J. OPERATOR THEORY
42(1999), 305–330

SOUS-FACTEURS INTERMEDIAIRES ET GROUPES QUANTIQUES MESURES

MICHEL ENOCK

Communicated by William B. Arveson

Abstract. Let $M_0 \subset M_1$ an irreducible depth 2 inclusion of factors with a faithful semi-finite normal operator-valued weight, verifying a regularity condition, and let $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ the canonical tower; it has been proved ([8], [7]) that both relative commutants $M_2 \cap M_0'$ and $M_3 \cap M_1'$ bear Woronowicz algebra structures, dual to each other. We show that to every intermediate subfactor $M_0 \subset N_0 \subset M_1$ can be associated, in a bijective way, a left co-ideal of $M_3 \cap M_1'$; this application preserves the lattice structures on these sets, and we recover and generalize in this way the results of [12], obtained in the case of compact groups and compact type Kac algebras by using very different considerations.

Keywords: *Quantum groups, subfactors.*
Mathematics Subject Classification: Primary 46L35; Secondary 22D25, 46L89.

1. INTRODUCTION

1.1. Les premières tentatives pour définir, à l'aide des algèbres d'opérateurs, des structures analogues à celles des groupes (structures qu'on appellerait aujourd'hui des "groupes quantiques localement compacts" ou des "groupes quantiques mesurés") ont été faites pour clarifier la théorie de la dualité des groupes localement compacts, c'est-à-dire en cherchant quels objets (munis de quelles structures) pouvaient, dans le cas d'un groupe non abélien, remplacer le groupe dual.

A un niveau algébrique, la notion d'algèbre de Hopf permet d'étudier à la fois les groupes discrets et leurs objets duaux; aussi, pour atteindre le même but pour des groupes localement compacts quelconques est-il naturel, pour rendre compte des représentations de dimension infinie, de considérer des algèbres d'opérateurs munies de structures analogues à celles des algèbres de Hopf; après les premiers travaux de W.F. Stinespring, cela a été fait dans les années 60 par G.I. Kac, qui construisit les "ring-groups", une catégorie auto-duale, qui contient à la fois les groupes unimodulaires et leurs duaux; le cas non unimodulaire (c'est-à-dire construire une catégorie auto-duale, qui contient à la fois les groupes localement compacts et leurs duaux) a été traité durant les années 70, après les travaux de M. Takesaki, indépendamment par G.I. Kac et L. Vaĭnerman, et par J.-M. Schwartz et l'auteur, qui avons appelé "algèbres de Kac" cette classe d'objets, pour marquer l'importance des travaux initiaux de Kac sur ce sujet. Sur cette théorie, voir [10].

1.2. Malheureusement, cette théorie a longtemps souffert d'un sérieux manque d'exemples (autres que les groupes localement compacts et leurs duaux; voir [13] et [14] pour les premiers exemples non triviaux). Au contraire, des procédures de quantisation ont permis à V.G. Drinfeld ([4]) (et d'autres) d'obtenir des algèbres de Hopf non commutatives et non co-commutatives, en déformant l'algèbre enveloppante d'algèbres de Lie semi-simples. Independamment, S.L. Woronowicz ([24]) construisit une C^*-algebre qui était une déformation de l'algèbre des fonctions continues sur le groupe de Lie compact SU(2); ce dernier objet, qui est essentiellement le même que celui construit par Drinfeld, vérifie des propriétés plus faibles que les axiomes des algèbres de Kac; il apparut ainsi que la catégorie des algèbres de Kac était trop restreinte (trop "unimodulaire") pour contenir de nombreux exemples. Une théorie satisfaisante des "groupes quantiques compacts" a été ensuite obtenue [25].

Le lien entre les algèbres de Kac et les travaux de Woronowicz a été fait par S. Baaj et G. Skandalis ([2]), qui ont mis en lumière les "unitaires multiplicatifs". Ces derniers généralisent les algèbres de Kac, ainsi que les groupes quantiques compacts, et possèdent une dualité très élégante. Ceci a été utilisé dans [5] pour étudier les "groupes quantiques discrets", par dualité du cas compact. Cette construction est aujourd'hui au coeur des développements récents sur la théorie des groupes quantiques ([20], [1], [16], [26] et [17]).

Une théorie des "groupes quantiques mesurés" est présente dans les travaux les plus récents ([16], [26] et [17]) similaire à la théorie des algèbres de Kac, la différence essentielle étant la présence d'un groupe à un paramètre de déformations de l'algèbre de Hopf-von Neumann sous-jacente (ce groupe à un paramètre étant trivial dans le cas des algèbres de Kac, qui apparaissent donc comme un cas particulier "unimodulaire" de groupe quantique mesuré). Ces objets ont été appelés "algèbres de Woronowicz" dans [16]. Plus précisément, si W est un unitaire multiplicatif (i.e. $W \in \mathcal{L}(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H})$ est unitaire et vérifie $W_{1,2}W_{1,3}W_{2,3} = W_{2,3}W_{1,2}$, on peut associer sur l'algèbre de von Neumann $M = \{(\mathrm{id} \otimes \omega)(W) \mid \omega \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})_*\}''$ un coproduit Γ défini par, pour tout $x \in M$:

$$\Gamma(x) = W^*(1 \otimes x)W.$$

Par ailleurs, on peut considérer l'application $(\mathrm{id}\otimes\omega)(W) \to (\mathrm{id}\otimes\omega)(W^*)$, qui, formellement, joue le rôle d'une antipode. Un unitaire multiplicatif est dit "maniable" (manageable), au sens de Woronowicz ([26]), si cette application possède une "décomposition polaire" du type $\tau_{i/2} \circ j$, où j est alors une co-involution, et τ_t un groupe à un paramètre de déformations de (M, Γ). Si W est fourni par un poids invariant à gauche sur (M, Γ), on est en présence d'une "algèbre de Woronowicz" au sens de [16].

1.3. Une autre approche est possible: les groupes classiques sont utilisés pour agir sur des espaces, et, de même, il est possible de faire agir un groupe quantique sur un "espace quantique" (c'est-à-dire sur une algèbre); cela a été fait dans la cadre des algèbres de Kac ([6] et [9]), et dans la cadre des unitaires multiplicatifs [2]. A une telle action sur une algèbre de von Neumann M_0, il est possible d'associer une autre algèbre de von Neumann M_1, appelée le produit croisé, qui contient M_0; alors, A. Ocneanu ([19]), appliquant à cette inclusion la théorie des sous-facteurs de Jones, a conjecturé que, inversement, pour toute inclusion irréductible de facteurs de type II_1, d'indice de Jones fini, de profondeur 2 (cela signifie que $M_3 \cap M_0'$ est un facteur, où $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots$ est la tour canonique de facteurs associée à l'inclusion $M_0 \subset M_1$), il existe une algèbre de Kac de dimension finie $\mathcal{K}$, et une action extérieure α de $\mathcal{K}$ sur M_0 ("extérieure" signifie que le commutant relatif de M_0 dans son produit croisé est trivial) telle que l'inclusion initiale est égale à l'inclusion de M_0 dans son produit croisé (voir aussi la postface d'A. Ocneanu de [10] et la remarque de [11], 4.7 a); la démonstration de ce résultat a été publiée récemment ([22], [3] et [15]). Il est naturel d'étendre ce résultat à un cadre plus général, c'est-à-dire sans restriction sur le type des facteurs ou la valeur de l'indice.

1.4. Dans des articles récents ([8] et [7]), le cas général d'une inclusion $M_0 \subset M_1$ irréductible, de profondeur 2 a été étudié: avec l'hypothèse qu'il existe un poids normal fidèle semi-fini suffisamment régulier de M_1 sur M_0 (ces conditions de régularité étant vérifiées si on a une espérance conditionelle normale fidèle, mais cette hypothèse est loin d'être nécessaire), on peut construire, en toute généralité, une algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}$ (qui sera un groupe quantique compact s'il existe une espérance conditionnelle normale fidèle de M_1 sur M_0), et une action extérieure α de $\mathcal{W}$ sur M_1 telle que le sous facteur M_0 soit égal à M_1^α; le facteur M_2 fourni par la construction de base est alors isomorphe au produit croisé $M_1 \rtimes_\alpha \mathcal{W}$, et la tour de Jones construite à partir de l'inclusion initiale est donc la tour des produits croisés successifs.

1.5. Ce résultat a permis un nouvel éclairage sur la théorie des groupes quantiques mesurés ("algèbres de Woronowicz" ([16])) en montrant que ces objets (et en particulier les unitaires multiplicatifs "maniables" au sens de Woronowicz ([26])) apparaissent naturellement dans l'étude des sous-facteurs irréductibles, et cela, sans condition sur le type des facteurs ni sur l'indice du sous-facteur.

Cependant, on peut noter que dans le cas où les deux facteurs M_0 et M_1 sont semi-finis, les seuls groupes quantiques compacts (ou discrets) qui apparaissent par cette construction sont des algèbres de Kac.

1.6. Dans cet article est étudié le cas des sous-facteurs intermédiaires $M_0 \subset N_0 \subset M_1$ d'une inclusion $M_0 \subset M_1$ irréductible de profondeur 2, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, d'une inclusion $M_1^\alpha \subset M_1$, où α est une action extérieure et minimale d'une algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}$ sur un facteur M_1. Cette situation a été étudiée par de nombreux auteurs dans des cas particuliers, d'abord dans le cas d'actions d'un groupe localement compact ou d'un dual de groupe localement compact dans [18], plus recemment dans le cas d'une algèbre de Kac de type compact [12].

Dans le cas le plus général, à un tel sous-facteur intermédiaire, on peut associer l'algèbre:

$$B_{N_0} = \{(\omega \otimes \mathrm{id})\alpha(X) \mid \omega \in M_{1*}, X \in N_0\}''$$

qui est un co-idéal à gauche de l'algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}$. Inversement, si B est un co-idéal à gauche de $\mathcal{W}$, on peut lui assicier le sous-facteur:

$$N_B = \{X \in M_1 \mid \alpha(X) \in M_1 \otimes B\}''.$$

Ces deux applications sont inverses l'une de l'autre et réalisent donc une dualité de type galoisien entre les sous-facteurs intermédiaires et les co-idéaux à gauche de l'algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}$.

De plus, on peut définir une dualité entre les coidéaux à gauche de $\mathcal{W}$ et ceux de l'algèbre de Woronowicz duale, et à cette dualité correspond la construction de base $N_0 \subset M_1 \subset N_1$ qui associe, à un sous-facteur intermédaire $M_0 \subset N_0 \subset M_1$, le sous facteur N_1, sous facteur intermédaire $M_1 \subset N_1 \subset M_2$.

1.7. Cet article est organisé comme suit: le chapitre 2 contient des rappels sur les algèbres de Woronowicz, et des propriétés sur leurs actions; le chapitre 3 introduit une dualité entre les co-idéaux d'une algèbre de Woronowicz, et ceux de l'algèbre de Woronowicz duale; le chapitre 4 commence par un résumé de [8] et [7] où sont rappelés résultats et notations concernant le lien entre algèbres de Woronowicz et inclusions de profondeur 2, et contient les résultats concernant les sous-facteurs intermédiaires, et le liens avec les co-idéaux de l'algèbre de Woronowicz sous-jacente.

2. ACTIONS D'UNE ALGÈBRE DE WORONOWICZ

Dans ce chapitre est rappelée la définition des algèbres de Woronowicz (2.1) introduites en [16], et sont démontrés, dans ce cadre, les résultats (2.10, 2.11) qui avaient été démontrés dans [6] et [9] pour les actions des algèbres de Kac. Les démonstrations ont été abrégées quand il suffit de se reporter à [6] ou [9].

