_\sigma\| = \|\mathcal{E}_\sigma^*\|. \tag{1.6}$$

Comme $\mathcal{E}_\sigma|_{K_{\vartheta_n}^q} = I$ pour $n \in \sigma$ et $\mathcal{E}_\sigma|_{K_{\vartheta_n}^q} = 0$ pour $n \notin \sigma$, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma - 1 &\in \vartheta_n H^\infty \quad \text{pour} \quad n \in \sigma \\ \varphi_\sigma &\in \vartheta_n H^\infty \quad \text{pour} \quad n \notin \sigma. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Donc φ_σ interpole la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$, qui est égale à 1 pour $n \in \sigma$ et 0 sinon. En plus le fait que $(K_{\vartheta_n}^q)_{n\geqslant 1}$ soit une base inconditionnelle entraîn

$$\|\phi_\sigma\| \leqslant \sup_{\tau \in \mathcal{K}} \|\mathcal{E}_\sigma\| < \infty, \tag{1.8}$$

ce qui démontre (ii). ∎

2. L'ESPACE DES DONNÉES

2.1. OBSERVATIONS GÉNÉRALES. D'après la définition des suites $(f_n)_{n\geqslant 1}$ interpolables et la définition de l'opérateur de restriction généralisé (cf. l'introduction), nous pouvons identifier l'espace des suites interpolables à l'image RX_+ de R. Cette image sera un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(X_+/\vartheta_n X_+)$. Une façon naturelle de construire des sous-espaces de $\ell^\infty(X_+/\vartheta_n X_+)$ est donnée par $\ell(X_+/\vartheta_n X_+)$ avec un espace idéal de suites $\ell \subset \ell^\infty$, c'est-à-dire tel que pour $a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell$ et une suite numérique $b = (b_n)_{n\geqslant 1}$ avec $|b_n| \leqslant c\,|a_n|$ (la constante c ne dépend pas de n) on a $b \in \ell$. Pour ceci nous introduisons un nouveau type d'interpolation plus approprié à ces sous-espaces. Nous allons découvrir que dans le cas $X_+ = H^p$ la condition (CG) est toujours nécessaire et suffisante pour ce type d'interpolation.

DÉFINITION 2.1. On dit que la suite $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions intérieures est d'interpolation libre au sens des germes si pour une suite interpolable $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et pour toute suite $(g_n)_{n\geqslant 1} \subset X_+$ qui vérifie

$$\|g_n\|_{X_+/\vartheta_n X_+} \leqslant \|f_n\|_{X_+/\vartheta_n X_+}$$

on a aussi $(g_n)_{n\geqslant 1}$ interpolable.

Le résultat suivant illustre que ce type d'interpolation est canonique pour $RX_+ = \ell(X_+/\vartheta_n X_+)$.

LEMMA 2.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ *est d'interpolation libre au sens des germes.*

(ii) *Il existe* $\ell \subset \ell^\infty$ *un sous-espace vectoriel idéal tel que*

$$RX_+ = \ell(X_+/\vartheta_n X_+)\,.$$

REMARQUE 2.3. (i) Ce lemme se démontre dans un cadre plus général, si on remplace $(\vartheta_n X_+)$ par une famille de sous-espaces fermés $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et si on redéfinit l'interpolation libre au sens des germes convenablement.

(ii) Ce lemme est une conséquence d'un lemme de [13] sur les ℓ-bases, si X vérifie les ipothèses dans l'introduction du paragraphe 1.3 (ce qui n'est, par exemple, pas le cas pour H^∞.

Clairement, l'interpolation libre au sens des germes entraîne interpolation libre au sens faible.

2.2. LE CAS CONCRET $X_+ = H^p$. Nous allons démontrer le résultat suivant qui était conjecturé en 1986 par N.K. Nikolski et S.V. Khrushchëv (cf. [16]).

THÉORÈME 2.4. *Si* $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathrm{CG})$ *et* $1 < p \leqslant \infty$, *alors*

$$RH^p = \ell^p\left(H^p/\vartheta_n H^p\right).$$

REMARQUE 2.5. (i) En principe, la description de l'espace des données RX_+ est contenue dans le théorème 1.2 de [13]. Elle est valable si on arrive à démontrer que $\mathcal{X}'$ est une ℓ-base. Nous pourrons déduire de la preuve que dans le cas $X_+ = H^p$, $\mathcal{X}' = (\vartheta_n' H^p \cap \theta H^p_-)_{n\geqslant 1}$ est une ℓ^p-base.

(ii) Ce théorème est connu pour $p = \infty$ (cf. [14]) et pour le cas hilbertien $p = 2$ (cf. théorème 1.2 de [13] et les remarques qui suivent). Pour le cas $p = 2$, $\vartheta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$, voir aussi le théorème d'interpolation (cf. [15], p. 224 et [14]).

(iii) Un résultat très proche de ce théorème se trouve dans [25] pour le cas $0 < p \leqslant \infty$ et $\vartheta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$. En effet, dans cet article, on démontre l'équivalence entre la condition (CG) et l'interpolation libre dans espace de données plus grand. Ainsi, ce résultat permet de montrer que toutes les suites dans $\ell^p(H^p/b_{\lambda_n}^{k_n} H^p)$ sont interpolables si $(b_{\lambda_n}^{k_n})_{n\geqslant 1} \in (\mathrm{CG})$.

Avant de justifier ce résultat, nous énonçons le

COROLLAIRE 2.6. *Soit* $1 < p \leqslant \infty$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in (CG)$;

(ii) $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ *est d'interpolation libre au sens des germes;*

(iii) $RH^p = \ell^p\left(H^p/\vartheta_n H^p\right)$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (iii): D'après le théorème 2.4.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): D'après le lemme 2.2.

(ii) $\Rightarrow$ (i): L'interpolation libre au sens des germes entraîne interpolation libre au sens faible, et, d'après le théorème 1.12, celle-ci est équivalente à $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in$ (CG). ∎

Nous allons donner une *esquisse de la preuve*, qui ne se veut point rigoureuse. Pour $p < \infty$, nous pouvons comparer R à l'opérateur R_p qui projette f sur la base $(\mathcal{E}_n^* K_\theta^p)_{n\geqslant 1}$ (on interprète $\mathcal{E}_n$ comme définie sur K_θ^q). Ceci est en effet possible grâce à $\mathcal{E}_n^* f - f \in \vartheta_n H^p$. Nous définirons ensuite un opérateur d'interpolation Q_p, qui permettra de démontrer la surjectivité de R. Nous allons démontrer la continuité de ces deux opérateurs au cas $2 \leqslant p < \infty$ (lemmes 2.11, 2.12), ce qui démontrera le théorème dans ce cas (à l'aide du lemme 2.10). Nous allons ensuite passer au dual pour obtenir les opérateurs $Q_q' = R_p^*$ et $R_q' = Q_p^*$. Un petit calcul montre que R_q' projette $f \in K_\theta^q$ sur $(\mathcal{E}_n K_\theta^q)_{n\geqslant 1}$ (toujours en interprètant $\mathcal{E}_n$ comme étant définie sur K_θ^q). Or, $\mathcal{E}_n f - f \in \ker \mathcal{E}_n = K_{\vartheta_n'}^q \not\subset \vartheta_n H^q$. Et donc R_q' ne peut pas être identifié à l'opérateur de restriction généralisé R. Nous allons contourner ce problème à l'aide d'une isométrie sesqui-linéaire (lemme 2.13), qui nous permettra de passer de R'_q à R_q et de Q'_q à Q_q.

Nous allons maintenant préciser les détails de la preuve du théorème 2.3.

Dans l'esquisse de la preuve, nous avons pu observer l'interaction entre les bases duales $(\mathcal{E}_n K^q_\theta)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathcal{E}^*_n K^p_\theta)_{n\geqslant 1}$ en supposant dans un premier temps $2 \leqslant p < \infty$. En effet, nous aurons besoin de ces deux bases sur toute l'échelle $1 < p < \infty$. Or le théorème est connu pour le cas particulier $p = \infty$ (voir la remarque 2.5), et il suffit donc de considérer le cas $1 < p < \infty$.

Mettons les idées en clair. Prenons comme dualité toujours $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Cette dualité nous permet d'identifier $(H^p)^* = H^q$ et à l'aide de l'identification (1.2) nous avons donc $(K^p_\theta)^* \simeq K^q_\theta$ pour une fonction intérieure θ. Nous choisissons en particulier $\theta = \prod_{n\geqslant 1} \vartheta_n$. D'après le théorème 1.12, comme $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in$ (CG), $(K^p_{\vartheta_n})_{n\geqslant 1} = (\mathcal{E}_n K^p_\theta)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle et puisque H^p, $1 < p < \infty$, est réfléxif, $(\mathcal{E}^*_n K^p_\theta)_{n\geqslant 1}$ l'est aussi.

Soit $1 < p < \infty$. Pour bien distinguer les espaces sur lesquels opèrent les projections, nous allons écrire $\mathcal{E}^p_n$ pour $\mathcal{E}_n : K^p_\theta \to K^p_\theta$. Nous considérons:

(i) K^p_θ et sa base $(K^p_{\vartheta_n})_{n\geqslant 1}$ avec les projections correspondantes $\mathcal{E}^p_n$, et

(ii) K^p_θ et sa base $(Y^p_n)_{n\geqslant 1} = ((\mathcal{E}^q_n)^* K^p_\theta)_{n\geqslant 1}$ avec les projections correspondantes $\mathcal{E}^{q*}_n = (\mathcal{E}^q_n)^*$.

REMARQUES 2.7. (i) Puisque $\mathcal{E}_n\mathcal{E}_k = \delta_{nk}\mathcal{E}_n$, nous avons pour les suites $(f_n)_{n\geqslant 1}$, $f_n \in K^p_{\vartheta_n}$, à support fini $\mathcal{E}^p_k\Big(\sum_{n\geqslant 1} f_k\Big) = f_k$, et pour $(g_n)_{n\geqslant 1}$, $g_n \in Y^p_n$, à support fini $\mathcal{E}^{q*}_k\Big(\sum_{n\geqslant 1} g_n\Big) = g_k$.

(ii) Sur l'ensemble $K^p_\theta \cap K^q_\theta$, qui est dense dans les espaces K^p_θ et K^q_θ, nous avons $\mathcal{E}^p_n = \mathcal{E}^q_n$ et $\mathcal{E}^{p*}_n = \mathcal{E}^{q*}_n$.

(iii) Comme K^p_θ possède un complémentaire topologique, nous pouvons prolonger $\mathcal{E}^p_n$ et $\mathcal{E}^{q*}_n$ par zéro sur θH^p: $\mathcal{E}^p_k\Big(\sum_{n\geqslant 1} f_k + \theta f\Big) = f_k$ et $\mathcal{E}^{q*}_k\Big(\sum_{n\geqslant 1} g_k + \theta g\Big) = g_k$, pour $f, g \in H^p$. Ceci nous permet maintenant d'introduire les opérateurs dont nous avons parlé dans l'esquisse de la preuve.

