

UNITAIRE PSEUDO-MULTIPLICATIF  
ASSOCIÉ À UN GROUPOÏDE.  
APPLICATIONS À LA MOYENNABILITÉ

JEAN-MICHEL VALLIN

*Communicated by Șerban Strătilă*

ABSTRACT. From every measured groupoid, we construct a “pseudo-multiplicative” unitary, which generates the two Hopf-von-Neumann bimodule structures constructed in a former paper, and generalize in this way the well-known multiplicative unitary associated with a locally compact group. We prove a generalization of Leptin theorem which connects the amenability of a measured groupoid and the existence of an approximate unit for its Fourier algebra.

KEYWORDS: *Groupoids, multiplicative unitaries, amenability.*

MSC (2000): 22A22,46L10,22D25,16W30.

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. INTRODUCTION. Dans [22], nous avons montré comment, à tout groupoïde mesuré  $(G, \lambda, \mu)$ , on associe deux structures de bimodules de Hopf von Neumann, respectivement sur l’algèbre  $L^\infty(G, \nu)$  des (classes d’équivalence) de fonctions sur  $G$  essentiellement bornées, et sur l’algèbre  $\mathcal{L}(G)$  engendrée par la représentation régulière gauche de  $G$ . Dans cet article, nous poursuivons cette étude en construisant un “unitaire pseudo-multiplicatif”  $V_G$  qui “engendre” ces deux structures: comme première application, en reprenant les travaux de J. Renault sur la moyennabilité des groupoïdes ([16]), cet unitaire nous permet de généraliser un théorème de H. Leptin ([13]) énonçant qu’un groupe localement compact est moyennable si et seulement si son algèbre de Fourier possède une unité approchée.

Après un premier chapitre consacré à des rappels, le deuxième chapitre complète la théorie des bimodules de Hopf von Neumann amorcée dans [22], on élargit, à ce cadre, la notion, due à J.L. Sauvageot ([17], [18]), de produit fibré de  $Z$ -modules ainsi que de formes normales, ce qui nous amène à définir pour toute

trace normale finie fidèle  $\tau$  sur la base  $N$  et pour chaque bimodule de von Neumann un sous-préduale qui s'avère être une algèbre dans le cas d'un bimodule de Hopf von Neumann.

Dans le troisième chapitre, on applique ces résultats à  $\mathcal{G}$  et  $\widehat{\mathcal{G}}$  qui sont les deux bimodules de Hopf von Neumann co-involutif associés à un groupoïde mesuré, on retrouve ainsi l'algèbre que P. Hahn note  $I(G, \nu, \mu)$  dans un contexte plus général (cf. [11], Theorem 1.8) et l'algèbre de Fourier de  $G$ , notée  $A(G)$  dans la définition 1.4 de [16]. On construit un unitaire  $V_G$  qui appartient au produit fibré  $\mathcal{G} \star \widehat{\mathcal{G}}$ , engendre ces deux structures de bimodule de Hopf von Neumann co-involutif, et vérifie une relation pentagonale. On a ainsi l'analogie pour les groupoïdes de l'unitaire multiplicatif associé à un groupe localement compact par W.F. Stinespring ([20]) et qui a conduit à travers les travaux de M. Takesaki, G. Kac et L. Vainerman, M. Enock et J.M. Schwartz, S.L. Woronowicz, S. Baaj et G. Skandalis, à la notion de groupe quantique ([21], [12], [7], [24], [2]). Enfin dans le quatrième chapitre, à l'aide de techniques initiées par D. Voiculescu ([23]), on utilise cet unitaire pour étudier la moyennabilité des groupoïdes mesurés qu'on caractérise sous de nouveaux aspects: par l'existence d'une unité approchée, en norme préduale, pour  $A(G)$  ou en utilisant explicitement  $V_G$ .

Je tiens à remercier chaleureusement J. Renault et M. Enock pour les fructueuses discussions que nous avons eues sur les groupoïdes et la moyennabilité des algèbres de Kac.

1.2. NOTATIONS ET RAPPELS. On notera, dans toute la suite,  $N$  une algèbre de von Neumann commutative, de sorte que les  $N$ -modules à droite sont exactement les  $N$ -modules à gauche, et on fixe une trace  $\tau$  normale, semi-finie, fidèle (n.s.f.f.) sur  $N$ .