2.1. Définition. ([16], 1.1) Un quintuplet $\mathcal{W} = (A, \Gamma, j, \tau, \varphi)$ est une *algèbre de Woronowicz* si:

(i) Le triplet (A, Γ, j) est une algèbre de Hopf-von Neumann involutive au sens de [10], 1.2.1;

(ii) φ est un poids normal semi-fini fidèle sur A, invariant à gauche au sens de [10], 2.2.1, c'est-à-dire tel que, pour tout x positif de A:

$$(\mathrm{id} \otimes \varphi)\Gamma(x) = \varphi(x)1;$$

(iii) $\tau : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}\, A$ est un groupe continu à un paramètre d'automorphismes de A, tels que Γ, j, φ sont invariants par τ_t:

$$\Gamma \circ \tau_t = (\tau_t \otimes \tau_t) \circ \Gamma$$
$$j \circ \tau_t = \tau_t \circ j$$
$$\varphi \circ \tau_t = \varphi;$$

(iv) Pour tous x, y dans $\mathfrak{N}_\varphi$, pour tout ω dans le prédual A_* tel que $\omega \circ \tau_{-\mathrm{i}/2}$ appartient au prédual (si on écrit $\tau_t(x) = h^{\mathrm{i}t} x h^{-\mathrm{i}t}$, où $h^{\mathrm{i}t}$ est fourni par $h^{\mathrm{i}t}\Lambda_\varphi(x) = \Lambda_\varphi(\tau_t(x))$, et si $\omega = \omega_{\xi,\eta}$, où $\xi \in \mathcal{D}(h^{-1/2})$ et $\eta \in \mathcal{D}(h^{1/2})$, on a alors $\omega_{\xi,\eta} \circ \tau_{-\mathrm{i}/2} = \omega_{h^{-1/2}\xi, h^{1/2}\eta}$):

$$\langle \omega, (\mathrm{id} \otimes \varphi)((1 \otimes y^*)\Gamma(x)) \rangle = \langle \omega \circ \tau_{-\mathrm{i}/2}, j(\mathrm{id} \otimes \varphi)(\Gamma(y^*)(1 \otimes x)) \rangle;$$

(v) Le poids φ est invariant par le groupe modulaire du poids $\varphi \circ j$.

2.2. REMARQUES. (i) Ce dernier axiome diffère de celui utilisé par Masuda et Nakagami ([16], 1.1 (iii)–(c), mais c'est en fait celui qu'ils utilisent (voir [16], p. 803 et [16], 3.14). Dans la suite, on notera par ρ l'opérateur positif autoadjoint inversible, affilié à A^{φ}, qui est la dérivée de Radon-Nykodym de φ par rapport à $\varphi \circ j$. On a donc, pour tout x positif de $A, \varphi(x) = \varphi \circ j(\rho^{1/2} x \rho^{1/2})$, et, pour tout y de A, t de $\mathbb{R}$, $\rho^{\mathrm{i}t} y \rho^{-\mathrm{i}t} = \sigma_t^{\varphi} \sigma_{-t}^{\varphi \circ j}(x)$. D'après ([16], 3.12), on a, pour tout t de $\mathbb{R}$, $\Gamma(\rho^{\mathrm{i}t}) = \rho^{\mathrm{i}t} \otimes \rho^{\mathrm{i}t}$. Les hypothèses assurent que ρ et l'opérateur h introduit en 2.1.4 commutent. Par ailleurs, l'espace $\mathcal{D} = \bigcap_{s,t \in \mathbb{R}} \mathcal{D}(\rho^s h^t)$ est dense dans H_{φ}.

(ii) On associe au poids φ les objets usuels de la théorie de Tomita-Takesaki, l'idéal à gauche $\mathfrak{N}_{\varphi}$, l'injection Λ_{φ} de $\mathfrak{N}_{\varphi}$ dans l'espace hilbertien H_{φ}, etc. Grâce à l'axiome 2, on construit ([16], 2.4) une isométrie W (opérateur de Kac-Takesaki) sur l'espace hilbertien $H_{\varphi} \otimes H_{\varphi}$ par, pour tous x, y dans $\mathfrak{N}_{\varphi}$:

$$W(\Lambda_{\varphi}(x) \otimes \Lambda_{\varphi}(y)) = \Lambda_{\varphi \otimes \varphi}(\Gamma(y)(x \otimes 1)).$$

L'opérateur W appartient à $A \otimes \mathcal{L}(H_{\varphi})$ et vérifie:

$$W_{1,2} W_{2,3} = W_{2,3} W_{1,3} W_{1,2}.$$

Les axiomes 4 et 5 permettent alors de montrer que W est un unitaire qui vérifie donc, pour tout x dans A:

$$\Gamma(x) = W(1 \otimes x) W^*.$$

Par ailleurs, W^* est donc un unitaire multiplicatif au sens de [2], qui vérifie, de plus ([16], 2.11), pour $\omega \in A_*$ tel que $\omega \circ \tau_{-\mathrm{i}/2}$ soit défini dans A_*:

$$(\omega \otimes \mathrm{id})(W) = (\omega \circ \tau_{-\mathrm{i}/2} \circ j)(W^*)$$

et donc W^* est un unitaire multiplicatif “maniable” au sens de Woronowicz ([26]) (manageable). On en déduit aussi $\Gamma \circ \sigma_t^{\varphi} = (\tau_t \otimes \sigma_t^{\varphi})\Gamma$ ([16], 2.16).

(iii) En s'appuyant sur la dualité des unitaires multiplicatifs, on peut alors construire une algèbre de Woronowicz duale $\widehat{\mathcal{W}} = (\widehat{A}, \widehat{\Gamma}, \widehat{j}, \widehat{\tau}, \widehat{\varphi})$ ([16], 3), et on peut identifier $\mathcal{W}$ à $\widehat{\widehat{\mathcal{W}}}$ ([16], 4.1). De plus, les isométries antilinéaires J et $\widehat{J}$ construites en appliquant la théorie de Tomita-Takesaki, respectivement, aux poids φ et $\widehat{\varphi}$ commutent, et, pour tout x de A, $j(x) = \widehat{J} x^* \widehat{J}$ ([16], 3.6.2 (iv), et 3.9). De plus, on a ([16], 2.16 (iii)):

$$W^* = (\widehat{J} \otimes J) W (\widehat{J} \otimes J).$$

Enfin, A et $\widehat{A}$ vérifient la propriété de Heisenberg ([16], 3.11 et 3.11.1):

$$A \cap \widehat{A} = A' \cap \widehat{A} = A \cap \widehat{A}' = A' \cap \widehat{A}' = \mathbb{C}.$$

Enfin, on a $\widehat{J}h\widehat{J} = h^{-1}$ et $\widehat{J}\rho\widehat{J} = \rho^{-1}$ ([16], 2.14 (ii) et (1.1)). On en déduit que $\mathcal{D}$ est stable par $\widehat{J}$. En particulier, si ξ, η sont dans $\mathcal{D}$, on aura:

$$\omega_{\xi,\eta} \circ \tau_{-\mathrm{i}/2} \circ j = \omega_{h^{-1/2}\widehat{J}\eta, h^{1/2}\widehat{J}\xi}.$$

(iv) On peut définir une algèbre de Woronowicz opposée $\mathcal{W}^\sigma = (A, \sigma\Gamma, j, \tau_{-t}, \varphi \circ j)$, et on peut munir le commutant A' (sur l'espace hilbertien H_φ) d'une structure d'algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}'$; on a $\widehat{\mathcal{W}'} = \widehat{\mathcal{W}^\sigma}$ ([16], 4.3 et 4.4). L'application $x \to J\widehat{J}xJ\widehat{J}$ est un isomorphisme de A sur A' qui rend isomorphes les algèbres de Woronowicz $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'^\sigma$; on le notera $\mathcal{I}_\mathcal{W}$.

(v) Les algèbres de Kac (au sens de [10]) sont ainsi un cas particulier d'algèbres de Woronowicz, où le groupe τ_t est trivial, et les groupes modulaires de φ et $\varphi \circ j$ égaux. L'intérêt — a priori — des algèbres de Woronowicz est donc de fournir beaucoup plus d'exemples que la théorie des algèbres de Kac. Les groupes quantiques compacts ([24], [25]) sont des algèbres de Woronowicz (et donc les groupes quantiques discrets [8]). Il en est de même des divers autres exemples (cf. par exemple [1]).

2.3. PROPOSITION. *Pour tout x positif de A, on a:*

$$(\varphi \otimes \mathrm{id})\Gamma(x) = \varphi(x)\rho^{-1}.$$

Démonstration. En tous points semblable à [9], I.3, en utilisant $\Gamma(\rho^{\mathrm{i}t}) = \rho^{\mathrm{i}t} \otimes \rho^{\mathrm{i}t}$. ∎

2.4. LEMME. *Soient M une algèbre de von Neumann, ω dans A_*, tel que $\omega \circ \tau_{-\mathrm{i}/2}$ existe dans A_*, X, Y dans $\mathfrak{N}_{\varphi \otimes \mathrm{id}_M}$; alors, on a:*

$$(\omega \otimes \varphi \otimes \mathrm{id})((\Gamma \otimes \mathrm{id})(Y^*)(1 \otimes X)) = (\omega \circ \tau_{\mathrm{i}/2} \circ j \otimes \varphi \otimes \mathrm{id})((1 \otimes Y^*)(\Gamma \otimes \mathrm{id})(X)).$$

Démonstration. Se démontre comme [9], I.9, en utilisant $(\omega \otimes \mathrm{id})(W) = (\omega \circ \tau_{-\mathrm{i}/2} \circ j)(W^*)$ à l'analogue de [9], I.8. ∎

2.5. PROPOSITION. *Soit M une algèbre de von Neumann, ψ un poids normal semi-fini fidèle sur M, $\mathcal{W} = (A, \Gamma, j, \tau, \varphi)$ une algèbre de Woronowicz (on reprend les notations de* 2.1 *et* 2.2*), ξ, η dans $\mathcal{D}$; alors, on a, pour tout X positif dans $M \otimes A$, Y_1, Y_2 dans $\mathfrak{N}_{\psi \otimes \varphi}$:*

$$(\psi \otimes \varphi \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(X) = (\psi \otimes \varphi)(X)\rho^{-1}$$

$$\begin{aligned}&(\psi \otimes \varphi \otimes \omega_{\rho^{1/2}\xi, \rho^{1/2}\eta})((\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Y_1^*)(Y_2 \otimes 1)) \\ &\qquad = (\psi \otimes \varphi \otimes \omega_{\rho^{1/2}h^{-1/2}\widehat{J}\eta, \rho^{-1/2}h^{1/2}\widehat{J}\xi})((Y_1^* \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Y_2)).\end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration reprend [9], I.4 pour démontrer la première formule, en utilisant la formule $\Gamma \circ \sigma_t^\varphi = (\tau_t \otimes \sigma_t^\varphi)\Gamma$ (remarque 2.2 (ii)). Pour démonter la deuxième formule, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
&(\psi \otimes \varphi \otimes \omega_{\rho^{1/2}\xi,\rho^{1/2}\eta})((\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Y_1^*)(Y_2 \otimes 1)) \\
&\quad = (\psi \otimes \varphi \circ j \otimes \omega_{\rho^{1/2}\xi,\rho^{1/2}\eta})((1 \otimes \rho^{1/2} \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Y_1^*)(Y_2 \otimes 1)(1 \otimes \rho^{1/2} \otimes 1)) \\
&\quad = (\psi \otimes \varphi \circ j \otimes \omega_{\rho^{1/2}\xi,\eta})((1 \otimes \rho^{1/2} \otimes \rho^{1/2})(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Y_1^*)(Y_2 \otimes 1)(1 \otimes \rho^{1/2} \otimes 1)) \\
&\quad = (\psi \otimes \varphi \circ j \otimes \omega_{\rho^{1/2}\xi,\eta})((\mathrm{id} \otimes \Gamma)((1 \otimes \rho^{1/2})Y_1^*)(Y_2(1 \otimes \rho^{1/2}) \otimes 1))
\end{aligned}$$