DEFINITION 2.8. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions $f_n \in H^p$, $n \geqslant 1$, $f_n = 0$ à partir d'un certain rang $N \in \mathbf{N}$, et $f \in H^p$. Nous définissons:

$$Q_p(f_n)_{n\geqslant 1} = \sum_{n\geqslant 1} \mathcal{E}^{q*}_n f_n, \quad R_p(f) = (\mathcal{E}^{q*}_n f)_{n\geqslant 1},$$

$$Q'_p(f_n)_{n\geqslant 1} = \sum_{n\geqslant 1} \mathcal{E}^p_n f_n, \quad R'_p(f) = (\mathcal{E}^p_n f)_{n\geqslant 1}.$$

REMARQUE 2.9. Q_p est en effet un opérateur d'interpolation au sens de la définition 1.1, c'est-à-dire $Q_p(f_n)_{n\geqslant 1} - f_n \in \vartheta_n H^p$, $n \geqslant 1$ (ce qu'on vérifie immédiatement sur les suites à support fini). Pour $p = 2$, sa restriction à $(Y_n^2)_{n\geqslant 1}$ est justement l'opérateur $\mathcal{J}_{\mathcal{X}'}$ qui a été étudié dans [15] (voir aussi [13]).

LEMMA 2.10. *Soit $1 < p < \infty$. Si les applications*

$$Q_p : \ell^p(H^p) \to H^p,$$

$$R_p : H^p \to \ell^p(H^p)$$

sont continues, alors $RH^p = \ell^p(H^p)$.

Preuve. Commençons par $RH^p \subset \ell^p(H^p/\vartheta_n H^p)$. Vérifions pour $f \in H^p$

$$\mathcal{E}_n^{q*} f + \vartheta_n H^p = f + \vartheta_n H^p, \quad n \geqslant 1. \tag{2.1}$$

Ceci est équivalent à $\mathcal{E}_n^{q*} f - f \in \vartheta_n H^p$, $n \geqslant 1$. Nous pouvons supposer $f \in K_\theta^p$, car $\mathcal{E}_n^{q*}$ était prolongé par zéro sur θH^p. Or, d'après la proposition 1.8, $\ker \mathcal{E}_n^{q*}|_{K_\theta^p} \subset \vartheta_n H^p$, d'où (2.1). Si on définit $\pi_p : (f_n)_{n\geqslant 1} \mapsto (f_n + \vartheta_n H^p)$, $\ell^p(H^p) \to \ell^p(H^p/\vartheta_n H^p)$, nous avons $R = \pi_p R_p$, ce qui démontre la continuité de R.

Afin de démontrer la surjectivité de R, nous prenons une suite à support fini $(F_n)_{n\geqslant 1} = (f_n + \vartheta_n H^p)_{n\geqslant 1} \in \ell^p(H^p/\vartheta_n H^p)$, $(f_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^p(H^p)$, et nous obtenons $(\mathcal{E}_n^{q*} f_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^p(H^p)$, puisque $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|\mathcal{E}_n^{q*}\| < \infty$. Nous avons $f = Q_p(\mathcal{E}_n^{q*} f_n)_{n\geqslant 1} \in H^p$, car Q_p est continue. Et il nous reste à démontrer $\pi_p R_p f = Rf = (F_n)_{n\geqslant 1} = (f_n + \vartheta_n H^p)_{n\geqslant 1}$. Or $\pi_p R_p(f) = (\mathcal{E}_n^{q*} f_n + \vartheta_n H^p)_{n\geqslant 1} = (f_n + \vartheta_n H^p)_{n\geqslant 1}$ grâce à (2.1). ∎

Ceci nous ramène donc à démontrer la continuité de Q_p et de R_p. Nous abordons celle de Q_p, $2 \leqslant p < \infty$.

LEMMA 2.11. *Soit $2 \leqslant p < \infty$ et $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in$ (CG). Alors $Q_p : \ell^p(H^p) \to H^p$ est continu.*

Preuve. Soit $\pi_\theta : f \mapsto f + \theta H^p$, $H^p \to H^p/\theta H^p$ la projection canonique de H^p sur $H^p/\theta H^p$ et appelons $T_p = \pi_\theta Q_p : \ell^p(H^p) \to H^p/\theta H^p$, $1 < p < \infty$. D'après le théorème des bases de Riesz (cf. [15]), Q_2 est continu. Ainsi T_2 est continu et T_2 associe à $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la classe F telle que pour $f \in F$ nous avons $f - f_n \in \vartheta_n H^2$ (voir aussi la remarque 2.9).

D'après [14] nous avons

$$(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathrm{CG}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour toute suite } (f_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^\infty(H^\infty) \text{ il existe } f \in H^\infty; \\ \text{telle que } f - f_n \in \vartheta_n H^\infty \text{ pour tout } n \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Donc $T_\infty : \ell^\infty(H^\infty) \to H^\infty/\theta H^\infty$ est un opérateur qui à $(f_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^\infty(H^\infty)$ associe la classe F telle que pour $f \in F$ nous avons $f - f_n \in \vartheta_n H^\infty$. D'après le résultat cité ([14]), T_∞ est continu. Nous vérifions que si nous prenons $(f_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^p(H^\infty)$ (dense dans $\ell^p(H^p)$), nous avons pour $f \in T_\infty(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $g \in T_p(f_n)_{n\geqslant 1}$ le résultat $f - g \in \theta H^1$, ce qui nous permet d'identifier les opérateurs T_∞ et T_p et ainsi d'appliquer les résultats de l'interpolation entre les espaces de Banach à T_p.

Nous définissons $\tilde{P}_- : f + H^p \mapsto P_- f$, $L^p/H^p \to L^p$ $(1 < p < \infty)$, et $\tilde{P}_- : L^\infty/H^\infty \to \mathrm{BMO}$. Cet opérateur ainsi que la multiplication $\overline{\theta} : f + \theta H^p \mapsto \overline{\theta} f + H^p$, $H^p/\theta H^p \to L^p/H^p$ sont continus. Alors

$$\tilde{P}_-\overline{\theta}T_\infty : \ell^\infty(H^\infty) \to \mathrm{BMO}$$

$$\tilde{P}_-\overline{\theta}T_2 : \ell^2(H^2) \to L^2.$$

Appliquons à cet opérateur l'interpolation entre les espaces de Banach (cf. [10], [7] et [12]) pour obtenir $\tilde{P}_-\overline{\theta}T_p : \ell^p(H^p) \to L^p$, $1 < p < \infty$ et multiplions par θ pour obtenir la continuité de

$$\theta\tilde{P}_-\overline{\theta}T_p : \ell^p(H^p) \to L^p, \quad 1 < p < \infty.$$

Or $T_p = \pi_\theta Q_p$, et pour une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ à support fini nous avons maintenant $f = Q_p(f_n)_{n\geqslant 1} \in K_\theta^p$, ce qui permet de montrer $\theta\tilde{P}_-\overline{\theta}\pi_\theta f = \theta\tilde{P}_-\overline{\theta}(f + \theta H^p) = \theta P_-\overline{\theta} f = P_\theta f = f$, c'est-à-dire sur les suites à support fini, nous avons $\theta\tilde{P}_-\overline{\theta}T_p = \theta\tilde{P}_-\overline{\theta}\pi_\theta Q_p = Q_p$. La continuité de $\theta\tilde{P}_-\overline{\theta}T_p$ montre alors celle de Q_p. ∎

LEMMA 2.12. *Soit* $2 \leqslant p < \infty$ *et* $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathrm{CG})$. *Alors* $R_p : H^p \to \ell^p(H^p)$ *est continu.*

Preuve. Nous rappelons que $R_p f = (\mathcal{E}_n^{q*} f)_{n\geqslant 1}$. Comme $\mathcal{E}_n^{q*} f + \vartheta_n H^p = f + \vartheta_n H^p$, on voit allègrement $\|f\|_{H^p/\vartheta_n H^p} \leqslant \|\mathcal{E}_n^{q*} f\|_{H^p}$, $n \geqslant 1$. Mais nous nous intéressons plutôt à l'estimation inverse. Nous avons à démontrer $\|\mathcal{E}_n^{q*} f\|_{H^p} \leqslant c\|f + \vartheta_n g\|_{H^p}$ pour toute fonction $g \in H^p$. Puisque nous avons prolongé $\mathcal{E}_n^{q*}$ sur θH^p par zéro, nous avons $\vartheta_n g \in \vartheta_n H^p = \vartheta_n H^p \cap \theta H_-^p + \theta H^p = \ker \mathcal{E}_n^{q*}$, ce qui entraîne $\|\mathcal{E}_n^{q*} f\|_{H^p} = \|\mathcal{E}_n^{q*}(f + \vartheta_n g)\|_{H^p} \leqslant c\|f + \vartheta_n g\|_{H^p}$ $(c = \sup_{n\geqslant 1} \|\mathcal{E}_n^{q*}\|)$, d'où la majoration $\|\mathcal{E}_n^{q*} f\|_{H^p} \leqslant c\|f\|_{H^p/\vartheta_n H^p}$. Ainsi, afin de démontrer la continuité de R_p, il suffit (et il est nécessaire) de démontrer $\sum_{n\geqslant 1} \|f\|_{H^p/\vartheta_n H^p}^p < \infty$ pour $f \in H^p$. Par ailleurs nous avons (cf. formule (1.3)) $\|f\|_{H^p/\vartheta_n H^p} \leqslant \|P_{\vartheta_n} f\|_{H^p} = \|P_-\overline{\vartheta}_n f\|_{L^p}$, ce qui réduit le problème à démontrer la continuité de

$$A : H^p \to \ell^p(L^p),$$

$$f \mapsto (P_-\overline{\vartheta}_n f)_{n\geqslant 1},$$

pour $2 \leqslant p < \infty$. Or nous avons

$$A : H^\infty \to \ell^\infty(\mathrm{BMO}),$$
$$H^2 \to \ell^2(L^2).$$

En effet, la continuité au cas $p = \infty$ est une conséquence immédiate de celle de $P_- : L^\infty \to \mathrm{BMO}$ et au cas $p = 2$ elle se déduit du théorème des bases de Riesz ([15]): en effet l'application $(f_n)_{n\geqslant 1} \mapsto (\vartheta_n f_n)_{n\geqslant 1}$ est une isométrie sur $\ell^p(L^p)$ et donc la continuité de A est équivalente à celle de $f \mapsto (P_{\vartheta_n} f)_{n\geqslant 1}$, $H^2 \to \ell^2(H^2)$. Comme $\ker P_{\vartheta_n} = \vartheta_n H^2 \supset \theta H^2$, il suffit de démontrer la continuité de ce dernier opérateur sur K_θ^2. Celle-ci est maintenant — grâce à $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathrm{CG})$ — une conséquence du théorème des bases de Riesz. A nouveau nous appliquons l'interpolation entre les espaces de Banach pour obtenir la continuité de $A : H^p \to \ell^p(L^p)$. ∎