Soit  $K$  un espace hilbertien,  $X$  une partie de l'algèbre  $\mathcal{L}(K)$  des opérateurs bornés sur  $K$ ,  $\rho$  une représentation normale et non dégénérée de  $N$  sur  $K$ . L'espace hilbertien  $K$  a naturellement une structure de  $N$ -module notée indifféremment  $K_\rho$  ou  $(\rho K)$  en posant pour tous  $\xi$  dans  $K$  et  $n$  dans  $N$ :

$$\xi \cdot n = n \cdot \xi = \rho(n)\xi.$$

On notera  $\mathcal{L}_X(K)$ , le commutant de  $X$  dans  $\mathcal{L}(K)$  et  $\mathcal{D}(K_\rho, \tau)$ , l'ensemble des vecteurs  $\xi$  de  $K$  qui sont  $\tau$ -bornés pour  $\rho$ , c'est à dire tels qu'il existe un nombre réel  $k$  vérifiant pour tout élément  $n$  dans  $\mathcal{N}_\tau$ :

$$\|\rho(n)\xi\|^2 \leq k\tau(n^*n).$$

En notant  $\omega_\xi$  la forme linéaire sur  $\mathcal{L}(K)$ : ( $x \mapsto \langle x\xi, \xi \rangle$ ) et d'après le paragraphe 1.2 de [19],  $\xi$  est  $\tau$ -borné pour  $\rho$  si et seulement si l'opérateur  $\frac{d(\omega_\xi \circ \rho)}{d\tau}$  est borné.

Si  $\rho', \pi, \pi'$  désignent trois autres représentations normales et non dégénérées de  $N$  dans des espaces hilbertiens  $K', H, H'$  respectivement, on notera  $\mathcal{L}_{\rho, \pi}(K, H)$  (resp.  $\mathcal{L}_{\rho', \pi'}(K', H')$ ) l'ensemble des opérateurs d'entrelacement de  $\rho$  et  $\pi$  (resp. de  $\rho'$  et  $\pi'$ ).

On construit d'après [19] le produit tensoriel de  $K_\rho$  par  ${}_{\rho'}K'$  au dessus de  $N$ , qu'on notera  $K_\rho \otimes_{\tau} {}_{\rho'}K'$ , qui est le complété séparé pour le produit scalaire sur le produit tensoriel algébrique  $\mathcal{D}(K_\rho, \tau) \odot K'$  défini par la relation:

$$\langle \xi \otimes \xi', \xi \otimes \xi' \rangle = \left\langle \rho' \left( \frac{d(\omega_\xi \circ \rho)}{d\tau} \right) \xi', \xi' \right\rangle$$

et qui, de manière équivalente, est le complété séparé de  $K \odot \mathcal{D}(K', \tau)$  pour le produit scalaire suivant:

$$\langle \xi \otimes \xi', \xi \otimes \xi' \rangle = \left\langle \rho \left( \frac{d(\omega_{\xi'} \circ \rho')}{d\tau} \right) \xi, \xi \right\rangle,$$

ces deux produits scalaires étant égaux sur  $\mathcal{D}(K_\rho, \tau) \odot \mathcal{D}(K', \tau)$ ; on notera  $\xi \otimes_{\tau} \xi'$  l'image dans  $K_\rho \otimes_{\tau} {}_{\rho'}K'$  du tenseur algébrique élémentaire  $\xi \otimes \xi'$ .

Si  $\tau'$  désigne un autre poids n.s.f.f. sur  $N$ , d'après [17], proposition 2.6 et 2.7, les deux produits tensoriels que l'on vient d'expliciter sont isomorphes mais l'isomorphisme ne préserve pas les tenseurs élémentaires  $\xi \otimes_{\tau} \xi'$ . Pour tous  $x, y$  respectivement dans  $\mathcal{L}_{\rho, \pi}(K, H)$  et  $\mathcal{L}_{\rho', \pi'}(K', H')$ , on définit d'après [17], lemme 2.3, un produit tensoriel  $x \otimes_{\rho, \rho', \tau, \pi, \pi'} y$  de  $K_\rho \otimes_{\tau} {}_{\rho'}K'$  vers  $H_\pi \otimes_{\tau} H'$  qui est indépendant de  $\tau$ , donc si  $\rho$  et  $\pi$  (resp.  $\rho'$  et  $\pi'$ ) sont égaux on l'écrira plus simplement  $x_\rho \otimes_{\rho'} y$ . On peut ainsi construire pour toute sous-algèbre de von Neumann  $R$  de  $\mathcal{L}_{\rho(N)}(K)$  et pour toute sous-algèbre de von Neumann  $S$  de  $\mathcal{L}_{\rho'(N)}(K')$  un produit tensoriel  $R_\rho \otimes_{\rho'} S$ , indépendant de  $\tau$ , qui a pour réalisation dans  $L(K_\rho \otimes_{\tau} {}_{\rho'}K')$  la sous-algèbre de von Neumann de  $L(K_\rho \otimes_{\tau} {}_{\rho'}K')$  engendrée par les tenseurs  $r_\rho \otimes_{\rho'} s$  pour tous les  $r$  dans  $R$  et tous les  $s$  dans  $S$ .