ce qui, en utilisant le lemme 2.4 appliqué à $\mathcal{W}^\sigma$ (on aura donc, par 2.2 (iv), $\tau_{-\mathrm{i}/2}$ et non $\tau_{\mathrm{i}/2}$) est égal à:

$$\begin{aligned}
&(\psi \otimes \varphi \circ j \otimes \omega_{\rho^{1/2}\xi,\eta} \circ \tau_{-\mathrm{i}/2} \circ j)\big(((1 \otimes \rho^{1/2})Y_1^* \otimes 1\big)(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Y_2(1 \otimes \rho^{1/2})\big) \\
&\quad = (\psi \otimes \varphi \circ j \otimes \omega_{h^{-1/2}\widehat{J}\eta,h^{1/2}\rho^{-1/2}\widehat{J}\xi})\big(((1 \otimes \rho^{1/2})Y_1^* \otimes 1\big)(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Y_2)(1 \otimes \rho^{1/2} \otimes \rho^{1/2})\big) \\
&\quad = (\psi \otimes \varphi \otimes \omega_{h^{-1/2}\rho^{1/2}\widehat{J}\eta,h^{1/2}\rho^{-1/2}\widehat{J}\xi})\big((Y_1^* \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Y_2)\big). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.6. DÉFINITIONS. Soient $\mathcal{W} = (A, \Gamma, j, \tau, \varphi)$ une algèbre de Woronowicz, M une algèbre de von Neumann. On appellera *action de* $\mathcal{W}$ *sur* M une structure de comodule de (A, Γ) sur M, i.e. un morphisme normal de M dans $M \otimes A$ tel que $\alpha(1) = 1$ et

$$(\alpha \otimes \mathrm{id})\alpha = (\mathrm{id} \otimes \Gamma)\alpha.$$

On définit

$$M^\alpha = \{x \in M \mid \alpha(x) = x \otimes 1\}$$

$$M \rtimes_\alpha \mathcal{W} = (\alpha(M) \cup \mathbb{C} \otimes \widehat{A}')''.$$

On dira que l'action α est *extérieure* si le commutant relatif $M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \cap \alpha(M)'$ est égal à $\mathbb{C}$. Les algèbres de von Neumann M et $M \rtimes_\alpha \mathcal{W}$ sont alors trivialement des facteurs.

Sur $M \rtimes_\alpha \mathcal{W}$ est définie une action canonique $\widetilde{\alpha}$ de $\widehat{\mathcal{W}}'$, par (X dans $M \rtimes_\alpha \mathcal{W}$):

$$\widetilde{\alpha}(X) = (1 \otimes (J\widehat{J} \otimes J\widehat{J})W^*(J\widehat{J} \otimes J\widehat{J}))(X \otimes 1)(1 \otimes (J\widehat{J} \otimes J\widehat{J})W(J\widehat{J} \otimes J\widehat{J}))$$

et on a donc, pour $x \in M$, $y \in \widehat{A}'$:

$$\widetilde{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha(x) \otimes 1$$
$$\widetilde{\alpha}(1 \otimes y) = 1 \otimes \widehat{\Gamma}'(y).$$

L'application $T_\alpha = (\mathrm{id} \otimes \varphi)\alpha$ est un poids opératoriel normal fidèle de M sur M^α; l'action α sera dite intégrable si ce poids opératoriel est semi-fini. Le coproduit Γ est donc une action intégrable de $\mathcal{W}$ sur A; on vérifie comme en [9], II.4 que l'action duale $\widetilde{\alpha}$ est une action intégrable de $\widehat{\mathcal{W}}'$ sur $M \rtimes_\alpha \mathcal{W}$.

Comme en [6], I.6, on appellera *α-cocycle* un unitaire de $M \otimes A$ tel que:

$$(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(U) = (U \otimes 1)(\alpha \otimes 1)(U).$$

En particulier, si on prend pour α l'action triviale, on obtient les cocycles triviaux U tels que $(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(U) = U_{1,2}U_{1,3}$. On définit aussi, comme en [6], I.10, l'équivalence entre actions (à cocycle près) et l'isomorphisme.

2.7. DÉFINITION. Soit α une action d'une algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}$ sur une algèbre de von Neumann M. On dira que le poids normal semi-fini fidèle ψ sur M est *ρ^{-1}-relativement invariant par rapport à α* si on a, pour tout x positif de M, y_1, y_2 de $\mathfrak{N}_\psi$, $\xi, \eta \in \mathcal{D}$:

$$(\psi \otimes \mathrm{id})\alpha(x) = \psi(x)\rho^{-1}$$
$$(\psi \otimes \omega_{\rho^{1/2}\xi,\rho^{1/2}\eta})(\alpha(y_1^*)(y_2 \otimes 1)) = (\psi \otimes \omega_{h^{-1/2}\rho^{1/2}\widehat{J}\eta, h^{1/2}\rho^{-1/2}\widehat{J}\xi})((y_1^* \otimes 1)\alpha(y_2)).$$

2.8. PROPOSITION. (i) *Le poids de Haar φ est ρ^{-1}-relativement invariant par rapport à l'action Γ de $\mathcal{W}$ sur A.*

(ii) *Soit α une action intégrable de $\mathcal{W}$ sur M, et soit ψ un poids normal semi-fini sur A^α; alors, le poids $\psi \circ T_\alpha$ est ρ^{-1}-relativement invariant par rapport à l'action α de $\mathcal{W}$ sur M.*

Démonstration. Cela se démontre comme [9], III.3 et III.4. ∎

2.9. THÉORÈME. *Soient α une action d'une algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}$ sur une algèbre de von Neumann M, et ψ un poids normal semi-fini fidèle ρ^{-1}-relativement invariant sur M. Alors:*

(i) *il existe une isométrie $U \in \mathcal{L}(H_\psi) \otimes A$, telle que, pour tout x de $\mathfrak{N}_\psi$ et y de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ j}$, on ait :*

$$U(\Lambda_\psi(x) \otimes \rho^{-1/2}\Lambda_\varphi(y)) = \Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(x)(1 \otimes y));$$

(ii) *U est un unitaire, et vérifie $U^* = (J_\psi \otimes \widehat{J})U(J_\psi \otimes \widehat{J})$. De plus, U est un cocycle pour l'action triviale de $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{L}(H_\psi)$;*

(iii) *On a, pour tout x de M:*

$$\alpha(x) = U(x \otimes 1)U^*$$

et, de plus , $\alpha \circ \sigma_t^\psi = (\sigma_t^\psi \otimes \sigma_t^\varphi \circ \sigma_{-t}^{\varphi\circ j} \circ \tau_{-t})\alpha.$

Démonstration. La démonstration de (i) est claire. On en déduit que, pour x, y dans $\mathfrak{N}_\psi$, ξ, η dans $\mathcal{D}$, on aura:

$$(\psi \otimes \omega_{\xi,\eta})((y^* \otimes 1)\alpha(x)) = ((\mathrm{id} \otimes \omega_{\rho^{-1/2}\xi,\eta})(U)\Lambda_\psi(x)|\Lambda_\psi(y))$$

d'où on déduit que $\Lambda_\psi((\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi,\eta})\alpha(x)) = (\mathrm{id} \otimes \omega_{\rho^{-1/2}\xi,\eta})(U)\Lambda_\psi(x)$. En notant S_ψ la fermeture de l'application $\Lambda_\psi(x) \to \Lambda_\psi(x^*)$, on aura donc, pour ξ, η dans $\mathcal{D}(\rho^{-1/2})$:

$$(\mathrm{id} \otimes \omega_{\rho^{-1/2}\xi,\eta})(U)S_\psi \subset S_\psi(\mathrm{id} \otimes \omega_{\rho^{-1/2}\eta,\xi})(U)$$

et, en passant aux adjoints, en notant $F_\psi = S_\psi^*$:

$$(\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi,\rho^{-1/2}\eta})(U^*)F_\psi \subset F_\psi(\mathrm{id} \otimes \omega_{\eta,\rho^{-1/2}\xi})(U^*).$$

On a, par définition de U, et parce que ψ est ρ^{-1}-relativement invariant:

$$\begin{aligned}((\mathrm{id} \otimes \omega_{\rho^{1/2}\xi,\eta})(U^*)\Lambda_\psi(x)|\Lambda_\psi(y)) &= \overline{((\mathrm{id} \otimes \omega_{\eta,\rho^{1/2}\xi})(U)\Lambda_\psi(y)|\Lambda_\psi(x))} \\ &= \overline{(\psi \otimes \omega_{\rho^{1/2}\eta,\rho^{1/2}\xi})(x^* \otimes 1)\alpha(y))} \\ &= (\psi \otimes \omega_{\rho^{1/2}\xi,\rho^{1/2}\eta})(\alpha(y^*)(x \otimes 1)) \\ &= (\psi \otimes \omega_{h^{-1/2}\rho^{1/2}\widehat{J}\eta,h^{1/2}\rho^{-1/2}\widehat{J}\xi})((y^* \otimes 1)\alpha(x)) \\ &= ((\mathrm{id} \otimes \omega_{h^{-1/2}\widehat{J}\eta,h^{1/2}\rho^{-1/2}\widehat{J}\xi})(U)\Lambda_\psi(x)|\Lambda_\psi(y))\end{aligned}$$

d'où on déduit que:

$$(\mathrm{id} \otimes \omega_{\rho^{1/2}\xi,\eta})(U^*) = (\mathrm{id} \otimes \omega_{h^{-1/2}\widehat{J}\eta,h^{1/2}\rho^{-1/2}\widehat{J}\xi})(U).$$

Comme $\Delta_\psi = F_\psi S_\psi$, on en déduit que:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}\otimes\omega_{\xi,\rho^{-1/2}\eta})(U^*)\Delta_\psi \subset F_\psi(\mathrm{id} \otimes \omega_{\eta,\rho^{-1/2}\xi})(U^*)S_\psi \\ &\quad = F_\psi(\mathrm{id} \otimes \omega_{h^{-1/2}\rho^{1/2}\widehat{J}\xi,h^{1/2}\widehat{J}\eta})(U)S_\psi \subset \Delta_\psi(\mathrm{id} \otimes \omega_{h^{1/2}\rho^{-1/2}\widehat{J}\eta,h^{-1/2}\rho\widehat{J}\xi})(U) \\ &\quad = \Delta_\psi(\mathrm{id} \otimes \omega_{h\rho^{-1}\xi,h^{-1}\rho^{1/2}\eta})(U^*)\end{aligned}$$

d'où on déduit:

$$U(\overline{\Delta_\psi \otimes h^{-1}\rho})U^* = \overline{\Delta_\psi \otimes h^{-1}\rho}$$

et donc, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$(*) \qquad U(\Delta_\psi^{\mathrm{it}} \otimes h^{-\mathrm{it}}\rho^{\mathrm{it}}) = (\Delta_\psi^{\mathrm{it}} \otimes h^{-\mathrm{it}}\rho^{\mathrm{it}})U.$$