Il nous reste le cas $1 < p < 2$ à étudier. Pour l'instant nous nous sommes servis de la continuité de Q_p et R_p, $2 \leqslant p < \infty$, pour démontrer $RH^p = \ell^p(H^p/\vartheta_n H^p)$. Nous pouvons en déduire la continuité des opérateurs adjoints $R'_q = Q_p^*$ et $Q'_q = R_p^*$. En effet ces deux égalités se vérifient directement à partir de la définition des opérateurs en question et le choix de la dualité $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur les suites $(f_n)_{n\geqslant 1}$ à support fini (cette dualité était beaucoup exploité dans [13]). Comme nous avons déjà remarqué dans l'esquisse de la preuve, l'opérateur Q'_q ne peut pas être comparé directement à $R : H^q \to \ell^q(H^q/\vartheta_n H^q)$, car $\pi_q Q'_q(f) = (\mathcal{E}_n^q f + \vartheta_n H^q)_{n\geqslant 1} \neq (f + \vartheta_n H^q)_{n\geqslant 1}$. Afin de contourner ce problème, nous introduisons l'opérateur

$$\mathcal{J} : L^p \to L^p,$$
$$f \mapsto \theta \bar{z} \bar{f}, \tag{2.3}$$

qui nous permettra de passer de Q'_q à R_q et de R'_q à Q_q. Nous rappellons la définition $Y_n^p = \mathcal{E}_n^{q*} K_\theta^p = \vartheta'_n H^p \cap \theta H_-^p$.

LEMMA 2.13. *Soit $\mathcal{J}$ comme dans* (2.3) *et* $1 < p < \infty$. *Alors*

$$\mathcal{J} : K_\theta^p \to K_\theta^p$$

est une involution isométrique sesqui-linéaire, $\mathcal{J} Y_n^p = K_{\vartheta_n}^p$, $\mathcal{J} K_{\vartheta_n}^p = Y_n^p$ *et donc*

$$\mathcal{E}_n^p = \mathcal{J}\mathcal{E}_n^{q*}\mathcal{J}, \qquad \mathcal{E}_n^{q*} = \mathcal{J}\mathcal{E}_n^p\mathcal{J}.$$

Preuve. A partir de la définition de $\mathcal{J}$ et celle de K_θ^p, $K_{\vartheta_n}^p$ et Y_n^p, on vérifie directement les inclusions $\mathcal{J} K_\theta^p \subset K_\theta^p$ et $\mathcal{J} Y_n^p \subset K_{\vartheta_n}^p$. Puisque $\mathcal{J}$ est une involution, $\mathcal{J}^2 = I$ (calcul direct), les inclusions sont en effet des égalités. ∎

Les lemmes 2.11, 2.12 et 2.13 permettent d'énoncer le

COROLLAIRE 2.14. *Soit* $1 < q < 2$ *et* $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in$ (CG). *Alors*

$$R_q : H^q \to \ell^q(H^q),$$

$$Q_q : \ell^q(H^q) \to H^q.$$

Preuve. Nous avons déjà remarqué la continuité de $Q'_q = R^*_p$ et $R'_q = Q^*_p$. Sur les suites $(f_n)_{n\geqslant 1}$ à support fini, nous vérifions à l'aide du lemme 2.13 l'égalité $Q_q = \mathcal{J} Q'_q \mathcal{J}$. Et pour $f \in H^q$ nous vérifions $R_q = \mathcal{J} R'_q \mathcal{J}$. Puisque $\mathcal{J}$ est une isométrie, les opérateurs R_q et Q_q sont alors continus. ∎

Ainsi nous obtenons

COROLLAIRE 2.15. *Soit* $1 < p < \infty$ *et* $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1} \in$ (CG). *Alors*

$$R_p : H^p \to \ell^p(H^p),$$

$$Q_p : \ell^p(H^p) \to H^p.$$

Preuve du théorème 2.4. Le lemme 2.10, le corollaire précédent et la remarque sur l'interpolation dans H^∞ montrent le théorème . ∎

3. CARACTÉRISATION DES TRACES $H^p|_\Lambda$

Nous disons que la suite $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ dans $\mathbb{D}$ vérifie la condition de Blaschke, si $\sum_{n\geqslant 1} (1 - |\lambda_n|) < \infty$, et nous définissons le produit de Blaschke B associé à une telle suite par $B = \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}$. Soit maintenant $(B_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de produits de Blaschke, telle que $B = \prod_{n\geqslant 1} B_n$. Il est clair que l'application

$$\Phi : f|_\Lambda \mapsto (f + B_n H^p)_{n\geqslant 1}, \quad f \in H^p$$

est bien définie et bijective de $H^p|_\Lambda$ sur RH^p. Si de plus la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la condition (CG), alors $H^p|_\Lambda$ s'identifie au sens naturel à l'espace $\ell^p(H^p/B_n H^p)$ (cf. aussi théorème 2.4).

Le but de ce paragraphe est de caractériser les traces $f|_\Lambda$, $f \in H^p$, dans le cas où Λ est une réunion finie de suites de Carleson. Il se trouve que c'est juste le cas si $B = \prod_{n\geqslant 1} B_n$ est un produit de Blaschke à zéros simples dont les facteurs vérifient $(B_n)_{n\geqslant 1} \in$ (CG) et $\sup_{n\geqslant 1} \deg B_n < \infty$ (ici nous désignons par $\deg B$ le nombre de zéros du produit de Blaschke B en comptant les multiplicités). En utilisant alors l'identification de $H^p|_\Lambda$ à $RH^p = \ell^p(H^p/B_nH^p)$ et une description locale des espaces H^p/B_nH^p en fonction des différences divisées par rapport à la métrique pseudohyperbolique (voir subsection 3.2), on obtiendra une caractérisation de $H^p|_\Lambda$.

3.1. LES RÉUNIONS FINIES DE SUITES DE CARLESON. Dans ce paragraphe, nous allons caractériser les réunions finies de suites de Carleson. La proposition 3.1 est une conséquence des théorèmes 5.5 et 5.6 de [20]. Ici nous allons donner une nouvelle démonstration de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii), qui utilise un résultat de N.K. Nikolski et A.L. Volberg ([17]) et la partie géométrique de la démonstration du théorème 5.5 de V.I. Vasyunin. Dans cette démonstration, on raisonne à l'aide des distances hyperboliques ρ qui sont définies par $\operatorname{th}\frac{\rho(\lambda,\mu)}{2} = |b_\lambda(\mu)|$. Mais si on remplace partout la métrique hyperbolique par la métrique pseudohyperbolique, on ne change pas la géométrie et le raisonnement reste le même.

PROPOSITION 3.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Soit* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbf{D}$. *Alors* $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$ *avec* $\Lambda_i \in (\mathrm{C})$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant N$.

(ii) *Il existe une suite de produits de Blaschke* $(B_n)_{n\geqslant 1}$ *dans* $\mathbf{D}$, *telle que* $\sup_{n\geqslant 1} \deg B_n \leqslant N$, $(B_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathrm{CG})$ *et* $\Lambda = \bigcup_{n\geqslant 1} \sigma_n$, $\sigma_n = \{\lambda \in \mathbf{D} : B_n(\lambda) = 0\}$.

Preuve. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est une conséquence immédiate du théorème 5.6 de [20].

Pour l'implication (1) $\Rightarrow$ (ii), nous posons $B = \prod_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$. Soit $0 < \epsilon < 1$. Nous considérons la décomposition en composantes connexes τ_n^ϵ de l'ensemble $L(B,\varepsilon) = \{z \in \mathbf{D} : |B(z)| < \varepsilon\}$. D'après les théorèmes 2.1 et A de [17], nous obtenons directement $\{B_n^\epsilon\}_{n\geqslant 1} \in (\mathrm{CG})$ où $B_n^\epsilon = \prod_{\lambda\in\sigma_n^\epsilon} b_\lambda$ et $\sigma_n^\epsilon = \Lambda \cap \tau_n^\epsilon$. Il reste à démontrer qu'il existe $0 < \epsilon_0 < 1$ tel que pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$ nous avons $\sup_{n\geqslant 1} |\sigma_n^\epsilon| \leqslant N$. Pour ceci il suffit de remarquer que pour tout $\rho > 0$ il existe $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ tel que

$$L(B,\varepsilon) \subset M^\rho = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega(\lambda,\rho),$$

où $\Omega(\lambda,\rho) = \{z \in \mathbf{D} : |b_\lambda(z)| < \rho\}$ est le disque pseudohyperbolique. Si on choisit ρ suffisament petit, l'ensemble M^ρ se décompose en des composantes connexes qui contiennent maintenant au plus N éléments d'après la partie géométrique de la démonstration du théorème 5.5 de Vasyunin (cf. [20]). ∎

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate, qui nous permet de décrire les traces $H^p|_\Lambda$ pour $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (C)$ à partir de l'espace des données.

COROLLAIRE 3.2. *Soit* $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (C)$, $\Lambda \in \mathbf{D}$. *Alors il existe* $(B_n)_{n\geqslant 1}$ *telle que* $\sup_{n\geqslant 1} \deg B_n \leqslant N$ *et*

$$\Phi : H^p|_\Lambda \to \ell^p\left(H^p/B_n H^p\right)$$

est une isomorphie.

REMARQUE 3.3. Dans la proposition 3.1, pour tout $0 < \eta < 1$ on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour $n \geqslant 1$ et $\lambda, \mu \in \sigma_n^\varepsilon$

$$|b_\lambda(\mu)| \leqslant \eta. \tag{3.1}$$

Pour voir ceci, il suffit de choisir ρ assez petit dans la démonstration de la proposition 3.1. Nous allons travailler en particulier avec $\eta = 1/3$.