De plus, si  $M^1$  et  $M^2$  sont des algèbres de von Neumann opérant dans des espaces hilbertiens  $L^1$  et  $L^2$ , si  $\pi^1$  (resp.  $\pi^2$ ) est une représentation de  $N$ , normale, préservant l'unité et à valeurs respectivement dans  $M^1$  et  $M^2$ , le commutant dans  $\mathcal{L}(L_{\pi^1 \circ \pi^2}^1 \otimes_{\tau} L^2)$  de l'algèbre  $\mathcal{L}_{M^1}(L^1)_{\pi^1} \otimes_{\pi^2} \mathcal{L}_{M^2}(L^2)$  est, à isomorphisme normal près, indépendant de  $(L^1, L^2, \tau)$  on le notera  $M_{\pi^1}^1 \star_{\pi^2} M^2$ . Plus précisément, en considérant  $\gamma^1$  et  $\gamma^2$  deux représentations normales non dégénérées de  $M^1$  et  $M^2$  respectivement, dans des espaces hilbertiens  $K^1$  et  $K^2$ , l'application  $\gamma^1 \circ \pi^1$  (resp.  $\gamma^2 \circ \pi^2$ ) est une représentation de  $N$  dans  $K^1$  et dans  $K^2$  respectivement, et il existe une unique représentation, notée  $\gamma_{\pi^1}^1 \star_{\pi^2} \gamma^2$ , de  $M_{\pi^1}^1 \star_{\pi^2} M^2$  dans  $\mathcal{L}(K_{\gamma^1 \circ \pi^1}^1 \otimes_{\tau} \gamma^2 \circ \pi^2 K^2)$  telle que pour tout  $T_1$  dans  $\mathcal{L}_{\text{Id}, \gamma^1}(L^1, K^1)$ , tout  $T_2$  dans  $\mathcal{L}_{\text{Id}, \gamma^2}(L^2, K^2)$ , et tout  $Z$  dans  $M_{\pi^1}^1 \star_{\pi^2} M^2$ :

$$\begin{aligned} (T_1 \otimes_{\tau} T_2)Z &= (\gamma_{\pi^1}^1 \star_{\pi^2} \gamma^2)(Z)(T_1 \otimes_{\tau} T_2) \\ (\gamma_{\pi^1}^1 \star_{\pi^2} \gamma^2)(M_{\pi^1}^1 \star_{\pi^2} M^2) &= \gamma^1(M^1)_{\gamma^1 \circ \pi^1} \star_{\gamma^2 \circ \pi^2} \gamma^2(M^2); \end{aligned}$$

de plus, si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont fidèles alors  $\gamma_{\pi^1}^1 \star_{\pi^2} \gamma^2$  l'est aussi.

Soient  $M$  une algèbre de von Neumann et  $r, s$  deux représentations normales non dégénérées de  $N$  dans  $M$ ; on appelle *module double* le triplet  $V = (M, s, r)$ . Dans ces conditions,  $M$  est de deux manières un  $N$ -module à gauche, de deux

manières un  $N$ -module à droite, et de quatre manières un  $N$ - $N$ -bimodule, qu'on notera:  ${}_iM$ ,  $M_j$ ,  ${}_iM_j$  pour  $i, j$  dans  $\{s, r\}$ ; par exemple les structures  ${}_sM$  et  ${}_sM_r$  sont données pour tous  $n, n'$  dans  $N$  et  $m$  dans  $M$  par:

$$n \cdot_s m = s(n)m, \quad n \cdot_s m \cdot_r n' = s(n)mr(n').$$

1.3. BIMODULES DE HOPF. (cf. [22]) Soit  $V = (M, s, r)$  un module double; on dit que  $V$  est un bimodule de von Neumann sur  $N$  si pour tous  $n, n'$  dans  $N$ , on a  $s(n)r(n') = r(n')s(n)$ .

Si  $H$  est un espace hilbertien dans lequel  $M$  opère,  $H$  est un  $N$ - $N$ -bimodule de trois manières, on note ces structures  ${}_sH_s$ ,  ${}_rH_r$ ,  ${}_sH_r (= {}_rH_s)$ .

Par exemple, la structure  ${}_sH_r$  est donnée, pour tous  $n, n'$  de  $N$  et tout  $\xi$  de  $H$  par:

$$n \cdot_s \xi \cdot_r n' = s(n)r(n')\xi.$$

Ainsi, on peut définir quatre produits tensoriels hilbertiens de  $H$  par  $H$  au dessus de  $N$ :  $H_s \otimes_s H$ ,  $H_s \otimes_r H$ ,  $H_r \otimes_s H$ ,  $H_r \otimes_r H$ . Comme  $N$  est commutative, on a, dans  $\mathcal{L}(H_s \otimes_r H)$  la relation:  $s(n)_s \otimes_r 1 = 1_s \otimes_r r(n)$ . Du fait de la commutation de  $s$  et  $r$ , les opérateurs  $1_s \otimes_r s(n)$ ,  $r(n)_s \otimes_r 1$  et  $r(n)_s \otimes_r s(n)$  ont un sens dans  $\mathcal{L}(H_s \otimes_r H)$ , donc dans  $M_s \star_r M$ , et sont indépendants de  $\tau$ . L'espace hilbertien  $H_s \otimes_r H$  et l'algèbre de von Neumann  $M_s \star_r M$  deviennent des  $N$ - $N$ -bimodules notés respectivement  ${}_r(H_s \otimes_r H)_s$  et  ${}_r(M_s \star_r M)_s$  en posant pour tous  $\xi$  dans  $H_s \otimes_r H$ , tout  $x$  dans  $M_s \star_r M$ , et tous  $n, n'$  dans  $N$ :

$$n \cdot_r \xi \cdot_s n' = (r(n)_s \otimes_r s(n'))\xi, \quad n \cdot_r x \cdot_s n' = (r(n)_s \otimes_r 1)x(1_s \otimes_r s(n')).$$

D'après le lemme 2.1.3 de [22], les espaces hilbertiens  $(H_s \otimes_r H)_s \otimes_r H$  et  $H_s \otimes_r (H_s \otimes_r H)$  sont canoniquement isomorphes et isométriques, ce qui induit un isomorphisme entre les algèbres de von Neumann  $(M_s \star_r M)_s \star_r M$  et  $M_s \star_r (M_s \star_r M)$ .

Pour tous  $i, j$  dans  $\{s, r\}$ , on note  $\Sigma_{i,j}$  la réflexion de  $H_i \otimes_j H$  vers  $H_j \otimes_i H$ , telle que, pour tous  $\xi^1, \xi^2$  respectivement dans  $\mathcal{D}(H, i)$  et  $\mathcal{D}(H, j)$ , on a:  $\Sigma_{i,j}(\xi_i^1 \otimes_j \xi_j^2) = \xi_j^2 \otimes_i \xi_i^1$ ; on note  $\varsigma_{i,j}$  l'isomorphisme de  $M_i \star_j M$  sur  $M_j \star_i M$  défini, pour tout  $x$  de  $M_i \star_j M$ , par:  $\varsigma_{i,j}(x) = \Sigma_{i,j}x\Sigma_{i,j}^*$ .

Avec les notations qui précèdent, on a (cf. [22], définition 2.2.1):

1.3.1. DÉFINITION. (i) Soit  $V = (M, s, r)$  un bimodule de von Neumann; on appelle *coproduit de  $V$*  tout homomorphisme normal injectif  $\Gamma$  de  $M$  vers  $M_s \star_r M$  qui vérifie pour tout  $n$  dans  $N$ :

- (a)  $\Gamma(r(n)) = r(n)_s \otimes_r 1$ ;
- (b)  $\Gamma(s(n)) = 1_s \otimes_r s(n)$ ;
- (c)  $(\Gamma_s \star_r \text{Id}) \circ \Gamma = (\text{Id}_s \star_r \Gamma) \circ \Gamma$ ;

on dit alors que le couple  $(V, \Gamma)$  est un bimodule de Hopf.

(ii) On dit qu'un bimodule de Hopf est *symétrique* ou *co-commutatifs* si l'on a:

$$s = r, \quad \varsigma_{r,r} \circ \Gamma = \Gamma.$$

(iii) Si  $(V, \Gamma)$  est un bimodule de Hopf, on appelle *co-involution* de  $(V, \Gamma)$  tout anti-automorphisme involutif  $j$ , de  $M$ , tel que:

$$j \circ s = r, \quad (j_s \star_r j) \circ \Gamma = \varsigma_{s,r} \circ \Gamma \circ j.$$

On dit alors que  $(V, \Gamma, j)$  est un bimodule de Hopf co-involutif.

## 2. PRODUITS FIBRÉS, STRUCTURES SUR LE PRÉDUAL D'UN BIMODULE DE HOPF

Dans tout ce chapitre, on considère  $V = (M, s, r)$  et  $V^1 = (M^1, s_1, r_1)$  deux modules doubles; notons  $(M, H = L^2(M), J, P)$  et  $(M^1, H^1 = L^2(M^1), J^1, P^1)$  les formes standard de  $M$  et  $M^1$  (cf. [8]). On suppose aussi que la trace  $\tau$  est *finie* et normalisée.

### 2.1. LE SOUS-PRÉDUAL D'UN MODULE DOUBLE.

2.1.1. DÉFINITIONS. On note

$$F_*^\tau = \left\{ \omega \in (M_*)^+ : \frac{d(\omega \circ r)}{d\tau} \text{ et } \frac{d(\omega \circ s)}{d\tau} \text{ bornés} \right\};$$

on pose pour tout  $\omega$  dans  $F_*^\tau$ :

$$\|\omega\|_\tau = \max \left( \left\| \frac{d(\omega \circ r)}{d\tau} \right\|, \left\| \frac{d(\omega \circ s)}{d\tau} \right\| \right);$$

on désigne par  $V_*^\tau$  le sous-espace vectoriel de  $M_*$  engendré par  $F_*^\tau$ ; on note  $\|\cdot\|_*$  la norme usuelle de préduel. L'espace vectoriel  $V_*^\tau$  s'appellera le *sous-préduel* de  $V$ .