On en déduit aussi:

$$\begin{aligned}J_\psi(\mathrm{id}\otimes\omega_{\xi,\rho^{-1/2}h^{1/2}\eta})(U)J_\psi &= S_\psi\Delta_\psi^{-1/2}(\mathrm{id}\otimes\omega_{\xi,\rho^{-1/2}h^{1/2}\eta})(U)\Delta_\psi^{1/2}S_\psi\\ &= S_\psi(\mathrm{id}\otimes\omega_{\rho^{-1/2}h^{1/2}\xi,\eta})(U)S_\psi\\ &= (\mathrm{id}\otimes\omega_{\rho^{-1/2}\eta,h^{1/2}\xi})(U)\\ &= (\mathrm{id}\otimes\omega_{\widehat{J}\xi,\widehat{J}h^{1/2}\rho^{-1/2}\eta})(U^*)\end{aligned}$$

ce qui fournit:

$$U^* = (J_\psi\otimes\widehat{J})U(J_\psi\otimes\widehat{J}).$$

On démontre ainsi que U est un unitaire; on montre que c'est un cocycle pour l'action triviale de $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{L}(H_\psi)$ comme en [6], III.16, ce qui achève la démonstration de (ii). La première relation de (iii) est alors claire par la définition de U, et la deuxième par la formule $(*)$ démontrée plus haut. ∎

2.10. Théorème. *Soit α une action de $\mathcal{W}$ sur une algèbre de von Neumann M;*

(i) *alors, on a $M\otimes\mathcal{L}(H_\varphi) = (\alpha(M)\cup 1\otimes\mathcal{L}(H_\varphi))''$;*

(ii) *il existe un isomorphisme Θ de $\mathcal{L}(\mathcal{L}^2(M)\otimes H_\varphi\otimes H_\varphi)$ tel que, pour tout x de M, y de $\widehat{A}'$, z de A' on ait:*

$$\begin{aligned}\Theta(\alpha\otimes\mathrm{id})\alpha(x) &= \alpha(x)\otimes 1\\ \Theta(1\otimes 1\otimes y) &= 1\otimes\widehat{\Gamma}'(y)\\ \Theta(1\otimes 1\otimes z) &= 1\otimes 1\otimes z.\end{aligned}$$

L'application $\Theta\circ(\alpha\otimes\mathrm{id})$ réalise donc un isomorphisme entre $M\otimes\mathcal{L}(H_\varphi)$ et le double produit croisé $(M\rtimes_\alpha\mathcal{W})\rtimes_{\widetilde{\alpha}}\widehat{\mathcal{W}}'$;

(iii) *de plus, pour tout X de $M\otimes\mathcal{L}(H_\varphi)$, on a:*

$$\widetilde{\widetilde{\alpha}}\circ\Theta\circ(\alpha\otimes\mathrm{id})(X) = (\Theta\circ(\alpha\otimes\mathrm{id})\otimes\mathcal{I}_{\mathcal{W}})\beta(X)$$

où β est l'action de $\mathcal{W}$ sur $M\otimes\mathcal{L}(H_\varphi)$ définie par:

$$\beta(X) = (1\otimes\sigma W^*\sigma)(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\alpha\otimes\mathrm{id})(X)(1\otimes\sigma W\sigma).$$

Ainsi, l'action biduale $\widetilde{\widetilde{\alpha}}$ de $\mathcal{W}'^\sigma$ sur le double produit croisé est équivalente (à cocycle près) à l'action $(\mathrm{id}\otimes\sigma)(\alpha\otimes\mathrm{id})$ de $\mathcal{W}$ sur $M\otimes\mathcal{L}(H_\varphi)$.

Démonstration. La partie (i) se démontre comme en [9], IV.1 et IV.2.; la partie (ii) se démontre comme en [6], III.1, et la partie (iii) comme en [6], III.6, III.7 et III.8. ∎

2.11. THÉORÈME. *Soit α une action de $\mathcal{W}$ sur une algèbre de von Neumann M; alors*

$$(M \rtimes_\alpha \mathcal{W})^{\widetilde{\alpha}} = \alpha(M)$$

$$\alpha(M) = \{X \in M \otimes A \mid (\alpha \otimes \mathrm{id})(X) = (\mathrm{id} \otimes \Gamma)(X)\}.$$

Démonstration. La démonstration est en tous points analogue à [9], IV.2. ∎

3. CO-IDÉAUX D'UNE ALGÈBRE DE WORONOWICZ

Dans ce chapitre est introduite une dualité entre les co-idéaux d'une algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}$ est les co-idéaux de l'algèbre de Woronowicz duale $\widehat{\mathcal{W}}$ (3.3); il s'agit de la généralisation au cas des algèbres de Woronowicz de résultats bien connus pour les groupes ([23]); dans la cas des algèbres de Kac de type compact, on trouve une démonstration de cette dualité dans ([12], 4.6). Ensuite, on considère une action α d'une algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}$ sur une algèbre de von Neumann M, et la sous-algèbre du produit croisé $M \rtimes_\alpha \mathcal{W}$ engendrée par $\alpha(M)$ et $1 \otimes B$, où B est un co-idéal à gauche de $\widehat{\mathcal{W}}'$. Diverses propriétés de cette sous-algèbre sont fournies (3.9 and 3.10).

3.1. DÉFINITION. Soit (A, Γ) une algèbre de Hopf-von Neumann (au sens de [10], 1.2.1); une sous-algèbre B de A sera dite un *co-idéal à gauche* (resp. *à droite*, resp. *bilatère*) si on a $\Gamma(B) \subset A \otimes B$ (resp. $B \otimes A$, resp. $B \otimes B$). Ainsi, si B est un co-idéal à droite, $\Gamma_{|B}$ est une action de (A, Γ) sur B.

3.2. PROPOSITION. (i) *Soit B un co-idéal à droite de $\mathcal{W}$; alors, l'algèbre $\widehat{A} \cap B'$ est un co-idéal à droite de $\widehat{\mathcal{W}}$;*

(ii) *Soit B un co-idéal à gauche de $\mathcal{W}$; alors, l'algèbre $\widehat{A}' \cap B'$ est un co-idéal à droite de $\widehat{\mathcal{W}}'$. On notera $\widetilde{B} = \widehat{j}'(\widehat{A}' \cap B')$, qui est donc un co-idéal à gauche de $\widehat{\mathcal{W}}'$.*

Démonstration. Par définition (cf. 2.2 (ii)), on a $W(1 \otimes B)W^* \subset B \otimes A \subset B \otimes \mathcal{L}(\mathfrak{H})$; en passant aux commutants, on trouve donc:

$$B' \otimes 1 \subset W(\mathcal{L}(\mathfrak{H}) \otimes B')W^*$$

et donc:

$$W^*(B' \otimes 1)W \subset \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \otimes B'.$$

On trouve même, plus précisément, en utilisant 2.2 (iii):

$$W^*(B' \otimes 1)W \subset \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \otimes (\widehat{A} \cap B')$$

d'où on déduit, grâce à 2.2 (ii):

$$\widehat{\Gamma}(\widehat{A} \cap B') \subset (\widehat{A} \cap B') \otimes \widehat{A}$$

ce qui achève la démonstration de (i). La partie (ii) s'obtient en appliquant (i) à $\mathcal{W}^\sigma$. ∎

3.3. Théorème. *Soit $\mathcal{W} = (A, \Gamma, j, \tau, \varphi)$ une algèbre de Woronowicz, B une sous-algèbre de von Neumann de A; alors, B est un co-idéal à droite de $\mathcal{W}$ si et seulement si on a $B = A \cap (\widehat{A} \cap B')'$; B est un co-idéal à gauche de $\mathcal{W}$ si et seulement si $B = A \cap (\widehat{A}' \cap B')'$, ce qui s'écrit encore, avec les notations de* 2.2 (iv) *et* 3.2*, $\mathcal{I}_{\mathcal{W}}(B) = \widetilde{\widetilde{B}}$. On en déduit que l'application $B \to \widetilde{B}$ est une bijection de l'ensemble des co-idéaux à gauche de $\mathcal{W}$ sur l'ensemble des co-idéaux à gauche de $\widehat{\mathcal{W}}'$.*

Démonstration. Pour toute sous-algèbre B, les inclusions $B \subset A \cap (\widehat{A} \cap B')'$ et $B \subset A \cap (\widehat{A}' \cap B')'$ sont évidentes. Par ailleurs, on a:

$$\Gamma(B) = W(1 \otimes B)W^* \subset (A \otimes A) \cap (A \otimes (B \cup \widehat{A})'') = A \otimes (A \cap (\widehat{A}' \cap B')').$$

En appliquant ce résultat à $\mathcal{W}^\sigma$, on trouve:

$$\Gamma(B) = (A \cap (\widehat{A} \cap B')') \otimes A$$

et donc, si $B = A \cap (\widehat{A}' \cap B')'$, B est un co-idéal à gauche, et si $B = A \cap (\widehat{A} \cap B')'$, B est un co-idéal à droite. Inversement, supposons que B soit un co-idéal à droite; si $x \in B'$, $y \in A \cap (\widehat{A} \cap B')'$, on a:

$$\Gamma(y)(x \otimes 1) = W(1 \otimes y)W^*(x \otimes 1).$$

Comme, en utilisant le calcul de 3.2, on a $W^*(x \otimes 1)W \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \otimes (\widehat{A} \cap B')$, on en déduit que:

$$\Gamma(y)(x \otimes 1) = W(1 \otimes y)W^*(x \otimes 1)WW^* = WW^*(x \otimes 1)W(1 \otimes y)W^* = (x \otimes 1)\Gamma(y).$$

Donc $\Gamma(y) \in B \otimes A$. Par ailleurs, on a $(\Gamma_{|B} \otimes \mathrm{id})\Gamma(y) = (\mathrm{id} \otimes \Gamma)\Gamma(y)$; en appliquant 2.11 à l'action $\Gamma_{|B}$ de $\mathcal{W}$ sur B, on trouve que $\Gamma(y)$ appartient à $\Gamma(B)$, et donc, par l'injectivité de Γ, que y appartient à B. On achève la démonstration en appliquant ce résultat à $\mathcal{W}^\sigma$. ∎

3.4. COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{W} = (A, \Gamma, j, \tau, \varphi)$ une algèbre de Woronowicz, W son unitaire de Kac-Takesaki, B un co-idéal à gauche de $\widehat{\mathcal{W}}'$. Alors, on a:*

$$W(B \otimes 1)W^* \subset B \otimes \widehat{A}.$$

Démonstration. D'après 3.3 appliqué à $\widehat{\mathcal{W}}'$, $B' = (\widehat{A} \cup (A' \cap B'))''$; de plus, si $y \in \widehat{A}$, $W^*(y \otimes 1)W = \sigma\widehat{\Gamma}(y) \in \widehat{A} \otimes \widehat{A}$, et si $y \in A' \cap B'$,$W^*(y \otimes 1)W = y \otimes 1 \in A' \cap B' \otimes 1$. On en déduit que $W^*(B' \otimes 1)W \subset B' \otimes \widehat{A}$.

Si maintenant z est dans B, et y dans B', on a, en utilisant ce qui précède:

$$\begin{aligned} W(z \otimes 1)W^*(y \otimes 1) &= W(z \otimes 1)W^*(y \otimes 1)WW^* \\ &= WW^*(y \otimes 1)W(z \otimes 1)W^* = (y \otimes 1)W(z \otimes 1)W^*. \end{aligned}$$

D'où on déduit que $W(z \otimes 1)W^*$ appartient à $B \otimes \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, et le résultat. ∎

3.5. PROPOSITION. *Soit $\mathcal{W} = (A, \Gamma, j, \tau, \varphi)$ une algèbre de Woronowicz, B un co-idéal à droite (resp. à gauche) de $\mathcal{W}$. Alors, on a:*

$$B = \{(\mathrm{id} \otimes \omega)\Gamma(x) \mid \omega \in A_*, x \in B\}''$$

(*resp.* $B = \{(\omega \otimes \mathrm{id})\Gamma(x) \mid \omega \in A_*, x \in B\}''$).