3.2. CARACTÉRISATION LOCALE DE LA NORME $\|\cdot\|_{H^p/BH^p}$ POUR $deg\, B = N < \infty$. Soit $1 < p \leqslant \infty$. Comme $\dim H^p/BH^p = deg\, B = N < \infty$, la projection P_B sera continue. Nous donnons une estimation de sa norme. Pour $p = \infty$, il est connu (d'après Pekarskii ([18])) que $\|P_B\|_{H^\infty \to H^\infty} \leqslant 2N$. Dans le cas hilbertien $p = 2$, on a $\|P_B\|_{H^2 \to H^2} = 1$. L'interpolation réelle (cf. [2], [10]) fournit alors $\|P_B\|_{H^p \to H^p} \leqslant 2N$ pour $2 \leqslant p \leqslant \infty$ et par dualité on obtient $\|P_B\|_{H^q \to H^q} \leqslant 2N$ pour $1 < q \leqslant 2$. A l'aide de (1.3), nous obtenons

$$\|f\|_{H^p/BH^p} \leqslant \|P_B f\|_{H^p} \leqslant 2N\|f\|_{H^p/BH^p}.$$

Tout ceci nous ramène alors à la discussion de $P_B f$. Nous allons donc donner une forme explicite de P_B qui nous permettra de caractériser $\|P_B f\|_{H^p}$ en fonction des différences divisées par rapport à la métrique pseudohyperbolique. Nous commençons par la définition de ces différences divisées (cf. [21]):

DEFINITION 3.4. Soit $\sigma = \{\lambda_k\}_{k\geqslant 1} \subset \sigma$ et f une fonction définie sur $\mathbf{D}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$. Soit $\lambda^{(k)} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ $(\lambda_i \in \sigma, i \geqslant 1)$ et $\lambda^{(k+1)} = (\lambda^{(k)}, \lambda_{k+1})$. Alors on définit

$$\Delta^0 f(\lambda^{(1)}) = f(\lambda_1)$$

$$\Delta^1 f(\lambda^{(2)}) = \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{b_{\lambda_1}(\lambda_2)}$$

et

$$\Delta^k f(\lambda^{(k+1)}) = \frac{\Delta^{k-1} f(\lambda^{(k-1)}, \lambda_{k+1}) - \Delta^{k-1} f(\lambda^{(k-1)}, \lambda_k)}{b_{\lambda_k}(\lambda_{k+1})}.$$

Et nous obtenons le

THÉORÈME 3.5. *Soit B un produit de Blaschke de degré $\deg B = N < \infty$ tel que $|b_\lambda(\mu)| < 1/3$ pour $\lambda, \mu \in \sigma = \{z \in \mathbb{D} : B(z) = 0\}$ et $1 < p \leqslant \infty$. Alors il existe deux constantes c_0, c_1 telles que pour toute fonction $f \in H^p$ on a*

$$c_0\left(\sum_{k=1}^{N}(1-|\lambda_k^2|)|\,\Delta^{k-1} f(\lambda^{(k)})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_{H^p/BH^p}$$
$$\leqslant c_1\left(\sum_{k=1}^{N}(1-|\lambda_k^2|)|\,\Delta^{k-1} f(\lambda^{(k)})|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les constantes c_0, c_1 ne dépendent que de N et p. Pour $p = \infty$ on modifie la ℓ^p-norme de façon standard ($\sup_{k=1,\ldots,n} |\,\Delta^{k-1} f(\lambda^{(k)})|$).

REMARQUE 3.6. Pour des raisons techniques, nous allons démontrer l'équivalence entre $\|f\|_{H^p/BH^p}$ et $\sum_{k=1}^{N}(1-|\lambda_k^2|)^{\frac{1}{p}}|\Delta^{k-1} f(\lambda^{(k)})|$, $f \in H^p$, ce qui est possible grâce à l'équivalence de toutes les normes dans un espace de dimension finie.

Pour démontrer le théorème, nous allons construire un système biorthogonal $(\{\varphi_i\}_{i=1}^N, \{\psi_i\}_{i=1}^N)$, qui vérifie

$$P_B f = \sum_{i=1}^{N}\langle f, \varphi_i\rangle\psi_i, \quad f \in H^p, \tag{3.2}$$

$$\Delta^{i-1} f(\lambda^{(i)}) = \langle f, \varphi_i\rangle, \quad f \in H^p, \tag{3.3}$$

et si on a de plus $|b_\lambda(\mu)| \leqslant 1/3$ pour $\lambda, \mu \in \sigma$, alors pour $1 < p \leqslant \infty$

$$\|\psi_i\|_{H^p} \leqslant c\,(1-|\lambda_i^2|)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.4}$$

$$\|\varphi_i\|_{H^p} \leqslant c\,(1-|\lambda_i^2|)^{-\frac{1}{q}}. \tag{3.5}$$

Ce système se déduit des fonctions de Malmquist qui sont données par

$$\alpha_i(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}_i z}\prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k}(z), \quad z \in \mathbb{D},$$
$$\beta_i(z) = \frac{1-|\lambda_i^2|}{1-\overline{\lambda}_i z}\prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k}(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

où $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ sont les zéros de B: $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{D} : B(\lambda) = 0\} = \{\lambda_i\}_{i=1}^N$. Il est connu (cf. [15], Malmquist-Walsh-Lemma), que le système $(\{\alpha_i\}_{i=1}^N, \{\beta_i\}_{i=1}^N)$ est biorthogonal (par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle$) et que $K_B^q = \mathrm{span}(\alpha_i : i = 1,\dots,N) = \mathrm{span}(\beta_i : i = 1,\dots,N) = K_B^p$. Nous allons poser

$$\varphi_i = \begin{cases} \alpha_i - |\lambda_{i-1}|\alpha_{i-1} & i = 2,\dots,N; \\ \alpha_1 & i = 1; \end{cases}$$

$$\psi_k = \sum_{j=k}^{N}\left(\prod_{l=k}^{j-1}|\lambda_l|\right)\beta_j.$$

On se persuade que le système $(\{\varphi_i\}_{i=1}^N, \{\psi_i\}_{i=1}^N)$ est bien biorthogonal et qu'il vérifie bien les propriétés (3.2)–(3.5). En effet la représentation (3.2) de P_B est automatique. Comme $\ker P_B = BH^p$, nous pouvons écrire $f = \sum_{i=1}^N \langle f,\varphi_i\rangle\psi_i + R$ avec $R \in BH^p$. En particulier, nous avons $f(\lambda) = \sum_{i=1}^N \langle f,\varphi_i\rangle\psi_i(\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma$. Cette égalité et la définition de ψ_i permettent de démontrer la propriété (3.3). Pour $i = 1$, il suffit de remarquer que $\varphi_1 = \alpha_1 = k_{\lambda_1}$. Pour $i = 2$, nous vérifions

$$\begin{aligned}\psi_1(\lambda_2) = \beta_1(\lambda_2) + |\lambda_1|\beta_2(\lambda_2) &= \frac{1-|\lambda_1^2|}{1-\overline{\lambda}_1\lambda_2} + |\lambda_1|\frac{1-|\lambda_2^2|}{1-\overline{\lambda}_2\lambda_2}\frac{|\lambda_1|}{\lambda_1}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\overline{\lambda}_1\lambda_2} \\ &= \frac{1-|\lambda_1^2|+\overline{\lambda}_1(\lambda_1-\lambda_2)}{1-\overline{\lambda}_1\lambda_2} = 1,\end{aligned}$$

et $\psi_2(\lambda_2) = \beta_2(\lambda_1) = b_{\lambda_1}(\lambda_2)$. Et donc $f(\lambda_2) = \langle f,\varphi_1\rangle\psi_1(\lambda_2) + \langle f,\varphi_2\rangle\psi_2(\lambda_2) = f(\lambda_1) + \langle f,\varphi_2\rangle b_{\lambda_1}(\lambda_2)$, ce qui justifie l'assertion au cas $i = 2$. Au cas général $i \geqslant 2$, nous vérifions que les $\langle f,\varphi_i\rangle$ obéissent à la même loi de construction que les $\Delta^{i-1}f(\lambda^{(i)})$. D'après la définition nous avons

$$\Delta^i f(\lambda^{(i+1)}) = \frac{\Delta^{i-1}f(\lambda^{(i-1)},\lambda_{i+1}) - \Delta^{i-1}f(\lambda^{(i-1)},\lambda_i)}{b_{\lambda_i}(\lambda_{i+1})}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous obtenons $\Delta^{i-1}f(\lambda^{(i-1)},\lambda_{i+1}) = \langle f,\tilde{\varphi}_i\rangle$ où $\tilde{\varphi}_i = \tilde{\alpha}_i - |\lambda_{i-1}|\alpha_{i-1}$, $\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{1-\overline{\lambda}_{i+1}z}\prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k}$ (on remplace λ_i par λ_{i+1}) et $\Delta^{i-1}f(\lambda^{(i)}) = \langle f,\varphi_i\rangle$. Il suffit donc de vérifier $\langle f,\varphi_{i+1}\rangle = \langle f,\tilde{\varphi}_i - \varphi_i\rangle / b_{\lambda_i}(\lambda_{i+1})$. Ce calcul est fastidieux et nous l'omettons ici.

Afin de vérifier les autres propriétés, nous avons besoin du résultat suivant:

$$|b_\lambda(\mu)| \leqslant \frac{1}{3} \quad \text{implique} \quad \frac{2}{3} \leqslant \frac{1-|\lambda^2|}{|1-\overline{\lambda}\mu|} \leqslant \frac{4}{3}. \tag{3.6}$$

En effet, ceci est une conséquence de l'égalité évidente

$$|1-|\lambda|b_\lambda(\mu)| = \frac{1-|\lambda^2|}{|1-\overline{\lambda}\mu|}.$$

En plus, nous avons besoin d'une estimation de la norme du noyau reproduisant $k_\lambda = 1/(1-\overline{\lambda}z)$. Par dualité, par exemple, on peut démontrer qu'il existe une constante c_p telle que pour $1 < p \leqslant \infty$

$$||k_\lambda||_{H^p} \leqslant c_p\,(1-|\lambda^2|)^{-\frac{1}{q}}, \quad \lambda \in \mathbf{D}.$$

Maintenant on peut majorer premièrement:

$$\tag{3.7} \begin{aligned} ||\psi_i||_{H^p} &\leqslant \sum_{j=i}^{N} ||\beta_j||_{H^p} = \sum_{j=i}^{N}(1-|\lambda_j^2|)||k_{\lambda_j}||_{H^p} \\ &\leqslant c_p \sum_{j=i}^{N}(1-|\lambda_j^2|)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2c_pN(1-|\lambda_i^2|)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

et deuxièmement ($i \geqslant 2$):

$$\tag{3.8} \begin{aligned} ||\varphi_i||_{H^p} &\leqslant ||\alpha_i||_{H^p} + ||\alpha_{i-1}||_{H^p} = ||k_{\lambda_i}||_{H^p} + ||k_{\lambda_{i-1}}||_{H^p} \\ &\leqslant 3c_p(1-|\lambda_i^2|)^{-\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

(au cas $i = 1$, le terme avec α_{i-1} disparaît), ce qui démontre (3.4) et (3.5).