2.1.2. LEMME. *L'ensemble  $F_*^\tau$  est un sous-cône convexe héréditaire de  $(M_*)^+$  et pour tout élément  $\omega$  du sous-préduel de  $V$  il existe  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ , tous dans  $F_*^\tau$ , tels que:*

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 + i(\omega_3 - \omega_4).$$

*Démonstration.* Evidente. ■

### 2.2. PRODUITS FIBRÉS.

2.2.1. LEMME ET DÉFINITION. *Si on note:*

$$V \star V^1 = \left\{ x \in \mathcal{L}(H_{s \otimes_\tau s^1} H^1, H_{r \otimes_\tau r^1} H^1) : \forall T \in \mathcal{L}_M(H), \forall T^1 \in \mathcal{L}_{M^1}(H^1) \right. \\ \left. (T_{r \otimes_\tau r^1} T^1)x = x(T_{s \otimes_\tau s^1} T^1) \right\};$$

*alors l'ensemble  $V \star V^1$ , qu'on appellera produit fibré de  $V$  par  $V^1$  (au-dessus de  $N$ ), est un sous-espace vectoriel faiblement fermé de l'espace  $\mathcal{L}(H_{s \otimes_\tau s^1} H^1, H_{r \otimes_\tau r^1} H^1)$  il a par induction une structure d'espace de Banach indépendante de  $\tau$  et possède un préduel.*

*Démonstration.* Il est évident que  $V \star V^1$  est faiblement fermé dans l'espace de Banach  $\mathcal{L}(H_s \otimes_{\tau} s^1 H^1, H_r \otimes_{\tau} r^1 H^1)$  donc dans  $\mathcal{L}((H_s \otimes_{\tau} s^1 H^1) \oplus (H_r \otimes_{\tau} r^1 H^1))$ ; il possède ainsi un préduel (cf. [6], chapitre 1, paragraphe 3, lemme 1 ou [4], 3.1 à 3.3). Le reste du lemme est immédiat. ■

2.2.2. REMARQUE. Si on a  $r = s$  et  $r^1 = s^1$ , on retrouve l'algèbre de von Neumann  $M_s \star_{r^1} M_1$  produit fibré rappelée au paragraphe 1.2.

Soit à présent  $\omega^1$  un élément positif de  $V_*^{\tau}$ ; d'après le lemme 2.10 de [8] il existe donc un unique élément  $\xi^1$  dans le cône positif  $P$  de la forme standard de  $M$  tel que  $\omega^1 = \omega_{\xi^1}$ . D'après ce qui précède,  $\xi^1$  est  $\tau$ -borné pour  $r$  et pour  $s$  dans l'espace hilbertien  $H = L^2(M)$ .

2.2.3. LEMME. *Pour tous  $\eta$  dans  $H^1 (= L^2(M^1))$  et  $x$  dans  $\mathcal{L}(H_s \otimes_{\tau} s^1 H^1, H_r \otimes_{\tau} r^1 H^1)$ , on a :*

$$\left\langle x(\xi_s^1 \otimes_{\tau} s^1 \eta), \xi_r^1 \otimes_{\tau} r^1 \eta \right\rangle \leq \|x\| \|\omega_{\eta}\| \left\| \frac{d(\omega^1 \circ s)}{d\tau} \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d(\omega^1 \circ r)}{d\tau} \right\|^{\frac{1}{2}}.$$

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $\eta$  dans les conditions de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} \left| \left\langle x(\xi_s^1 \otimes_{\tau} s^1 \eta), \xi_r^1 \otimes_{\tau} r^1 \eta \right\rangle \right| &\leq \|x\| \left\| \xi_s^1 \otimes_{\tau} s^1 \eta \right\| \left\| \xi_r^1 \otimes_{\tau} r^1 \eta \right\| \\ &\leq \|x\| \left\langle \frac{d(\omega^1 \circ s)}{d\tau} \cdot \eta, \eta \right\rangle^{\frac{1}{2}} \left\langle \frac{d(\omega^1 \circ r)}{d\tau} \cdot \eta, \eta \right\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|x\| \left( \omega_{\eta} \left( \frac{d(\omega^1 \circ s)}{d\tau} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \omega_{\eta} \left( \frac{d(\omega^1 \circ r)}{d\tau} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|x\| \|\omega_{\eta}\| \left\| \frac{d(\omega^1 \circ s)}{d\tau} \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d(\omega^1 \circ r)}{d\tau} \right\|^{\frac{1}{2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2.4. NOTATIONS. (i) Sous les conditions qui précèdent, on désignera par  $\omega_{\xi_s^1 \otimes_{\tau} s^1 \eta, \xi_r^1 \otimes_{\tau} r^1 \eta}$ , l'élément de  $(V \star V^1)_*$  défini pour tout  $x$  de  $V \star V^1$  par :