Démonstration. Soit B un co-idéal à droite de $\mathcal{W}$; posons

$$C = \{(\mathrm{id} \otimes \omega)\Gamma(x) \mid \omega \in A_*, x \in B\}''.$$

Comme $\Gamma(B) \subset B \otimes A$, on a $C \subset B$, et, par définition de C, on aura $\Gamma(B) \subset C \otimes A$; on en déduit que C est un co-idéal à droite de $\mathcal{W}$; soit x dans B, comme $\Gamma(x) \in C \otimes A$, et $(\Gamma_{|C} \otimes \mathrm{id})\Gamma(x) = (\mathrm{id} \otimes \Gamma)\Gamma(x)$, en appliquant 2.11 à l'action $\Gamma_{|C}$ de $\mathcal{W}$ sur C, on trouve que $\Gamma(x) \in \Gamma(C)$, et donc, par l'injectivité de Γ, que $x \in C$. On achève la démonstration en appliquant le résultat à $\mathcal{W}^\sigma$. ∎

3.6. LEMME. *Soit $\mathcal{W}$ une algèbre de Woronowicz, α une action de $\mathcal{W}$ sur une algèbre de von Neumann M, $\widetilde{\alpha}$ l'action duale de $\widehat{\mathcal{W}}'$ sur la produit croisé $M \rtimes_\alpha \mathcal{W}$, B un co-idéal à gauche de $\widehat{\mathcal{W}}'$; alors, on a:*

$$\{X \in M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \mid \widetilde{\alpha}(X) \in M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \otimes B\} = M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \cap \mathcal{L}(L^2(M)) \otimes (A \cup B)''.$$

On notera $M \rtimes_\alpha B$ cette sous-algèbre de $M \rtimes_\alpha \mathcal{W}$.

Démonstration. Par définition de $\widetilde{\alpha}$ et de B, l'ensemble de gauche est clairement inclus dans celui de droite. Mais, plus précisément, l'ensemble de gauche est formé des X de $M \rtimes_\alpha \mathcal{W}$ tels que $X \otimes 1$ commute à

$$(1 \otimes (J\widehat{J} \otimes J\widehat{J})W(J\widehat{J} \otimes J\widehat{J})(1 \otimes A' \cap B')(1 \otimes (J\widehat{J} \otimes J\widehat{J})W^*(J\widehat{J} \otimes J\widehat{J})$$

c'est-à-dire à $1 \otimes \Gamma'^\sigma(A' \cap B')$. Comme $A' \cap B'$ est un co-idéal à droite de $\mathcal{W}'^\sigma$ d'après 3.2 appliqué à $\widehat{\mathcal{W}}'$, on peut appliquer 3.5, et cette condition est donc équivalente à $X \in \mathcal{L}(L^2(M)) \otimes (A' \cap B')'$. D'où le résultat. ∎

3.7. DÉFINITION. Soit $\mathcal{W}$ une algèbre de Woronowicz, α une action de $\mathcal{W}$ sur une algèbre de von Neumann M, $\widetilde{\alpha}$ l'action duale de $\widehat{\mathcal{W}}'$ sur la produit croisé $M \rtimes_\alpha \mathcal{W}$, B un co-idéal à gauche de $\widehat{\mathcal{W}}'$. Par définition de $M \rtimes_\alpha B$ (3.6), il est clair que

$$(\alpha(M) \cup 1 \otimes B)'' \subset M \rtimes_\alpha B.$$

On dira que α *vérifie la propriété* P_B si on a:

$$(\alpha(M) \cup 1 \otimes B)'' = M \rtimes_\alpha B.$$

3.8. PROPOSITION. *Soit $\mathcal{W}$ une algèbre de Woronowicz, α une action de $\mathcal{W}$ sur une algèbre de von Neumann M, $\widetilde{\alpha}$ l'action duale de $\widehat{\mathcal{W}}'$ sur la produit croisé $M \rtimes_\alpha \mathcal{W}$, B un co-idéal à gauche de $\mathcal{W}'^\sigma$; alors l'action duale $\widetilde{\alpha}$ vérifie la propriété P_B.*

Démonstration. En utilisant 2.10 et 3.6, on trouve que l'ensemble

$$(\Theta \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}))^{-1}(M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \rtimes_{\widetilde{\alpha}} \widehat{B})$$

est égal à $\{Y \in M \otimes \mathcal{L}(H_\varphi) \mid \beta(Y) \in M \otimes \mathcal{L}(H_\varphi) \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{W}(B)}\}$, et donc, par définition de β, à $\{Y \in M \otimes \mathcal{L}(H_\varphi) \mid (\mathrm{id} \otimes \sigma)(\alpha \otimes \mathrm{id})(Y) \in (1 \otimes \sigma W \sigma)(M \otimes \mathcal{L}(H_\varphi) \otimes \mathcal{I}_\mathcal{W}(B))(1 \otimes \sigma W^* \sigma)\}$, ou encore à $\{Y \in M \otimes \mathcal{L}(H_\varphi) \mid (\alpha \otimes \mathrm{id})(Y) \in M \otimes W(\mathcal{I}_\mathcal{W}(B) \otimes \mathcal{L}(H_\varphi))W^*\}$.

Par ailleurs, comme B est un co-idéal à gauche de $\mathcal{W}'^\sigma$, JBJ est un coidéal à gauche de $\mathcal{W}^\sigma$ et donc un coidéal à droite de $\mathcal{W}$; en appliquant 2.10 (i) à l'action $\Gamma_{|JBJ}$, on a:

$$JBJ \otimes \mathcal{L}(H_\varphi) = (\Gamma(JBJ) \cup 1 \otimes \mathcal{L}(H_\varphi))'' = (W(1 \otimes JBJ)W^* \cup 1 \otimes \mathcal{L}(H_\varphi))''$$

et donc:

$$W^*(JBJ \otimes \mathcal{L}(H_\varphi))W = ((1 \otimes JBJ) \cup W^*(1 \otimes \mathcal{L}(H_\varphi))W)''.$$

En utilisant 2.2 (iii), on en déduit:

$$W(\mathcal{I}_\mathcal{W}(B) \otimes \mathcal{L}(H_\varphi))W^* = (1 \otimes B \cup W(1 \otimes \mathcal{L}(H_\varphi))W^*)'' = (1 \otimes (B \cup \widehat{A}')'' \cup \Gamma(A))''.$$

On trouve donc que $(\Theta \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}))^{-1}(M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \rtimes_{\widetilde{\alpha}} \widehat{B})$ est égal à l'algèbre de von Neumann engendrée par la réunion de

$$\{Y \in M \otimes \mathcal{L}(H_\varphi) \mid (\alpha \otimes \mathrm{id})(Y) \in M \otimes 1 \otimes (B \cup \widehat{A}')''\} = M^\alpha \otimes (B \cup \widehat{A}')''$$

et de $\{Y \in M \otimes A \mid (\alpha \otimes \mathrm{id})(Y) \in M \otimes \Gamma(A)\}$. Si Y appartient à ce dernier ensemble, il existe Z dans $M \otimes A$ tel que $(\alpha \otimes \mathrm{id})(Y) = (\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Z)$; on en déduit donc:

$$\begin{aligned}(\alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Y) &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Gamma)(\alpha \otimes \mathrm{id})(Y)\\ &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Gamma)(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Z)\\ &= (\mathrm{id} \otimes \Gamma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Gamma)(Z)\\ &= (\mathrm{id} \otimes \Gamma \otimes \mathrm{id})(\alpha \otimes \mathrm{id})(Y)\\ &= (\alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\alpha \otimes \mathrm{id})(Y).\end{aligned}$$

On en déduit donc que $(\mathrm{id}\otimes\Gamma)(Y) = (\alpha\otimes\mathrm{id})(Y)$ et donc (2.11) que Y appartient à $\alpha(M)$. L'inclusion inverse est claire, et donc $(\Theta \circ (\alpha\otimes\mathrm{id}))^{-1}(M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \rtimes_{\tilde{\alpha}} \widehat{B})$ est égal à l'algèbre de von Neumann engendrée par la réunion de $M^\alpha \otimes (B \cup \widehat{A}')''$ et de $\alpha(M)$, c'est-à-dire à $(M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \cup 1 \otimes B)''$.

Par ailleurs, en utilisant 2.10, on trouve facilement que:

$$(\Theta \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}))^{-1}(\tilde{\alpha}(M \rtimes_\alpha \mathcal{W}) \cup 1 \otimes 1 \otimes B)'' = (M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \cup 1 \otimes B)''$$

et on en tire le résultat. ∎

3.9. THÉORÈME. *Soit $\mathcal{W}$ une algèbre de Woronowicz, α une action de $\mathcal{W}$ sur une algèbre de von Neumann M, B un co-idéal à gauche de $\widehat{\mathcal{W}}'$. Alors, l'action α vérifie la propriété P_B définie en* 3.7.

Démonstration. En appliquant 3.8 à l'action $\tilde{\tilde{\alpha}}$, on trouve que l'action β définie en 2.10 vérifie P_B. On a donc:

$$(M \otimes \mathcal{L}(H_\varphi)) \rtimes_\beta \mathcal{W} \cap M \otimes \mathcal{L}(H_\varphi) \otimes (A \cup B)'' = (\beta(M \otimes \mathcal{L}(H_\varphi)) \cup 1 \otimes 1 \otimes B)''.$$

Cela s'écrit encore:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id} \otimes \sigma)(M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \otimes \mathcal{L}(H_\varphi)) \cap M \otimes \sigma W \sigma(\mathcal{L}(H_\varphi) \otimes (A \cup B)'')\sigma W^*\sigma\\ &\qquad = ((\mathrm{id} \otimes \sigma)(\alpha(M) \otimes \mathcal{L}(H_\varphi)) \cup (1 \otimes \sigma W \sigma)(1 \otimes B)(1 \otimes \sigma W^* \sigma)''\end{aligned}$$

ou encore:

$$(M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \cap M \otimes (A \cup B)'') \otimes \mathcal{L}(H_\varphi) = (\alpha(M) \otimes \mathcal{L}(H_\varphi) \cup 1 \otimes W(B \otimes 1)W^*)''$$

ce qui, en utilisant 3.4, est inclus dans:

$$(\alpha(M) \otimes \mathcal{L}(H_\varphi) \cup 1 \otimes B \otimes \mathcal{L}(H_\varphi))'' = (\alpha(M) \cup 1 \otimes B)'' \otimes \mathcal{L}(H_\varphi).$$

On en déduit:

$$(M \rtimes_\alpha \mathcal{W} \cap M \otimes (A \cup B)'') \subset (\alpha(M) \cup 1 \otimes B)''$$

et, comme l'inclusion inverse est claire, on a donc l'égalité. ∎

3.10. COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{W}$ une algèbre de Woronowicz, B un co-idéal à gauche de $\widehat{\mathcal{W}}'$, α une action de $\mathcal{W}$ sur une algèbre de von Neumann M. Alors, on a:*

$$\{(\omega \otimes \mathrm{id})\widetilde{\alpha}(X) \mid \omega \in (M \rtimes_\alpha \mathcal{W})_*, X \in M \rtimes_\alpha B\}'' = B.$$

Démonstration. D'après 3.9, $M \rtimes_\alpha B$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par la réunion de $\alpha(M)$ et de $1 \otimes B$. Si X appartient à $\alpha(M)$, on a

$$(\omega \otimes \mathrm{id})\widetilde{\alpha}(X) = \langle \omega, X \rangle 1$$

Par ailleurs, si $X = 1 \otimes y$, avec $y \in B$, on a:

$$(\omega \otimes \mathrm{id})\widetilde{\alpha}(X) = (\omega \otimes \mathrm{id})(1 \otimes \widehat{\Gamma}'(y))$$

d'où on déduit le résultat, en appliquant 3.5. ∎

4. SOUS-FACTEURS INTERMÉDAIRES ET CO-IDÉAUX

Dans ce chapitre sont d'abord rappelés les résultats essentiels de [8] et [7] (4.2). Ces résultats sont ensuite utilisés pour construire une bijection entre les sous-facteurs intermédaires et les co-idéaux à gauche de l'algèbre de Woronowicz sous-jacente.