Preuve du théorème 3.5. On distingue les deux cas $1 < p < \infty$ et $p = \infty$. Soit $1 < p < \infty$:

$$|\langle f, \varphi_i\rangle|(1-|\lambda_i^2|)^{\frac{1}{p}} \leqslant ||P_Bf||_{H^p}||\varphi_i||_{H^q}(1-|\lambda_i^2|)^{\frac{1}{p}} \leqslant 3cq\,||P_Bf||_{H^p}.$$

Soit $p = \infty$. D'après Pekarskii, on a $|\langle g, \alpha_i\rangle| = |P_+\Big(\prod_{k=1}^{i-1}\overline{b_{\lambda_k}g}\Big)(\lambda_i)| \leqslant 2N\,||g||_{H^\infty}$. Et donc (pour $i \geqslant 2$)

$$|\langle f, \varphi_i\rangle| \leqslant (|\langle P_Bf, \alpha_i\rangle| + |\langle P_Bf, \alpha_{i-1}\rangle|) \leqslant 4N\,||P_Bf||_{H^\infty}.$$

(Au cas $i = 1$, le terme avec α_{i-1} disparaît). On obtient dans les deux cas

$$\begin{aligned} ||f||_{H^p/BH^p} &\leqslant ||P_Bf||_{H^p} \leqslant 2c_pN\sum_{i=1}^{N}|\langle f, \varphi_i\rangle|(1-|\lambda_i^2|)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant C\cdot N\cdot ||P_Bf||_{H^p} \leqslant 2CN^2||f||_{H^p/BH^p}. \end{aligned}$$

($C = 2c_pN\max(3cq, 4N)$). Si on remplace $\langle f, \varphi_i\rangle$ par $\Delta^{i-1}f(\lambda^{(i)})$ d'après la propriété (3.3), on obtient le théorème. ∎

Si $|b_\lambda(\mu)| \leqslant 1/3$, $\lambda, \mu \in \sigma$, nous pouvons choisir à l'aide de (3.6) un poids uniforme $1-|\lambda_0^2|$, $\lambda_0 \in \sigma$, c'est-à-dire il existe deux constantes c_0, c_1 dépendant seulement de N et de p, tel que pour toute fonction $f \in H^p$ on a

$$
\begin{aligned}
&c_0\,(1-|\lambda_0^2|)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} |\,\Delta^{k-1}\, f(\lambda^{(k)})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \|f\|_{H^p/BH^p} \leqslant c_1\,(1-|\lambda_0^2|)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} |\,\Delta^{k-1}\, f(\lambda^{(k)})|^p\right)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Pour $p=\infty$ on modifie la ℓ^p-norme de façon standard (cf. aussi théorème 3.5).

3.3. LA CARACTÉRISATION DE $H^p|_\Lambda$. Le corollaire 3.2, la remarque 3.3 ainsi que la caractérisation (3.9) entraînent immédiatement le théorème suivant.

THÉORÈME 3.7. *Soit* $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i \subset \mathbf{D}$, $\Lambda_i \in (\mathrm{C})$, $1 < p \leqslant \infty$. *Il existe alors une décomposition* $\Lambda = \bigcup_{i\geqslant 1} \sigma_i$ *telle que* $\sup_{i\geqslant 1} |\sigma_i| \leqslant N$, *et si on choisit une fois pour toute* $\lambda_{i,0} \in \sigma_i$ $(i \geqslant 1)$, *alors*

$$
H^p|_\Lambda = X^p = \left\{(a(\lambda))_{\lambda\in\Lambda} \in \mathbf{C}^\Lambda : \|a\|_{X^p} < \infty\right\}
$$

où

$$
\|a\|_{X^p} = \left\{\sum_{n\geqslant 1} (1-|\lambda_{n,0}^2|)\left(\sum_{k=1}^{|\sigma_n|} |\,\Delta^{k-1}\, a(\lambda_n^{(k)})|\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1<p<\infty
$$

$$
\|a\|_{X^\infty} = \sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=1}^{|\sigma_n|} |\,\Delta^{k-1}\, a(\lambda_n^{(k)})|
$$

où $\sigma_n = \{\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,|\sigma_n|}\}$ *et* $\lambda_n^{(k)} = (\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,k})$.

REMARQUE 3.8. (i) Comme $\sup_{n\geqslant 1} |\sigma_n| < \infty$, la norme $\|a\|_{X^\infty}$ est équivalente à

$$
\sup_{n\geqslant 1} \sup_{k=1,\ldots,|\sigma_n|} |\,\Delta^{k-1}\, a(\lambda_n^{(k)})|.
$$

(ii) Le cas $N=1$ a été étudié dans [19]. Pour $p=\infty$, c'est bien sûr le résultat de L. Carleson ([4]).

Nous allons maintenant donner une description de $H^p|_\Lambda$ qui ne dépend pas de la construction implicite de $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 1}$. Dans ce but, il nous faut une relation entre la norme quotient $\|\cdot\|_{H^p/BH^p}$ et les normes quotients $\|\cdot\|_{H^p/B_iH^p}$ des facteurs B_i, où $B = \prod_{i=1}^{n} B_i$ (sous certaines conditions sur les zéros). Dans ce qui suit, nous allons poser $B_E = \prod_{\lambda\in E} b_\lambda$ pour un ensemble discret E dans $\mathbf{D}$ vérifiant la condition de Blaschke $\sum_{\lambda\in E} (1-|\lambda|) < \infty$.

PROPOSITION 3.9. *Nous supposons* $1 < p < \infty$. *Soit* $\sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i$ *une réunion disjointe d'ensembles discrets dans* $\mathbf{D}$, *telle que* $(B_{\sigma_k})_{k=1}^{n} \in (\mathrm{CG})$. *Soit* $\mathcal{E}_k^q : K_{B_\sigma}^q \to K_{B_\sigma}^q$ *la projection spectrale associée à* $K_{B_{\sigma_k}}^q$, $k = 1, \ldots, n$, *(cf. paragraphe 1.1). Alors*

$$\|f\|_{H^p/BH^p} \leqslant \sup_{k=1,\ldots,n} \|\mathcal{E}_k^{q*}\| \frac{1}{\|P_-\|} \sum_{k=1}^{n} \|f\|_{H^p/B_k H^p}.$$

REMARQUE 3.10. La proposition est en particulier valable si les ensembles σ_k sont finis.

Preuve. La condition (CG) assure la continuité de l'opérateur Q_p, qui était défini dans la définition 2.8. D'après la remarque après cette définition, pour $g = Q_p(P_{B_{\sigma_k}} f)_{k \geqslant 1}$, nous avons $f - g \in B_k H^p$, $k = 1, \ldots, n$ et donc $f - g \in BH^p$. Ainsi

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^p/BH^p} &= \|g\|_{H^p/BH^p} \leqslant \|P_B g\|_{H^p} = \|Q_p(P_{B_l} f)_{l \geqslant 1}\|_{H^p} \\ &\leqslant \sup_{k=1,\ldots,n} \|\mathcal{E}_k^{q*}\| \sum_{k=1}^{n} \|P_{B_k} f\|_{H^p} \leqslant \sup_{k=1,\ldots,n} \|\mathcal{E}_k^{q*}\| \frac{1}{\|P_-\|} \sum_{k=1}^{n} \|f\|_{H^p/B_{\sigma_k} H^p}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{E}_k^{q*}$ est l'adjointe de la projection spectrale $\mathcal{E}_k^q$. ∎

Nous définissons

$$\begin{aligned} \alpha : \Lambda &\to \mathbf{N} \\ \lambda &\mapsto \left| \Lambda \cap \Omega\left(\lambda, \frac{\rho_0}{8}\right) \right|, \end{aligned}$$

avec $\rho_0 = \min_{i=1,\ldots,N} \inf_{\substack{\lambda,\mu \in \Lambda_i, \\ \lambda \neq \mu}} |b_\lambda(\mu)|$, $\Omega(\lambda, \rho)$ le disque pseudohyperbolique, et la forme indépendante est maintenant donnée par le

COROLLAIRE 3.11. *Soit* $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (\mathrm{C})$. *Alors*

$$H^p|_\Lambda = \{a \in \mathbf{C}^\Lambda : |||a|||_p < \infty\},$$

avec

$$|||a|||_p = \left\{ \sum_{\mu \in \Lambda} (1 - |\mu^2|) \left(\sum_{k=1}^{\alpha(\mu)} |\, \Delta^{k-1} a(\mu^{(k)})| \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty,$$

$$|||a|||_\infty = \sup_{\mu \in \Lambda} \sum_{k=1}^{\alpha(\mu)} |\, \Delta^{k-1} a(\mu^{(k)})|, \quad p = \infty,$$

où $\mu^{(i)} = (\mu_1, \ldots, \mu_i)$ *et* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\alpha(\mu)} = \Lambda \cap \Omega(\mu, \rho_0/8)$.

Preuve. Nous reprenons les notations du paragraph 3.1. En particulier, soit $\Lambda = \bigcup_{n\geqslant 1} \sigma_n$ la décomposition étudiée dans la preuve de la proposition 3.1 (obtenue à partir de la décomposition en composantes connexes de l'ensemble $L(B,\varepsilon)$). D'après le théorème 3.7 nous avons

$$a \in H^p|_\Lambda \Leftrightarrow \left\{ \sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_{n,0}^2|)\sum_{k=1}^{|\sigma_n|} |\,\Delta^{k-1}\, a(\lambda_n^{(k)})|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Comme $\operatorname{diam}\sigma_i < \rho_0/8$ (en choisissant ρ assez petit dans la démonstration de la proposition 3.1), chaque σ_i va être contenu dans un voisinage $\Omega\,(\mu,\rho_0/8)$ avec $\mu \in \sigma_i$. Ceci justifie la majoration $\|a\|_{X^p} \leqslant |||a|||_p$.

Pour l'estimation inverse, nous définissons l'application ν qui à $\mu \in \Lambda$ associe les indices k des ensembles σ_k qui ont une intersection non-vide avec $\Omega\,(\mu,\rho_0/8)$: $\nu(\mu) = \{k \in \mathbb{N} : \sigma_k \cap \Omega\,(\mu,\rho_0/8) \neq \emptyset\}$. Posons $\tau_\mu = \Omega\,(\mu,\rho_0/8)\cap\Lambda$ et $\sigma = \bigcup_{k\in\nu(\mu)} \sigma_k$. Nous remarquons que $\tau_\mu \subset \sigma$, ce qui nous permettra d'appliquer la proposition 3.9 à σ. Nous remarquons aussi que d'après la proposition 3.1, $(B_k)_{k\geqslant 1} \in (\mathrm{CG})$, où $B_k = B_{\sigma_k}$, et que l'on a ainsi $\sup_{k\geqslant 1} \|\mathcal{E}_k^{q*}\| < \infty$ d'après (1.8).

Afin d'effectuer les estimations suivantes, nous définissons une fonction analytique bornée f_μ qui vérifie $f_\mu(\lambda) = a(\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma$. En effet, grâce au choix $\rho_0/8$ comme rayon du disque pseudohyperbolique, on se persuade que les voisinages $\Omega\,(\mu,\rho_0/8)$ ainsi que les ensembles $\nu(\mu)$ contiennent au plus N éléments. On peut donc choisir pour f_μ un polynôme d'interpolation de type Lagrange.