$$(\omega_{\xi_s^1 \otimes_{\tau} s^1 \eta, \xi_r^1 \otimes_{\tau} r^1 \eta})(x) = \left\langle x(\xi_s^1 \otimes_{\tau} s^1 \eta), \xi_r^1 \otimes_{\tau} r^1 \eta \right\rangle.$$

(ii) Pour tout  $\omega$  positif dans  $M_*^1$ , on notera  $\eta$  l'unique vecteur du cône de la forme standard de  $M^1$  tel que  $\omega = \omega_{\eta}$ .

2.2.5. LEMME ET DÉFINITION. *L'application:  $\omega_{\eta} \mapsto \omega_{\xi_s^1 \otimes_{\tau} s^1 \eta, \xi_r^1 \otimes_{\tau} r^1 \eta}$  est bien définie de  $(M_*^1)^+$  vers  $(V \star V^1)_*$  et possède un unique prolongement linéaire normiquement continu de  $M_*^1$  vers  $(V \star V^1)_*$  de norme majorée par  $2\|\omega^1\|_{\tau}$ .*

*L'image de tout élément  $\omega$  de  $M_*^1$  par ce prolongement se notera  $\omega_{s,r,\tau,s^1,r^1}^1 \otimes \omega$  ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté,  $\omega^1 \otimes_{\tau} \omega$ .*

*Démonstration.* Le fait que l'application  $\omega_{\eta} \mapsto \omega_{\xi_s^1 \otimes_{\tau} s^1 \eta, \xi_r^1 \otimes_{\tau} r^1 \eta}$  est bien définie de  $M_*^{1+}$  vers  $(V \star V^1)_*$  est évident d'après le lemme 2.2.3, en suivant le même

raisonnement que J.L. Sauvageot dans la proposition III.4 de [17] on montre que cette application est additive et positivement homogène. On peut la prolonger linéairement de manière unique à tout  $M_*$ , grâce à l'existence de la décomposition de Jordan (cf. [14], 3.1 à 3.6); de plus, si  $\omega_0$  est un élément quelconque de  $M_*$  et  $\omega_0 = \omega_1 - \omega_2 + i(\omega_3 - \omega_4)$  est sa décomposition de Jordan, on a, en notant  $\varphi$  le prolongement:

$$\begin{aligned} \|\varphi(\omega_0)\| &= \|\varphi(\omega_1) - \varphi(\omega_2) + i(\varphi(\omega_3) - \varphi(\omega_4))\| \\ &\leq \|\varphi(\omega_1)\| + \|\varphi(\omega_2)\| + \|\varphi(\omega_3)\| + \|\varphi(\omega_4)\| \\ &\leq (\|\omega_1\| + \|\omega_2\| + \|\omega_3\| + \|\omega_4\|) \left\| \frac{d(\omega^1 \circ s)}{d\tau} \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d(\omega^1 \circ r)}{d\tau} \right\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\|\omega_0\| \left\| \frac{d(\omega^1 \circ s)}{d\tau} \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d(\omega^1 \circ r)}{d\tau} \right\|^{\frac{1}{2}} \leq 2\|\omega_0\| \|\omega^1\|_\tau, \end{aligned}$$

d'où le corollaire. ■

**2.2.6. COROLLAIRE.** *Il existe une unique application linéaire normiquement continue de  $V \star V^1$  dans  $M^1$ , qu'on notera  $\omega^1 \otimes_{s,r,\tau,s^1,r^1} i$  ou  $\omega^1 \otimes_\tau i$ , s'il n'y a pas d'ambiguïté, qui vérifie, pour tout  $\omega$  dans  $M_*^1$ :*

$$\omega \circ (\omega^1 \otimes_\tau i) = \omega^1 \otimes_\tau \omega;$$

de plus, on a  $\|\omega^1 \otimes_\tau i\| \leq 2\|\omega^1\|_\tau$ .