4.1. RAPPELS ET NOTATIONS. Soit $M_0 \subset M_1$ une inclusion irréductible de facteurs, et T_1 un poids opératoriel normal semi-fini fidèle de M_1 sur M_0. On notera ψ_0 un poids normal semi-fini fidèle sur M_0, $\psi_1 = \psi_0 \circ T_1$, $H_1 = H_{\psi_1}$, $J_1 = J_{\psi_1}$. La construction de base associée à cette inclusion est l'algèbre de von Neumann $M_2 = J_1 M_0' J_1$, ce qui définit une autre inclusion $M_1 \subset M_2$. Par ailleurs, il existe alors un poids opératoriel canonique normal semi-fini fidèle T_2 de M_2 sur M_1 construit à partir de T_1 ([8], 3.1 et 10.3). Par récurrence, on construit pour tout $i \geqslant 0$, l'inclusion $M_i \subset M_{i+1}$ et le poids opératoriel T_{i+1} de M_{i+1} sur M_i. L'ensemble de ces inclusions s'appelle la tour de Jones associée à l'inclusion $M_0 \subset M_1$. Pour tout $i \geqslant 0$, on définit par recurrence $\psi_{i+1} = \psi_i \circ T_{i+1}$, et on notera $H_i = H_{\psi_i}$, $J_i = J_{\psi_i}$, $j_i(x) = J_i x^* J_i$ pour tout x de $\mathcal{L}(H_i)$; pour tout $i \geqslant 1$, j_i est un anti-automorphisme de $M_{i+1} \cap M_{i-1}'$.

On dira que l'inclusion $M_0 \subset M_1$ est de profondeur 2 si l'algèbre $M_3 \cap M_0'$ est un facteur. On suposera, de plus, que les poids $\varphi_1 = T_{2|M_2 \cap M_0'}$ et $\varphi_2 = T_{3|M_3 \cap M_1'}$ sont semi-finis.

Avec ces hypothèses, on peut définir une isométrie U_1 de $H_{\varphi_1} \otimes H_1$ dans H_2 ([8], 5.8 et 11.5) telle que, pour tout x de $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$, y de $\mathfrak{N}_{\psi_1}$, on ait:

$$U_1(\Lambda_{\varphi_1}(x) \otimes \Lambda_{\psi_1}(y)) = \Lambda_{\psi_2}(xy).$$

Cette isométrie U_1 est alors, en fait, un unitaire ([8], 6.3), et vérifie (dans les égalités suivantes, les algèbres écrites à gauche agissent sur H_2):

$$
\begin{aligned}
M_3 &= U_1(\mathcal{L}(H_{\varphi_1}) \otimes M_1)U_1^* \\
M_4 &= U_1(\mathcal{L}(H_{\varphi_1}) \otimes M_2)U_1^* \\
M_0 &= U_1(\mathbb{C} \otimes M_0)U_1^* \\
M_4 \cap M_0' &= U_1(\mathcal{L}(H_{\varphi_1}) \otimes M_2 \cap M_0')U_1^* \\
M_3 \cap M_0' &= U_1(\mathcal{L}(H_{\varphi_1}) \otimes \mathbb{C})U_1^*
\end{aligned}
$$

ce qui définit un isomorphisme π_1 de $M_3 \cap M_0'$ sur $\mathcal{L}(H_{\varphi_1})$ par:

$$\pi_1(x) \otimes 1 = U_1^* x U_1$$

dont la restriction à $M_2 \cap M_0'$ est la représentation π_{φ_1} construite par la théorie de Tomita-Takesaki ([8], 6.3 et 11.5).

Par ailleurs, on peut construire, en utilisant U_1, un unitaire multiplicatif W_1 sur $H_{\varphi_1} \otimes H_{\varphi_1}$; l'opérateur W_1 appartient à $\pi_1(M_3 \cap M_1')' \otimes \pi_1(M_2 \cap M_0')'$ ([8], 7.3, 7.5 et 7.12). Cet unitaire engendre les algèbres $\pi_1(M_3 \cap M_1')'$ et $\pi_1(M_2 \cap M_0')'$ au sens que:

$$
\begin{aligned}
\{(\mathrm{id} \otimes \omega)(W_1) \mid \omega \in \mathcal{L}(H_{\varphi_1})_*\}'' &= \pi_1(M_3 \cap M_1')' \\
\{(\omega \otimes \mathrm{id})(W_1) \mid \omega \in \mathcal{L}(H_{\varphi_1})_*\}'' &= \pi_1(M_2 \cap M_0')'
\end{aligned}
$$

et permet donc de construire un coproduit sur chacune de ces algèbres ([8], 11.15) par, pour $x \in \pi_1(M_2 \cap M_0')'$, $x \to W_1(x \otimes 1)W_1^*$ (noté $\Gamma_1(x)$ dans [8] et [7]), et, pour $y \in \pi_1(M_3 \cap M_1')'$, $y \to W_1^*(1 \otimes y)W_1$ (noté $\widehat{\Gamma}_1(y)$ dans [8] et [7]). Munies de ces coproduits, ces algèbres sont, en fait, des algèbres de Woronowicz ([7], 7.6). Plus précisément, on notera $\mathcal{W}_1$ l'algèbre de Woronowicz $\pi_1(M_2 \cap M_0')'$ munie du coproduit $x \to \sigma W_1(x \otimes 1)W_1^* \sigma$ (que nous noterons $\Gamma_1(x)$ dans la suite de cet article, par souci de cohérence des notations). Son unitaire de Kac-Takesaki est donc égal à $\sigma W_1 \sigma$; en utilisant 2.2 (iv), on voit que cette structure peut être transportée par isomorphisme sur $M_2 \cap M_0'$; le coproduit sera également noté Γ_1, la co-involution sur $M_2 \cap M_0'$ est alors égale à j_1, et le poids de Haar est φ_1 ([7], 8.1 (i)).

L'algèbre $\pi_1(M_3 \cap M_1')'$, munie du coproduit $y \to W_1^*(1 \otimes y)W_1$, est donc alors l'algèbre de Woronowicz $\widehat{\mathcal{W}}_1^\sigma = \widehat{\mathcal{W}}_1'$. Son coproduit sera donc noté dans la suite de cet article $\widehat{\Gamma}_1'(y)$ par souci de cohérence des notations. Par ([8], 5.2 et 5.5), la restriction de π_1 à $M_3 \cap M_1'$ est isomorphe à la représentation $\pi_{\varphi_2 \circ j_2}$ construite par la théorie de Tomita-Takesaki. Ainsi, il existe, en composant j_2 avec l'anti-isomorphisme canonique de Tomita entre $\pi_1(M_3 \cap M_1')$ et $\pi_1(M_3 \cap M_1')'$, un isomorphisme canonique entre $M_3 \cap M_1'$ et $\pi_1(M_3 \cap M_1')'$; cette application rend isomorphes l'algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}_2$ obtenue en appliquant ce qui précède à l'inclusion $M_1 \subset M_2$ et l'algèbre de Woronowicz $\widehat{\mathcal{W}_1'}$ décrite ci-dessus ([7], 8.1 (ii)).

De plus, l'application α_1 définie, pour X dans M_1 par:

$$\alpha_1(X) = \sigma U_1^* X U_1 \sigma$$

envoie M_1 dans $M_1 \otimes \pi_1(M_3 \cap M_1')'$, et est une action de $\mathcal{W}_2$ (plus exactement de $\widehat{\mathcal{W}_1'}$) sur M_1. ([8], 8.1 (iii)). Ces constructions se résument dans le théorème suivant (dans lequel on a identifié $\mathcal{W}_i$ et $\mathcal{W}_i^{\sigma'}$):

4.2. THÉORÈME. ([7], 8.2) *Soit $M_0 \subset M_1$ une inclusion irréductible de facteurs, de profondeur* 2, *et T_1 un poids opératoriel normal semi-fini fidèle de M_1 sur M_0. Soient $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la tour de facteurs associée, et, pour tout $i > 0$, soit T_i le poids opératoriel normal semi-fini fidèle associé de M_i sur M_{i-1}. Alors, si la restriction de T_2 à $M_2 \cap M_0'$ et la restriction de T_3 à $M_3 \cap M_1'$ sont semi-finies:*

(i) *On peut munir $M_2 \cap M_0'$ d'une structure d'algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}_1$;*

(ii) *Pour tout $i > 0$, la restriction de T_{i+1} à $M_{i+1} \cap M_{i-1}'$ est semi-finie; on peut donc appliquer* (i) *à l'algèbre $M_{i+1} \cap M_{i-1}'$ qui est ainsi munie d'une structure d'algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}_i$; de plus $\mathcal{W}_{i+1}$ est isomorphe au commutant de l'algèbre de Woronowicz duale de $\mathcal{W}_i$;*

(iii) *Pour tout $i > 0$, il existe une action extérieure α_i de $\mathcal{W}_{i+1}$ sur M_i telle que M_{i-1} soit égale à l'algèbre des éléments invariants $M_i^{\alpha_i}$, et l'inclusion $M_i \subset M_{i+1}$ isomorphe à l'inclusion de M_i dans son produit croisé $M_i \rtimes_{\alpha_i} \mathcal{W}_{i+1}$.*

(iv) *Pour tout $i > 0$, α_{i+1} est isomorphe à l'action duale de α_i, au sens de* 2.6. *La tour $(M_i)_{i>0}$ est donc isomorphe à la tour canonique des produits croisés successifs construite à partir de l'action α_1 de $\mathcal{W}_2$ sur M_1, et le premier facteur M_0 est égal à $M_1^{\alpha_1}$.*

4.3. DÉFINITION. ([12], 4.3) Soit α une action de l'algèbre de Woronowicz $\mathcal{W}$ sur le facteur M; on dira que l'action α est *minimale* si le commutant relatif $(M^\alpha)' \cap M$ est trivial, et si $\{(\omega \otimes \mathrm{id})\alpha(x) \mid \omega \in M_*, x \in M\}'' = A$. Avec les hypothèses de 4.2, l'action α_1 est minimale ([7], 2.8).

4.4. PROPOSITION. (i) *Soit $M_0 \subset M_1$ une inclusion vérifiant les hypothèses de* 4.2*; alors, si N_0 est un sous-facteur intermédiaire*

$$M_0 \subset N_0 \subset M_1$$

on a l'égalité:

$$\{(\omega \otimes \mathrm{id})\alpha_1(X) \mid \omega \in M_{1*}, X \in N_0\}'' = \pi_1(M_3 \cap N_0')'.$$

(ii) *La sous-algèbre* $\pi_1(M_3 \cap N_0')'$ *de* $\pi_1(M_3 \cap M_1')'$ *est un co-idéal à gauche de* $\widehat{\mathcal{W}}_1'$. *On l'appellera le co-idéal à gauche associé au facteur intermédiaire* N_0 *et sera noté* B_{N_0}.