Maintenant, à l'aide de l'estimation (3.9), de l'inclusion $\tau_\mu \subset \sigma$ et de la proposition 3.9, nous obtenons pours $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}(1-|\mu|^2)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{\alpha(\mu)} |\,\Delta^{k-1}\, a(\mu^{(k)})| &\leqslant \frac{1}{c_0}\,\|f_\mu\|_{H^p/B_{\tau_\mu}H^p} \leqslant \frac{1}{c_0}\,\|f_\mu\|_{H^p/B_\sigma H^p} \\ &\leqslant \frac{1}{c_0} \sup_{k\in\nu(\mu)} \|\mathcal{E}_k^{q*}\| \frac{1}{\|P_-\|} \sum_{k\in\nu(\mu)} \|f_\mu\|_{H^p/B_k H^p} \\ &\leqslant C \sum_{k\in\nu(\mu)} \sum_{i=1}^{|\sigma_k|} (1-|\lambda_{k,i}|^2)^{\frac{1}{p}} |\,\Delta^{i-1}\, a(\lambda_k^{(i)})|,\end{aligned}$$

où la constante $C = c_1/c_0 \sup_{k\geqslant 1} \|\mathcal{E}_k^{q*}\|/\|P_-\|$, avec les constantes de (3.9), est finie. Comme chaque terme $\sum_{i=1}^{|\sigma_k|}(1-|\lambda_{k,i}|^2)|\,\Delta^{i-1}\, a(\lambda_k^{(i)})|$ figure au plus N fois dans la majoration des termes de la série $|||a|||_p = \sum_{\mu\in\Lambda}(1-|\mu^2|)\sum_{k=1}^{\alpha(\mu)} |\,\Delta^{k-1}\, a(\mu^{(k)})|^p$, on obtient $|||a|||_p \leqslant c\,||a||_{X^p}$.

Nous étudions le cas $p=\infty$. Soit $f \in H^\infty$ la fonction interpolant la suite a, et chosissons $g_n \in H^\infty$, $n \geqslant 1$, telles que $||f + B_b g_n||_{H^\infty} \leqslant 2||f||H^\infty/B_n H^\infty 4, n \geqslant 1$. Grâce à l'interpolation libre, nous pouvons supposer $||f||_{H^\infty} \leqslant c \sup_{n\geqslant 1} ||f_n||_{H^\infty} \leqslant ||f||_{H^\infty/B_\Lambda H^\infty} \leqslant c \sup_{n\geqslant 1} ||f_n||_{H^\infty} \leqslant 2c \sup_{n\geqslant 1} ||f||_{H^\infty/B_n H^\infty}$. ∎

REMARQUE 3.12. Nous mentionnons que la constante ρ_0 dépend de la représentation $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (\mathrm{C})$. En effet, si nous considérons une autre représentation $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N'} \Lambda_i'$, $\Lambda_i' \in (\mathrm{C})$, nous obtenons une autre constante ρ_0' et ainsi une norme équivalente dans $H^p|_\Lambda$. Pour la validité de la preuve, il est suffisant que l'on ait $\sup_{\mu\in\Lambda} |\Omega(\mu, \rho_0/8) \cap \Lambda| < \infty$, ce qui est par exemple aussi vrai pour la constante de Carleson généralisée associée à $(B_{\sigma_k})_{k\geqslant 1}$. Comme celle-ci est seulement donnée implicitement, nous avons privilégié notre choix de la constante ρ_0, qui est déterminée dès que Λ est donné par ses composantes $\Lambda_i \in (\mathrm{C})$, $i = 1, \ldots, N$.

3.4. INTERPOLATION LIBRE DES FONCTIONS H^∞ UNIFORMÉMENT BORNÉES INFÉRIEUREMENT SUR Λ.

LEMME 3.13. *Soit $f \in H^\infty$. Alors pour $\{\lambda_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbf{D}$ on a*

$$|\,\Delta^n\, f(\lambda^{(n+1)})| \leqslant 2^n ||f||_{H^\infty}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Preuve. En effet pour $f \in H^\infty$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{D}$

$$\left|\frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{b_{\lambda_1}(\lambda_2)}\right| \leqslant \left\|\frac{f - f(\lambda_1)}{b_{\lambda_1}}\right\|_{H^\infty} = ||f - f(\lambda_1)||_{H^\infty} \leqslant 2||f||_{H^\infty},$$

ce qui donne immédiatement le résultat pour $n=1$. Par prolongement analytique, la fonction $g(z) = (f(z) - f(\lambda_1))/b_{\lambda_1}(z)$ appartient à H^∞. Nous appliquons le même raisonnement à g, ce qui démontre le résultat au cas $n=2$. Par récurrence on obtient le lemme. ∎

Ceci permet de démontrer le

COROLLAIRE 3.14. *Soit $\sigma = \{\lambda_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathbf{D}$ et $f \in H^\infty$ une fonction telle que pour $\lambda \in \sigma$ on a $|f(\lambda)| \geqslant \delta > 0$. On définit $w(\lambda) = 1/f(\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma$. Alors*

$$|\,\Delta^n\, w(\lambda^{(n+1)})| \leqslant c(\delta, n, ||f||_{H^\infty}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.10}$$

Preuve. Pour $n = 0$, l'estimation est évidente. Pour $n = 1$, nous obtenons à l'aide du lemme 3.13:

$$|\Delta^1 w(\lambda^{(2)})| = \left|\frac{w(\lambda_2) - w(\lambda_1)}{b_{\lambda_1}(\lambda_2)}\right| = \left|\frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{f(\lambda_1)f(\lambda_2)b_{\lambda_1}(\lambda_2)}\right| \leqslant \frac{2}{\delta^2}\|f\|_{H^\infty}.$$

Pour $n \geqslant 2$, nous allons effectuer une récurrence. Le lemme suivant nous permettra de ramener l'estimation (3.10) pour l'ordre n à l'ordre $n-1$.

LEMME 3.15. *Soit $\sigma = \{\lambda_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathbf{D}$ et $g, h : \sigma \to \mathbf{C}$. Alors*

$$\Delta^n(gh)(\lambda^{(n+1)}) = \sum_{j=0}^{n} \Delta^{n-j}h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1-j})\, \Delta^j\, g(\lambda_{n+1-j}, \ldots, \lambda_{n+1}).$$

Le lemme se démontre par récurrence (voir aussi [3]). Posons alors

$$g(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} \quad \text{et} \quad h(\lambda) = \Delta f(\lambda_1, \lambda), \quad \lambda \in \sigma.$$

Alors $\Delta w(\lambda^{(2)}) = (f(\lambda_1) - f(\lambda_2))/(f(\lambda_1)f(\lambda_2)b_{\lambda_1}(\lambda_2)) = (-1/f(\lambda_1))(g(\lambda_2)h(\lambda_2))$, et

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1}w(\lambda^{(n+2)}) &= \frac{-1}{f(\lambda_1)}\, \Delta^n\, (gh)(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}) \\
&= \frac{-1}{f(\lambda_1)} \sum_{j=0}^{n} \Delta^{n-j}h(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2-j})\, \Delta^j\, g(\lambda_{n+2-j}, \ldots, \lambda_{n+2}) \\
&= \frac{-1}{f(\lambda_1)} \sum_{j=0}^{n} \Delta^{n-j+1}f(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2-j})\, \Delta^j\, w(\lambda_{n+2-j}, \ldots, \lambda_{n+2}).
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence nous avons $|\Delta^j w(\lambda_{n+2-j}, \ldots, \lambda_{n+2})| \leqslant c(\delta, j, \|f\|_{H^\infty})$, ce qui démontre avec le lemme 3.13

$$\Delta^{n+1}w(\lambda^{(n+2)}) \leqslant \frac{1}{\delta}\sum_{j=0}^{n} 2^{n+1-j}\|f\|_{H^\infty}c(\delta, j, \|f\|_{H^\infty}) = c(\delta, n+1, \|f\|_{H^\infty}). \quad \blacksquare$$

A l'aide du théorème 3.7 et remarquant que si Λ est une réunion de N suites de Carleson, alors $|\sigma_n| \leqslant N$, on peut déduire du corollaire précédent le résultat suivant.

COROLAIRE 3.16. *Soit $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in$ (C). Si $f \in H^\infty$ et $|f|_\Lambda| \geqslant \delta$ pour un $\delta > 0$, alors $1/f|_\Lambda \in H^\infty|_\Lambda$, c'est-à-dire il existe $g \in H^\infty$ telle que $1/f(\lambda) = g(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.*

Si nous désignons par $\mathcal{B}$ l'algèbre de Banach H^∞/BH^∞, où $B = \prod_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$, et $\mathcal{B}^{-1}$ l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathcal{B}$, alors le corollaire précédent dit justement que les éléments $F \in \mathcal{B}$ tels que $|f|_\Lambda| \geqslant \delta$ pour un représentant $f \in H^\infty$ de la classe F sont dans $\mathcal{B}^{-1}$. Donc $\sigma_{\mathcal{B}}(F) = \overline{f(\Lambda)}$ pour le spectre de F si Λ est une réunion finie de suites de Carleson. Pour cette raison, la proposition suivante, qu'on démontre à l'aide du calcul fonctionnel, est en effet une généralisation du corollaire précédent.

PROPOSITION 3.17. *Soit* $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in$ (C). *Si* $f \in H^\infty$ *et* $\varphi \in \mathrm{Hol}(\overline{f(\Lambda)})$, *alors* $\varphi \circ f|_\Lambda \in H^\infty|_\Lambda$.

Preuve. Posons $F = f + BH^\infty \in \mathcal{B}$. Comme $\varphi \in \mathrm{Hol}(\overline{f(\Lambda)}) = \mathrm{Hol}(\sigma_{\mathcal{B}}(F))$, nous avons

$$\varphi(F) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(\zeta)R(\zeta, F)\,\mathrm{d}\zeta \in \mathcal{B},$$

où Γ est une courbe de Jordan dans le domaine d'holomorphie de φ telle que $\overline{f(\Lambda)}$ se trouve à l'intérieur de Γ, et $R(\zeta, F)$ est la resolvente de F dans $\mathcal{B}$. Désignons par $h \in H^\infty$ un représentant de $\varphi(F)$, alors la formule de Cauchy fournit $h(\lambda) = \varphi \circ f(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, ce qui démontre $\varphi \circ f|_\Lambda = h|_\Lambda \in H^\infty|_\Lambda$. ∎

REMARQUE 3.18. (i) La condition que Λ soit une réunion finie de suites de Carleson, nous paraît essentielle dans ce contexte. En effet nous pouvons construire une suite Λ, qui n'est pas une réunion finie de suites de Carleson mais qui vérifie quand-même la condition de Blaschke $\sum_{\lambda\in\Lambda}(1 - |\lambda^2|) < \infty$, et une fonction f avec $|f|_\Lambda| \geqslant \delta > 0$ telles que pour toute fonction $g \in H^\infty$ nous avons $g|_\Lambda \neq 1/f|_\Lambda$. Nous avons l'espoir que cet exemple permettra de démontrer que la condition $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in$ (CG), est même nécessaire pour la validité des corollaires 3.14 et 3.16 et de la proposition 3.17.