*Démonstration.* Il suffit de transposer l'application  $\phi$  définie dans la démonstration de 2.2.5. ■

**2.2.7. PROPOSITION.** *L'application  $\omega^1 \mapsto \omega^1 \otimes_\tau i$  possède un unique prolongement linéaire de  $V_*^\tau$  dans  $\mathcal{L}(V \star V^1, M^1)$ ; en notant  $\omega \otimes_{s,r,\tau,s^1,r^1} i$  ou  $\omega \otimes_\tau i$ , s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'image par ce prolongement de tout élément  $\omega$  de  $V_*^\tau$ , alors pour tout  $\omega'$  dans  $M_*^1$ , il existe un unique élément de  $(V \star V^1)_*$ , noté  $\omega \otimes_{s,r,\tau,s^1,r^1} \omega'$  ou  $\omega \otimes_\tau \omega'$  s'il n'y a pas d'ambiguïté, et tel que:*

$$\omega' \circ (\omega \otimes_\tau i) = \omega \otimes_\tau \omega'.$$

*Démonstration.* Le raisonnement est le même que dans le corollaire 2.2.6, compte tenu du lemme 2.1.2. ■

**2.2.8. REMARQUE.** (i) Les constructions qui viennent d'être faites à gauche peuvent l'être à droite. Pour tous  $\omega^2$  dans  $(V_*^1)^\tau$  et tout  $\omega$  dans  $M_*$ , on peut construire un élément  $\omega \otimes_\tau \omega^2$  qui coïncide avec la construction à gauche si  $\omega$  est dans  $V_*^\tau$ ; on a aussi l'analogie, à droite, de la proposition 2.2.7.

(ii) Ces constructions généralisent le produit fibré de formes normales positives définies dans la proposition III.4 de [17].

**2.3. LE SOUS-PRÉDUAL D'UN BIMODULE DE HOPF.** Soit  $(V = (M, s, r), \Gamma)$  un bimodule de Hopf sur  $N$  munie d'une trace normale finie fidèle; d'après ce qui

précède, l'algèbre de von Neumann  $M_s \star_r M$  n'est autre que  $\overset{s}{V} \star \overset{r}{V}$  où  $\overset{s}{V} = (M, s, s)$  et  $\overset{r}{V} = (M, r, r)$ ; on a donc  $V_*^\tau = \overset{s}{V}_*^\tau \cap \overset{r}{V}_*^\tau$ . Pour tous  $\omega$  dans  $V_*^\tau$  et  $\omega'$  dans  $M_*$ , d'après le paragraphe 2.2, on peut construire deux éléments de  $(M_s \star_r M)_*$  que nous noterons  $\omega_s \otimes_r \omega'$  et  $\omega'_s \otimes_r \omega$ ;  $M_s \star_r M$  possède une structure de bimodule, pour tout  $\omega''$  dans  $V_*^\tau$ , et on peut définir dans  $(M_s \star_r M_s \star_r M)_*$  les deux formes  $(\omega_s \otimes_r \omega')_s \otimes_r \omega''$  et  $\omega_s \otimes_r (\omega'_s \otimes_r \omega'')$ .

2.3.1. LEMME. *Pour tous  $\omega, \omega''$  dans  $V_*^\tau$  et tout  $\omega'$  dans  $M_*$ , on a:*

$$(\omega_s \otimes_r \omega')_s \otimes_r \omega'' = \omega_s \otimes_r (\omega'_s \otimes_r \omega'').$$

*Démonstration.* Supposons que les formes  $\omega, \omega'$  et  $\omega''$  sont positives, soient  $\xi$  dans  $\mathcal{D}(H_r, \tau)$ ,  $\xi''$  dans  $\mathcal{D}(H_s, \tau)$  et  $\xi'$  dans  $H$  tels que  $\omega = \omega_\xi$ ,  $\omega' = \omega_{\xi'}$ ,  $\omega'' = \omega_{\xi''}$ , d'après le lemme 2.1.3 de [22]; on a  $(\xi_s \otimes_r \xi')_s \otimes_r \xi'' = \xi_s \otimes_r (\xi'_s \otimes_r \xi'')$ , d'où  $(\omega_s \otimes_r \omega')_s \otimes_r \omega'' = \omega_s \otimes_r (\omega'_s \otimes_r \omega'')$ . Le cas général s'en déduit à l'aide du lemme 2.1.2 et de la bilinéarité des produits fibrés. ■

2.3.2. LEMME. *Pour tous  $\theta$  dans  $(M_s \star_r M)_*$  et dans  $V_*^\tau$  on a  $(\theta_s \otimes_r \omega) \cdot (\Gamma_s \star_r i) = (\theta \circ \Gamma)_s \otimes_r \omega$  et  $(\omega_s \otimes_r \theta) (\Gamma_s \star_r i) = \omega_s \otimes_r (\theta \circ \Gamma)$ .*

*Démonstration.* Soit  $T$  dans  $\mathcal{L}(H, H_s \otimes_r H)$  vérifiant pour tout  $x$  dans  $M$ :  $Tx = \Gamma(x)T$ ; par définition de  $\Gamma_s \star_r i$ , on a pour tout  $z$  dans  $M_s \star_r M$ :

$$(\Gamma_s \star_r i)(z)T = (T_s \otimes_r 1)z.$$

Soient  $\xi, \alpha$  quelconques dans  $H$  et  $H_s \otimes_r H$  respectivement, alors pour tout  $x$  dans  $M$  on a:

$$(\omega_{T\xi} \circ \Gamma)(x) = \langle \Gamma(x)T\xi, T\xi \rangle = \langle Tx\xi, T\xi \rangle = \langle x\xi, T^*T\xi \rangle = \omega_{\xi, T^*T\xi}(x).$$