Démonstration. Grace à 4.3, si x appartient à $M_3 \cap M_0'$, et $\pi_1(x)$ commute à tous les éléments de la forme $(\omega \otimes \mathrm{id})\alpha_1(X)$ $(X \in N_0, \omega \in M_{1*})$, on aura $xX = Xx$ et donc x appartient à N_0'. Ainsi:

$$\{(\omega \otimes \mathrm{id})\alpha_1(X) \mid \omega \in M_{1*}, X \in N_0\}' = \pi_1(M_3 \cap N_0')$$

d'où on tire (i).

Par ailleurs, on aura, avec $\theta \in \pi_1(M_3 \cap M_1')_*$, $X \in N_0$ et $\omega \in M_{1*}$:

$$\begin{aligned}(\theta \otimes \mathrm{id})\widehat{\Gamma}_1'((\omega \otimes \mathrm{id})\alpha_1(X)) &= (\omega \otimes \theta \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \widehat{\Gamma}_1')\alpha_1(X)\\ &= (\omega \otimes \theta \otimes \mathrm{id})(\alpha_1 \otimes \mathrm{id})\alpha_1(X)\end{aligned}$$

car α_1 est une action. Et donc:

$$(\theta \otimes \mathrm{id})\widehat{\Gamma}_1'((\omega \otimes \mathrm{id})\alpha_1(X)) = ((\omega \otimes \theta) \circ \alpha_1 \otimes \mathrm{id})\alpha_1(X) \in \pi_1(M_3 \cap N_0')'$$

et donc:

$$\widehat{\Gamma}_1'((\omega \otimes \mathrm{id})\alpha_1(X)) \in \pi_1(M_3 \cap M_1')' \otimes \pi_1(M_3 \cap N_0')'$$

et, grâce à (i), on en tire:

$$\widehat{\Gamma}_1'(\pi_1(M_3 \cap N_0')') \in \pi_1(M_3 \cap M_1')' \otimes \pi_1(M_3 \cap N_0')'$$

ce qui est (ii). ∎

4.5. COROLLAIRE. (i) *Soit* $M_0 \subset M_1$ *une inclusion vérifiant les hypothèses de* 4.2; *alors, si* N_0 *est un sous-facteur intermédiaire*

$$M_0 \subset N_0 \subset M_1$$

la sous-algèbre $M_2 \cap N_0'$ *est un co-idéal à gauche de* $\mathcal{W}_1'$.

(ii) *On a:*

$$M_3 \cap N_0' = ((M_3 \cap M_1') \cup (M_2 \cap N_0'))''.$$

(iii) *Si* N_1 *est le sous-facteur intermédiaire* $M_1 \subset N_1 \subset M_2$ *obtenu en faisant la construction de base associée à l'inclusion* $N_0 \subset M_1$ *(on a donc* $N_1 = J_1 N_0' J_1$*), l'algèbre* $N_1 \cap M_0'$ *est un co-idéal à gauche de* $\mathcal{W}_1'^{\sigma}$ *(ou* $\mathcal{W}_1$*). De plus, avec les notations de* 3.5 *et* 4.4, *on a:*

$$N_1 \cap M_0' = \widetilde{B}_{N_0}$$

et donc (*en considérant,* $N_1 \cap M_0'$ *dans* $\mathcal{W}_1$ *par identification de* $\mathcal{W}_1$ *et de* $\mathcal{W}_1'^{\sigma}$)*:*

$$B_{N_0} = N_1 \widetilde{\cap M_0'}.$$

(iv) *On a:*

$$M_3 \cap N_1' = (M_3 \cap M_1') \cap (N_1 \cap M_0')'.$$

Démonstration. En appliquant 3.2 (ii) au co-idéal à gauche $\pi_1(M_3 \cap N_0')'$ de $\widehat{\mathcal{W}_1'}$, on trouve que $\pi_1(M_2 \cap N_0') = \pi_1(M_2 \cap M_0') \cap \pi_1(M_3 \cap N_0')$ est un co-idéal à droite de $\widehat{\widehat{\mathcal{W}_1''}} = \mathcal{W}_1'^{\sigma}$, ou encore un co-idéal à gauche de $\mathcal{W}_1'$, ce qui prouve (i).

En appliquant 3.3 au co-idéal à gauche $\pi_1(M_3 \cap N_0')'$ de $\widehat{\mathcal{W}_1'}$, on trouve que:

$$\pi_1(M_3 \cap N_0')' = \pi_1(M_3 \cap M_1')' \cap \pi_1(M_2 \cap N_0')'$$

d'où on tire (ii).

En appliquant la co-involution j_1, on trouve (iii).

En appliquant (i) à l'inclusion $M_1 \subset M_2$, on trouve que $M_3 \cap N_1'$ est un co-idéal à gauche de $\mathcal{W}_2'$, et donc (4.2) que $\pi_1(M_3 \cap N_1')$ est un co-idéal à gauche de $\widehat{\mathcal{W}_1}$; en utilisant 3.3 et 4.1, on trouve donc:

$$\pi_1(M_3 \cap N_1') = \pi_1(M_3 \cap M_1') \cap (\pi_1(M_2 \cap M_0') \cap \pi_1(M_3 \cap N_1')')'.$$

Or, on a, trivialement $N_1 \cap M_0' \subset M_2 \cap M_0' \cap (M_3 \cap N_1')'$, d'où on déduit donc:

$$\pi_1(M_3 \cap M_1') \cap \pi_1(N_1 \cap M_0')' \subset \pi_1(M_3 \cap N_1').$$

L'inclusion inverse étant triviale, on en déduit (iv). ∎

4.6. PROPOSITION. (i) *Soit* $M_0 \subset M_1$ *une inclusion vérifiant les hypothèses de* 4.2*; alors, si* B *est un co-idéal à gauche de* $\widehat{\mathcal{W}_1'}$*, on a l'égalité:*

$$\{X \in M_1 \mid \alpha_1(X) \in M_1 \otimes B\} = M_1 \cap \pi_1^{-1}(B')'$$

et cette algèbre, notée N_B*, vérifie:*

$$M_0 \subset N_B \subset M_1.$$

(ii) *Si* N_0 *est un facteur intermédiaire* $M_0 \subset M_1$*, on a:*

$$N_{B_{N_0}} = M_1 \cap (M_3 \cap N_0')' = M_1 \cap (M_2 \cap N_0')'.$$

(iii) *Avec les notations de* 4.5*, on a:*

$$N_1 = (M_1 \cup (N_1 \cap M_0'))''$$
$$N_0 = M_1 \cap (M_2 \cap M_0')'$$

et l'application $N \to B_N$ *définie en* 4.4 *est donc injective.*

Démonstration. Si x appartient à $\pi_1^{-1}(B')$, $\pi_1(x)$ appartient à B', et $1 \otimes x$ commute donc à $M_1 \otimes B$. On en déduit l'égalité de (i), en utilisant 4.1. Par ailleurs, on a clairement, en utilisant 4.2, $M_0 \subset N_B$, ce qui achève la démonstration de (i).

En appliquant (i) à $B_{N_0} = \pi_1(M_3 \cap N_0')'$, on trouve:

$$N_{B_{N_0}} = M_1 \cap (M_3 \cap N_0')'.$$

La deuxième égalité se déduit alors de 4.5 (ii).

Comme en 4.5, on pose $N_1 = J_1 N_0' J_1$; on a, trivialement:

$$(M_1 \cup (N_1 \cap M_0'))'' \subset N_1 \subset M_2 \cap (M_3 \cap N_1')'.$$

L'isomorphisme qui rend M_2 isomorphe à $M_1 \rtimes_\alpha \widehat{\mathcal{W}}_1'$ (4.2), envoie ([8], 11.6) $X \in M_1$ sur $\alpha_1(X)$, et $y \in M_2 \cap M_0'$ sur $1 \otimes \pi_1(y)$, et donc $(M_1 \cup (N_1 \cap M_0'))''$ sur $(\alpha_1(M_1) \cup (1 \otimes \pi_1(N_1 \cap M_0'))''$, qui est donc égal à $M_1 \rtimes_{\alpha_1} (N_1 \cap M_0')$, d'après 4.5 (iii) et 3.9.

Cet isomorphisme envoie $M_2 \cap (M_3 \cap N_1')'$ sur $M_1 \rtimes_{\alpha_1} \widehat{\mathcal{W}}_1' \cap M_1 \otimes \pi_1(M_3 \cap N_1')'$, ou encore, en utilisant 4.5 (iv) sur:

$$M_1 \rtimes_{\alpha_1} \widehat{\mathcal{W}}_1' \cap M_1 \otimes (\pi_1(M_3 \cap M_1')' \cup \pi_1(N_1 \cap M_0'))''$$

ce qui, par 3.6 est aussi égal à $M_1 \rtimes_{\alpha_1} (N_1 \cap M_0')$; on en déduit que:

$$(M_1 \cup (N_1 \cap M_0'))'' = M_2 \cap (M_3 \cap N_1')'$$

d'où on déduit que $N_1 = (M_1 \cup (N_1 \cap M_0'))''$. En passant aux commutants, on trouve donc que $N_0 = M_1 \cap (M_2 \cap M_0')'$, et donc, par (ii), que $N_{B_{N_0}} = N_0$, ce qui assure l'injectivité de l'application $N \to B_N$. ∎

4.7. THÉORÈME. *Soit* $M_0 \subset M_1$ *une inclusion vérifiant les hypothèses de* 4.2*. Soit* N_0 *un sous-facteur intermédiaire*

$$M_0 \subset N_0 \subset M_1.$$

Notons N_1 *le sous-facteur intermédiaire* $M_1 \subset N_1 \subset M_2$ *obtenu en faisant la construction de base associée à l'inclusion* $N_0 \subset M_1$ *(on a donc* $N_1 = J_1 N_0' J_1$*). Alors:*

(i) *on a* $B_{N_1} = \widetilde{B}_{N_0}$, *où* B_N *est le co-idéal à gauche associé au facteur intermédiaire* N (4.4), *et* $B \to \widetilde{B}$ *est la dualité entre co-idéaux de* $\widehat{\mathcal{W}_1'}$ *et* $\mathcal{W}'^{\sigma}$ *introduite en* 3.5;

(ii) *on a:*

$$J_{\varphi_1}\pi_1(N_1 \cap M_0')J_{\varphi_1} = \pi_1(N_2 \cap M_0')'$$

où N_2 *est le sous-facteur intermédiaire* $M_2 \subset N_2 \subset M_3$ *obtenu en faisant la construction de base associée à l'inclusion* $N_1 \subset M_2$ (*on a donc* $N_2 = J_2N_1'J_2$);

(iii) *l'application* $N \to B_N$ *est une bijection entre facteurs intermédiaires et co-idéaux, qui préserve les structures ordonnées sur ces deux ensembles.*

Démonstration. D'après 4.6 (iii), N_1 est isomorphe à $M_1 \rtimes_{\alpha_1} (N_1 \cap M_0')$, et cet isomrphisme, d'après 4.2, envoie α_2 sur l'action duale $\widetilde{\alpha}_1$. Donc, en utilisant 3.10, on trouve que $B_{N_1} = N_1 \cap M_0'$, ce qui est égal, d'après 4.5 (iii), à $\widetilde{B}_{N_0}$, ce qui démontre (i). Par ailleurs, on a $B_{N_1} = \pi_2(M_4 \cap N_1')$ (en considérant B_{N_1} comme un co-idéal à gauche de $\widehat{\mathcal{W}_2'}$). Par l'isomorphisme entre $\widehat{\mathcal{W}_2'}$ et $\mathcal{W}_1'^{\sigma}$, on va donc obtenir, par ([8], 5.5) et 4.1, $J_{\varphi_1}\pi_1(N_2 \cap M_0')J_{\varphi_1} = \pi_1(N_2 \cap M_0')'$, d'où le résultat, par (i).