(ii) L'exemple précédent et la preuve de la proposition (qui passe pour toute fonction $\varphi \in \mathrm{Hol}(\sigma_{\mathcal{B}}(f + BH^\infty))$) montrent qu'il existe une suite Λ, qui vérifie la condition de Blaschke, et une fonction $f \in H^\infty$ telles que $\sigma_{\mathcal{B}}(f + BH^\infty) \neq \overline{f(\Lambda)}$.

3.5. L'OPÉRATEUR D'INTERPOLATION. Dans la première partie de ce paragraphe, nous allons construire une fonction D_i qui prend la valeur 1 sur l'ensemble σ_i et qui s'annule en $\Lambda \setminus \sigma_i$. En plus, elle permet une estimation de $\sum_{i\geqslant 1} |D_i|$, qui sera indispensable dans la construction de l'opérateur linéaire d'interpolation. Dans la construction de cet opérateur, qui sera le contenu de la deuxième partie, nous nous appuyons sur les idées de S.A. Vinogradov ([22]), qui a amélioré la construction de P. Jones ([10]) dans le cas où Λ est une suite de Carleson.

LA FONCTION D_i. Pour la construction de la fonction D_i, qui suit la construction de Jones-Vinogradov ([22]), nous aurons besoin de plusieures notations (cf. aussi [15]). Soit $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$ avec $\Lambda_i \in$ (C) et $\Lambda = \bigcup_{i\geqslant 1} \sigma_i$ la partition d'ensembles de niveau étudiée au paragraphe 3.1, $\sigma_i = \{\lambda_{i,l}\}_{l=1}^{|\sigma_i|}$. On suppose que $|b_\lambda(\mu)| \leqslant \frac{1}{3}$ pour $\lambda, \mu \in \sigma_i$ ($i \geqslant 1$), ce qui est possible d'après (3.1). On définit $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\lambda}_i\}_{i\geqslant 1} \subset \Lambda$ par $|\tilde{\lambda}_i| = \max_{\lambda\in\sigma_i} |\lambda|$ pour tout $i \geqslant 1$. On pose

$$B_{(i)} = \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\sigma_i} b_\lambda, \qquad c_\mu = b_{\mu/\sqrt{|\mu|}}(z\sqrt{|\mu|}) = \frac{\sqrt{|\mu|}}{\mu}\frac{\mu-|\mu|z}{1-\bar{\mu}z}$$

$$C^{\tilde{\lambda}} = \prod_{\substack{\mu\in\tilde{\Lambda}\setminus\{\tilde{\lambda}\}\\ |\mu|\geqslant|\tilde{\lambda}|}} c_\mu,\ \tilde{\lambda}\in\tilde{\Lambda}, \qquad A_i = B_{(i)}\left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\bar{\tilde{\lambda}}_i z}\right)^2 C^{\tilde{\lambda}_i}$$

$$\alpha_i(\lambda) = \frac{1}{A_i(\lambda)} \text{ pour } \lambda\in\sigma_i, \quad P_i = \sum_{k=1}^{|\sigma_i|}\prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_{i,l}}\, \Delta^{k-1}\,\alpha_i(\lambda_i^{(k)}).$$

On remarque que la quantité α_i est bien définie pour $\lambda \in \sigma_i$. La fonction P_i est une fraction rationnelle semblable au polynôme d'interpolation de type Newton qui interpole les valeurs $\{\alpha(\lambda_{i,k})\}_{k=1}^{|\sigma_i|}$. En effet, nous avons en général

LEMME 3.19. *Soit $n \in \mathbf{N}$ et $\sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbf{D}$. Si $f : \sigma \to \mathbf{C}$, alors*

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(z)\, \Delta^{k-1} f(\lambda^{(k)})$$

vérifie

$$P(\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda\in\sigma.$$

Preuve. Nous allons effectuer une récurrence. Choisissons β_k, $k = 1,\dots,n$, et γ_n tels que $P_1 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}$ interpole f en $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ et $P_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l} + \gamma_n \prod_{l=1}^{n-1} b_{\lambda_l}$ interpole f en $\{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_{n+1}\}$. Puisque $P_1(\lambda_i) = P_2(\lambda_i) = f(\lambda_i)$, $i = 1,\dots,n-1$, les $(n-1)$ premiers coefficients β_k de P_1 et P_2 sont en effet égaux.

Pour $n \geqslant 1$, on écrit $\beta_{n+1} = (f(\lambda_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})\beta_k)/\prod_{l=1}^{n} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})$

et $\gamma_n = (f(\lambda_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n-1}\prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})\beta_k)/\prod_{l=1}^{n-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})$. Alors

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1} &= (f(\lambda_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})\beta_k)/\prod_{l=1}^{n} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1}) \\
&= \frac{(f(\lambda_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n-1}\prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})\beta_k - \beta_n \prod_{l=1}^{n-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1}))/\prod_{l=1}^{n-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})}{b_{\lambda_n}(\lambda_{n+1})} \\
&= \frac{(f(\lambda_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n-1}\prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1})\beta_k)/\prod_{l=1}^{n-1} b_{\lambda_l}(\lambda_{n+1}) - \beta_n}{b_{\lambda_n}(\lambda_{n+1})} \\
&= \frac{\gamma_n - \beta_n}{b_{\lambda_n}(\lambda_{n+1})}.
\end{aligned}$$

Remplaçant β_n par $\Delta^{n-1}(\lambda^{(n)})$ et γ_n par $\Delta^{n-1}(f\lambda^{(n-1)}, \lambda_{n+1})$, on observe que les β_n vérifient la même loi de construction que $\Delta^{n-1} f(\lambda^{(n)})$. De plus on vérifie directement $\Delta^0 0 f(\lambda^{(1)}) = f(\lambda_1) = P_1(\lambda_1) = \beta_1$, ce qui achève la récurrence. ∎

Maintenant on peut énoncer le

THÉORÈME 3.20. *Avec les hypothèses et les notations précédentes et si on pose $D_i = A_i \cdot P_i$, on obtient une fonction qui vérifie*

(i)
$$D_i(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \in \sigma_i; \\ 0 & \lambda \in \Lambda \setminus \sigma_i; \end{cases}$$

(ii)
$$\sum_{i \geqslant 1} |D_i(z)| \leqslant c(\delta, N), \quad z \in \mathbb{D};$$

avec une constante $c(\delta, N) > 0$.

REMARQUE 3.21. (i) On peut aussi démontrer

$$\|D_i\|_{H^p} \leqslant c(1 - |\tilde{\lambda}_i^2|)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leqslant p < \infty).$$

(ii) Grâce à la condition de Blaschke, la fonction $C^{\tilde{\lambda}_i}$ est holomorphe et de plus bornée par 1 (voir les détails dans [22]).

Preuve. Comme la fonction P_i interpole justement les valeurs réciproques de A_i sur σ_i, la fonction $D_i = A_i P_i$ prend la valeur 1 sur σ_i. De plus, la fonction A_i contient le facteur $B_{(i)} = \prod_{k \neq i} B_k$ et s'annule donc sur σ_k, $k \neq i$. Ceci établit la propriété (i) et il reste donc l'estimation de la somme. Pour ceci il faut connaître une majoration de $|P_i|$. D'après la définition de P_i et comme $|\sigma_i| \leqslant N$ $(i \geqslant 1)$ et $|b_{\lambda_{k,l}}| \leqslant 1$, il reste à voir que $\Delta^{k-1}\alpha_i(\lambda_i^{(k)})$ est uniformément borné. Dans ce but, on vérifie les hypothèses du corollaire 3.14 appliqué à l'ensemble $\Lambda = \sigma_i$.

On se persuade que la fonction A_i est bien holomorphe et bornée (voir aussi remarque 3.21 (ii); l'estimation $\|(1-|\lambda^2|)/(1-\overline{\lambda}z)\|_{H^\infty} \leqslant 4$ est évidente). A_i appartient donc bien à H^∞ et vérifie $\|A_i\|_{H^\infty} \leqslant c_\infty = 4$. On minore chacun des facteurs de $|A_i(\lambda)|$ pour $\lambda \in \sigma_i$. La condition (CG) entraîne $|B_{(i)}(\lambda)| \geqslant \delta$ pour tout $\lambda \in \sigma_i$. Pour le deuxième facteur, on se sert du fait, qu'on ait choisi ε dans la partition d'ensembles de niveau tel que $|b_\lambda(\mu)| \leqslant 1/3$ pour $\lambda, \mu \in \sigma_i$ $(i \geqslant 1)$. Ceci entraîne, à l'aide de (3.6) que $(|1-|\tilde{\lambda}_i^2|)/|1-\overline{\tilde{\lambda}}_i\lambda| \geqslant 2/3$ pour tout $\lambda \in \sigma_i$ et donc

$$\left|\left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\overline{\tilde{\lambda}}_i\lambda}\right)^2\right| \geqslant \frac{4}{9} \quad \text{pour} \quad \lambda \in \sigma_i.$$

Il reste l'étude de $|C^{\tilde{\lambda}_i}|$. On remarque d'abord (cf. [15], p. 190)

$$|\lambda| \leqslant |\mu| \leqslant 1 \Rightarrow |c_\mu(\lambda)| \geqslant |b_\mu(\lambda)|.$$

En plus, d'après la construction de $\tilde{\Lambda}$, on a $|\lambda| \leqslant |\tilde{\lambda}_i|$ pour $\lambda \in \sigma_i$. Donc

$$|C^{\tilde{\lambda}_i}(\lambda)| = \prod_{\substack{\mu\in\tilde{\Lambda}\setminus\{\tilde{\lambda}_i\}\\ |\mu|\geqslant|\tilde{\lambda}|}} |c_\mu(\lambda)| \geqslant \prod_{\substack{\mu\in\tilde{\Lambda}\setminus\{\tilde{\lambda}_i\}\\ |\mu|\geqslant|\tilde{\lambda}|}} |b_\mu(\lambda)| \geqslant \prod_{\mu\in\tilde{\Lambda}\setminus\{\tilde{\lambda}_i\}} |b_\mu(\lambda)| \geqslant \delta.$$

La dernière minoration était une conséquence de $(B_n)_{n\geqslant 1} \in$ (CG). Ceci justifie aussi que $\tilde{\Lambda} \in$ (C) avec la même constante de Carleson δ que $(B_n)_{n\geqslant 1}$. On a alors minoré $|A_i(\lambda)|$ pour $\lambda \in \sigma_i$ par $\tilde{\delta} = 4\delta^2/9$. Le corollaire 3.14 donne alors l'estimation

$$|\Delta^{k-1}\,\alpha_i(\lambda_i^{(k)})| \leqslant c(\tilde{\delta}, N, \|A\|_{H^\infty}) = c_0(\tilde{\delta}, N).$$

La fonction P_i est alors uniformément majoré par $Nc_0(\tilde{\delta}, N)$, ce qui démontre l'assertion du théorème:

$$\begin{aligned}\sum_{i\geqslant 1} |D_i(z)| = \sum_{i\geqslant 1} |A_i(z)P_i(z)| &\leqslant Nc_0(\tilde{\delta}, N)\sum_{i\geqslant 1}\left|B_{(i)}\left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\overline{\tilde{\lambda}}_i z}\right)^2 C^{\tilde{\lambda}_i}\right| \\ &\leqslant Nc_0(\tilde{\delta}, N)\sum_{i\geqslant 1}\left|\left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\overline{\tilde{\lambda}}_i z}\right)^2 C^{\tilde{\lambda}_i}\right|.\end{aligned}$$

On peut supposer que les ensembles σ_i sont ordonnés de telle façon qu'on ait $|\tilde{\lambda}_i| \leqslant |\tilde{\lambda}_{i+1}|$ pour $i \geqslant 1$. Comme $\tilde{\Lambda} \in$ (C), on peut maintenant appliquer le raisonnement de Vinogradov (cf. [15], p. 190 ou [22]) pour obtenir l'estimation $\sum_{i\geqslant 1} |D_i(z)| \leqslant 8Nc_0(\tilde{\delta}, N) = c_1(\tilde{\delta}, N)$. ∎

L'OPÉRATEUR D'INTERPOLATION. Soit X^p l'espace de suites introduit dans le théorème 3.7.

THÉORÈME 3.22. *Sous les hypothèses et avec les notations du théorème précédent, l'application*

$$\mathrm{Int} : X^p \to H^p$$
$$w \mapsto \sum_{i\geqslant 1} D_i \sum_{k=1}^{|\sigma_i|} \left(\prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_{i,l}} \right) \triangle^{k-1} w(\lambda_i^{(k)})$$

est un opérateur linéaire d'interpolation pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *c'est-à-dire il vérifie:*

(i) $\mathrm{Int}\,(w) \in H^p$ *et* $\|Int\,(w)\|_{H^p} \leq c\,\|w\|_{X^p}$ *pour* $w \in X^p$;

(ii) $\mathrm{Int}\,(w)(\lambda) = w(\lambda)$ *pour* $\lambda \in \Lambda$.

REMARQUE 3.23. (i) Nous insistons sur le fait que cet opérateur est aussi borné dans le cas $p = 1$, ce qui permet de montrer au moins $X_1 \subset H^1|_\Lambda$.

(ii) Pour le cas $\vartheta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$, $1 < p < \infty$, S.A. Vinogradov et S.E. Rukshin ([25]) ont démontré l'existence d'un opérateur linéaire et continu approprié à leur définition d'interpolation (cf. aussi la remarque 2.5). Nous signalons que dans leur article, on a aussi démontré que l'existence d'un opérateur linéaire continu d'interpolation au cas $p = 1$ ou $p = \infty$ implique forcément $\sup_{n\geqslant 1} k_n < \infty$. Nous remarquons que le résulat de P.G. Casazza, R.W. Pengra et R.W. Sundberg [5] permet de montrer que la condition que Λ soit une réunion finie de suites de Carleson est nécessaire pour l'existence d'un opérateur linéaire continu d'interpolation.

Preuve. La propriété (ii) est immédiate et nous démontrons alors la première: Il faut distinguer les deux cas $1 \leqslant p < \infty$ et $p = \infty$.

(1) Pour $p < \infty$, on pose

$$a_i = \left| \left(\frac{1 - |\tilde{\lambda}_i^2|}{1 - \bar{\tilde{\lambda}}_i z} \right)^2 B_{(i)} C^{\tilde{\lambda}_i} P_i \right|^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{|\sigma_i|} |\triangle^{k-1} w(\lambda_i^{(k)})|$$
$$b_i = \left| \left(\frac{1 - |\tilde{\lambda}_i^2|}{1 - \bar{\tilde{\lambda}}_i z} \right)^2 B_{(i)} C^{\tilde{\lambda}_i} P_i \right|^{\frac{1}{q}},$$

et on obtient

$$|\mathrm{Int}\,(w)(z)| \leqslant \left(\sum_{i\geqslant 1} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i\geqslant 1} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On majore le premier facteur

$$\left(\sum_{i\geqslant 1} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i\geqslant 1} |B_{(i)}\left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\bar{\tilde{\lambda}}_i z}\right)^2 C^{\tilde{\lambda}_i} P_i|\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant c_1(\tilde{\delta}, N)^{\frac{1}{q}} = c_1.$$

Pour la dernière majoration on s'est encore une fois servi du raisonnement de Vinogradov. Avec ceci on estime la norme H^p de $\mathrm{Int}\,(w)$:

$$\|\mathrm{Int}\,(w)\|_{H^p}^p \leqslant \left\| \left\{ \left(\sum_{i\geqslant 1} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i\geqslant 1} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\}^p \right\|_{H^1} \leqslant c_1^p \sum_{i\geqslant 1} \|a_i^p\|_{H^1}$$
$$\leqslant c_1^p \sum_{i\geqslant 1} \left\{ \sum_{k=1}^{|\sigma_i|} |\,\Delta^{k-1}\, w(\lambda_i^{(k)})| \right\}^p \left\| \left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\bar{\tilde{\lambda}}_i z}\right)^2 \right\|_{H^1} \left\| B_{(i)} C^{\tilde{\lambda}_i} P_i \right\|_{H^\infty};$$

comme $\left\| \left(\frac{1-|\tilde{\lambda}_i^2|}{1-\bar{\tilde{\lambda}}_i z}\right)^2 \right\|_{H^1} = 1 - |\tilde{\lambda}_i^2|$

$$\leqslant c_1^p \sum_{i\geqslant 1} (1-|\tilde{\lambda}_i^2|) \left(\sum_{k=1}^{|\sigma_i|} |\,\Delta^{k-1}\, w(\lambda_i^{(k)})| \right)^p \leqslant c_2 \|w\|_{X^p}^p.$$

(2) Pour $p = \infty$, on majore directement

$$|\mathrm{Int}\,(w)(z)| \leqslant \sum_{i\geqslant 1} |D_i(z)| \sum_{k=1}^{|\sigma_i|} |\,\Delta^{k-1}\, w(\lambda_i^{(k)})| \leqslant \|w\|_{X^\infty} \sum_{i\geqslant 1} |D_i(z)|$$
$$\leqslant c_1(\tilde{\delta}, N) \|w\|_{X^\infty}.$$

Et donc $\|\mathrm{Int}\,(w)\|_{H^\infty} \leqslant c_1(\tilde{\delta}, N)\|w\|_{X^\infty}$. ∎

Acknowledgements. Je tiens à remercier N.K. Nikolskii, qui a encadré ces travaux durant ma thèse, à V.I. Vasyunin pour ses commentaires et remarques, et à E. Fricain pour la rélecture du manuscrit (Dieu sait que le français peut être compliqué).

REFERENCES

1. B. BEAUZAMY, *Espaces d'interpolation réelle: Topologie et Géométrie*, Lecture Notes in Math., vol. 666, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
2. J. BERGH, J. LÖFSTRÖM, *Interpolation Spaces, An Introduction*, Berlin, Springer-Verlag, 1976.

3. J. BRUNA, A. NICOLAU, K. ØYMA, A note on interpolation in the Hardy spaces of the unit disc, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.

4. L. CARLESON, An interpolation problem for analytic functions, *Amer. J. Math.* **80**(1958), 921–930.

5. P.G. CASAZZA, R.W. PENGRA, C. SUNDBERG, Complemented ideals in the disk algebra, *Israel J. Math.* **37**(1980), 76–83.

6. J.B. GARNETT, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, 1981.

7. R. HANKS, Interpolation by the real method between BMO, L^α $(0 < \alpha < \infty)$ and H^α $(0 < \alpha < \infty)$, *Indiana Univ. Math. J.* **26**(1977), 679–689.

8. H. HEUSER, *Funktionalanalysis*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1986.

9. S. JANSON, J. PEETRE, S. SEMMES, On the action of Hankel and Toeplitz operators on some function spaces, *Duke Math. J.* **51**(1984), 937–958.

10. P. JONES, L^∞-estimates for the $\bar\partial$-problem in a half plane, *Acta Math.* **150**(1983), 137–152.

11. A. KERR-LAWSON, Some lemmas on interpolating Blaschke products and correction, *Canad. J. Math.* **21**(1969), 531–534.

12. J.L. LIONS, J. PEETRE, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **19**(1964), 5–68.

13. N.K. NIKOLSKII, Bases of invariant subspaces and operator interpolation, *Proc. Steklov Inst. Math.* **130**(1979), 55–132.

14. N.K. NIKOLSKII, What problems do spectral theory and complex analysis solve for each other, in *Proc. Intern. Congress Math.*, Helsinki, 1978, vol. 2, pp. 631–638.

15. N.K. NIKOLSKII, *Treatise on the Shift Operator*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

16. N.K. NIKOLSKII, S.V. KHRUSHCHËV, A function model and some applications in the spectral theory of functions, *Proc. Steklov Inst. Math.* **176**(1988), 101–214.

17. N.K. NIKOLSKII, A.L. VOLBERG, *Tangential and Approximate Free Interpolation*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 122, Dekker, New-York, 1990.

18. A.A. PEKARSKII, Estimates on the derivative of a Cauchy-type integral with meromorphic density and their applications, *Math. Notes* **31**(1982), 199–206.

19. H.S. SHAPIRO, A.L. SHIELDS, On some interpolation problems for analytic functions, *Amer. J. Math.* **83**(1961), 513–532.

20. V.I. VASYUNIN, Unconditional convergent spectral decompositions and interpolation problems, *Proc. Steklov Inst. Math.* **130**(1979), 1–53.

21. V.I. VASYUNIN, Traces of bounded analytic functions on finite unions of Carleson sets, *J. Soviet. Math.* **27**(1984), 2448–2450.

22. S.A. VINOGRADOV, Some remarks on free interpolation by bounded and slowly growing analytic functions, *J. Soviet. Math.* **27**(1984), 2450–2458.

23. S.A. VINOGRADOV, V.P. KHAVIN, Free interpolation in H^∞ and some other classes of functions I, *J. Soviet. Math.*, **9**(1978), 137–171.

24. S.A. VINOGRADOV, V.P. KHAVIN, Free interpolation in H^∞ and some other classes of functions II, *J. Soviet. Math.* **14**(1980), 1027–1065.
25. S.A. VINOGRADOV, S.E. RUKSHIN, Free interpolation of germs of analytic functions in Hardy spaces, *J. Soviet. Math.*, **36**(1987), 319–325.

ANDREAS HARTMANN
Université Bordeaux I
UFR Mathématiques/Informatique
351, Cours de la Libération
33405 Talence Cédex
FRANCE

Reçu le 1-er septembre 1995; revision le 31 janvier 1996.