Soit maintenant B un co-idéal à gauche de $\widehat{\mathcal{W}_1'}$, et soit $\widetilde{B}$ le co-idéal associé de $\mathcal{W}_1'^{\sigma}$; en utilisant encore 3.10, on trouve que $B_N = \widetilde{B}$, où N est le facteur intermédiaire $M_1 \subset N = (M_1 \cup \widetilde{B})'' \subset M_2$. Posons $N_0 = J_1N'J_1$; alors N_0 est un facteur intermédiaire $M_0 \subset N_0 \subset M_1$, et, d'après (i), $\widetilde{B}_{N_0} = B_N = \widetilde{B}$; d'où on tire, grâce à 3.3, $B_{N_0} = B$; l'application $N \to B_N$ est donc surjective; on a vu en 4.6 qu'elle est injective; elle est donc une bijection, qui préserve évidemment les structures ordonnées sur ces deux ensembles. ∎

4.8. Théorème. *Soit* $M_0 \subset M_1$ *une inclusion irréductible de facteurs de profondeur* 2, *et* T_1 *un poids opératoriel normal semi-fini fidèle de* M_1 *sur* M_0. *Soient* $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *la tour de facteurs associée, et, pour tout* $i > 0$, *soit* T_i *le poids opératoriel normal semi-fini fidèle associé de* M_i *sur* M_{i-1}. *Alors, si la restriction de* T_2 *à* $M_2 \cap M_0'$ *et la restriction de* T_3 *à* $M_3 \cap M_1'$ *sont semi-finies:*

(i) *on peut munir* $M_2 \cap M_0'$ *d'une structure d'algèbre de Woronowicz* $\mathcal{W}_1$;

(ii) *pour tout* $i > 0$, *la restriction de* T_{i+1} *à* $M_{i+1} \cap M_{i-1}'$ *est semi-finie; on peut donc appliquer* (i) *à l'algèbre* $M_{i+1} \cap M_{i-1}'$ *qui est ainsi munie d'une structure d'algèbre de Woronowicz* $\mathcal{W}_i$; *de plus* $\mathcal{W}_{i+1}$ *est isomorphe au commutant de l'algèbre de Woronowicz duale de* $\mathcal{W}_i$;

(iii) *pour tout* $i > 0$, *il existe une action extérieure* α_i *de* $\mathcal{W}_{i+1}$ *sur* M_i, *telle que* M_{i-1} *soit égale à l'algèbre des éléments invariants* $M_i^{\alpha_i}$, *et l'inclusion* $M_i \subset M_{i+1}$ *isomorphe à l'inclusion de* M_i *dans son produit croisé* $M_i \rtimes_{\alpha_i} \mathcal{W}_{i+1}$;

(iv) *pour tout* $i>0$, α_{i+1} *est isomorphe à l'action duale de* α_i, *au sens de* 2.6. *La tour* $(M_i)_{i>0}$ *est donc isomorphe à la tour canonique des produits croisés successifs construite à partir de l'action* α_1 *de* $\mathcal{W}_2$ *sur* M_1, *et le premier facteur* M_0 *est égal à* $M_1^{\alpha_1}$*;*

(v) *pour tout co-idéal à gauche* B *de* $\mathcal{W}_{i+1}$, *on peut associer un sous-facteur intermédiaire* $M_{i-1}\subset N_B\subset M_i$ *tel que:*

$$N_B=\{X\in M_i \mid \alpha_i(X)\in M_i\otimes B\}$$

et on obtient ainsi une bijection entre les ensembles ordonnées des sous-facteurs intermédiares entre M_{i-1} *et* M_i, *et les co-idéaux à gauche de* $\mathcal{W}_{i+1}$*;*

(vi) *pour tout co-idéal à gauche* B *de* $\mathcal{W}_{i+1}$, *soit* $\widetilde{B}$ *le co-idéal à gauche de* $\mathcal{W}_{i+2}$ *associé par* 3.3*; alors , on a* $\widetilde{B}=B_P$, *où le sous-facteur intermédiaire* P, $M_i\subset P\subset M_{i+1}$ *est donné par la construction de base fournie par l'inclusion* $N_B\subset M_i$.

Démonstration. Il s'agit de 4.2 et 4.7. ∎

4.9. THÉORÈME. ([18], VII) *Soit* $M_0\subset M_1$ *une inclusion irréductible de facteurs, de profondeur* 2, *et* T_1 *un poids opératoriel normal semi-fini fidèle de* M_1 *sur* M_0. *Soient* $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *la tour de facteurs associée, et, pour tout* $i>0$, *soit* T_i *le poids opératoriel normal semi-fini fidèle associé de* M_i *sur* M_{i-1}. *Alors, si la restriction de* T_2 *à* $M_2\cap M_0'$ *et la restriction de* T_3 *à* $M_3\cap M_1'$ *sont semi-finies, et si* $M_2\cap M_0'$ *(resp.* $M_3\cap M_1'$*) est une algèbre abélienne:*

(i) *il existe un groupe localement compact* G *tel que l'algèbre* $L^\infty(G)$ *soit isomorphe à* $M_2\cap M_0'$ *(resp. à* $M_3\cap M_1'$*) et tel que l'algèbre* $\mathcal{R}(G)$ *engendrée par la représentation régulière droite de* G *soit isomorphe à* $M_3\cap M_1'$ *(resp. à* $M_2\cap M_0'$*);*

(ii) *il existe une coaction (resp. une action)* α *de* G *sur* M_1 *telle que* $M_0=M_1^\alpha$ *et telle que l'inclusion* $M_1\subset M_2$ *soit isomorphe à l'inclusion de* M_1 *dans son produit croisé* $M_1\rtimes_\alpha\widehat{G}$ *(resp.* $M_1\rtimes_\alpha G$*);*

(iii) *pour tout sous-groupe fermé* H *de* G, *on peut associer un sous-facteur intermédiaire* $M_0\subset N_H\subset M_1$ *tel que:*

$$N_H=\{X\in M_1 \mid \alpha(X)\in M_1\otimes\mathcal{R}(H)\}$$

(resp. on peut associer le sous facteur intermédiaire $M_0\subset M_1^H\subset M_1$ *où* M_1^H *est formé des éléments de* M_1 *invariant par l'action* α *restreinte au sous-groupe fermé* H*) et on obtient ainsi une bijection entre l'ensemble ordonné des sous-facteurs intermédiaires entre* M_0 *et* M_1, *et l'ensemble ordonn des sous-groupes fermés de* G.

Démonstration. Les énoncés (i) et (ii) sont [7], 8.3. Les co-idéaux à gauche de $\mathcal{R}(G)$ (en fait, comme $\mathcal{R}(G)$ est symmétrique, il s'agit des sous-algèbres de Hopf-von Neumann) sont de la forme $\mathcal{R}(H)$ où H est un sous-groupe fermé de G ([23], théorème 6), ce qui fournit la première partie de (iii), en utilisant 4.8; les co-idéaux à gauche de $L^\infty(G)$ sont de la forme $L^\infty(G/H)$ ([23], théorème 5); le sous-facteur intermédiaire associé est donc:

$$\{X \in M_1 \mid (s \to \alpha_s(X)) \in M_1 \otimes \mathrm{L}^\infty(G/H)\}$$

ce qui est trivialement égal à M_1^H, et démontre donc (iii). ∎

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Baaj, Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz, *Astérisque* **232**(1995), 11–48.
2. S. Baaj, G. Skandalis, Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de $\mathbb{C}^*$-algèbres, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **26**(1993), 425–488.
3. M.-C. David, Paragroupe d'Adrian Ocneanu et algèbre de Kac, *Pacific J. Math.* **172**(1996), 331–362.
4. V.G. Drinfeld, *Quantum groups*, Proceedings ICM Berkeley, 1986, vol. 1, pp. 798–820.
5. E.G. Effros, Z.-J. Ruan, Discrete quantum groups, I: the Haar measure, *Internat. J. Math.* **5**(1994), 681–723.
6. M. Enock, Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac, *J. Funct. Anal.* **26**(1977), 16–47.
7. M. Enock, Inclusions irréductibles de facteurs et unitaires multiplicatifs. II, *J. Funct. Anal.* **154**(1998), 67–109.
8. M. Enock, R. Nest, Inclusions of factors, multiplicative unitaries and Kac algebras, *J. Funct. Anal.* **137**(1996), 466–543.
9. M. Enock, J.-M. Schwartz, Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac. II, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **16**(1980), 189–232.
10. M. Enock, J.-M. Schwartz, *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer Verlag, Berlin 1992.
11. F.M. Goodman, P. de la Harpe, V.F.R. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 14 , Springer Verlag, Berlin 1989.
12. M. Izumi, R. Longo, S. Popa, A Galois Correspondance for compact Groups of Automorphisms of von Neumann Algebras with a generalization to Kac Algebras, *J. Funct. Anal.* **155**(1998), 25–63.
13. G.I. Kac, V.G. Paljutkin, Primer kol'tsevoi gruppy, porozhdennoi gruppami Li, *Ukraïn. Mat. Zh.* **16**(1964), 99–105.
14. G.I. Kac, V.G. Paljutkin, Konechnye kol'tsevie gruppy, *Trudy Moskov. Mat. Obshch* **15**(1966), 224–261; English transl.: Finite ring-groups. *Trans. Moscow Math. Soc.* **15** (1966), 251–294.
15. R. Longo, A duality for Hopf algebras and subfactors. I, *Comm. Math. Phys.* **159** (1994), 133–155.

16. T. MASUDA, Y. NAKAGAMI, A von Neumann algebra framework for the duality of the quantum groups, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **30**(1994), 799–850.
17. T. MASUDA, Y. NAKAGAMI, S.L. WORONOWICZ, lectures at the Fields Institute and at the Banach Institute, 1995.
18. Y. NAKAGAMI, M. TAKESAKI, Duality for Crossed Products of von Neumann Algebras, *Lectures Notes in Math.*, vol. 731, Springer-Verlag, Berlin 1978.
19. A. OCNEANU, A Galois theory for operator algebras, Notes of a UCLA lecture, 1985.
20. G. SKANDALIS, Operator algebras and duality: Proc. ICM Kyoto 1990, vol. 2, 997–1009.
21. Ş. STRĂTILĂ, *Modular Theory in Operator Algebras*, Abacus Press, Turnbridge Wells, England, 1981.
22. W. SZYMANSKI, Finite index subfactors and Hopf algebras crossed products, *Proc. Amer. Math. Soc.* **120**(1994), 519–528.
23. M. TAKESAKI, N. TATSUUMA, Duality and subgroups, *Ann. of Math.* **93**(1971), 344–364.
24. S.L. WORONOWICZ, Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups, Twisted SU(N) group, *Invent. Math.* **93**(1988), 35–76.
25. S.L. WORONOWICZ, Compact quantum group, preprint 1993.
26. S.L. WORONOWICZ, From multiplicative unitaries to quantum groups, *Internat. J. Math.* **7**(1996), 127–149.

MICHEL ENOCK
Institut de Mathématiques de Jussieu
UMR 7586, Case 191
Université Pierre et Marie Curie
F-75252 Paris Cedex 05
FRANCE

E-mail: enock@math.jussieu.fr

Received September 29, 1997.