Donc  $\omega_{T\xi} \circ \Gamma = \omega_{\xi, T^*T\xi}$ , on en tire, pour tous  $\eta$  dans  $\mathcal{D}(H_s, \tau)$  et  $z$  dans l'algèbre  $M_s \star_r M$ :

$$\begin{aligned} (\omega_{T\xi} \circ \Gamma)_s \otimes_r \omega_\eta(z) &= \omega_{\xi, T^*T\xi} \otimes_r \omega_\eta(z) = \omega_{\xi_s \otimes_r \eta, T^*T\xi_s \otimes_r \eta}(z) \\ &= \langle z(\xi_s \otimes_r \eta), T^*T\xi_s \otimes_r \eta \rangle = \langle (T_s \otimes_r 1)z(\xi_s \otimes_r \eta), T\xi_s \otimes_r \eta \rangle \\ &= \langle (\Gamma_s \star_r i)z(T\xi_s \otimes_r \eta), T\xi_s \otimes_r \eta \rangle = (\omega_{(T\xi_s \otimes_r \eta)})(\Gamma_s \star_r i)(z) \\ &= (\omega_{T\xi_s \otimes_r \eta})(\Gamma_s \star_r i)(z). \end{aligned}$$

On en déduit que  $(\omega_{T\xi_s \otimes_r \eta})(\Gamma_s \star_r i) = (\omega_{T\xi} \circ \Gamma)_s \otimes_r \omega_\eta$  et la première égalité du lemme par linéarité. L'autre égalité se montre de manière analogue. ■



2.3.3. LEMME. *Pour tous  $\omega, \omega'$  dans  $F_*^\tau$ , l'élément  $(\omega_s \otimes_r \omega') \circ \Gamma$ , qui appartient à  $(M_*)^+$  d'après la proposition 2.2.7, est dans  $F_*^\tau$  et on a:  $\|(\omega_s \otimes_r \omega') \circ \Gamma\|_\tau \leq \|\omega\|_\tau \|\omega'\|_\tau$ .*

*Démonstration.* Soient  $\omega, \omega'$  positifs dans  $V_*^\tau$ ; en notant  $H = L^2(M)$  choisissons  $\xi$  dans  $\mathcal{D}(H_s, \tau)$  et  $\xi'$  dans  $\mathcal{D}(H_r, \tau)$  tels que  $\omega = \omega_\xi$  et  $\omega' = \omega_{\xi'}$ . Pour tout  $\eta$  dans  $\mathcal{D}(H_r, \tau)$ , on a:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d(|(\omega_s \otimes_r \omega') \circ \Gamma| \circ r)}{d\tau}, \omega_\eta \right\rangle &= \left\langle \frac{d((\omega_s \otimes_r \omega') \circ \Gamma \circ r)}{d\tau}, \omega_\eta \right\rangle \\ &= \left\langle (\omega_s \otimes_r \omega') \circ \Gamma \circ r, \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right\rangle = \left\langle \omega_s \otimes_r \omega', (\Gamma \circ r) \left( \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle (\omega_s \otimes_r \omega'), r \left( \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right) \otimes 1 \right\rangle = \left\langle r \left( \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right) \xi_s \otimes_r \xi', \xi_s \otimes_r \xi' \right\rangle \\ &= \left\langle s \left( \frac{d\omega'_\xi \circ r}{d\tau} \right) r \left( \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right) \xi, \xi \right\rangle \\ &= \left\langle r \left( \left( \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \right) s \left( \frac{d\omega'_\xi \circ r}{d\tau} \right) r \left( \left( \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \xi, \xi \right\rangle \\ &= \left\langle s \left( \frac{d\omega'_\xi \circ r}{d\tau} \right) r \left( \left( \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \xi, r \left( \left( \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \xi \right\rangle \\ &\leq \left\| \frac{d\omega' \circ r}{d\tau} \right\| \left\langle r \left( \left( \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \xi, r \left( \left( \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \xi \right\rangle \\ &\leq \|\omega'\|_\tau \left\langle r \left( \frac{d\omega_\eta \circ r}{d\tau} \right) \xi, \xi \right\rangle \leq \|\omega'\|_\tau \langle \eta_s \otimes_r \xi, \eta_s \otimes_r \xi \rangle \\ &\leq \|\omega'\|_\tau \left\langle s \left( \frac{d\omega_\xi \circ s}{d\tau} \right) \eta, \eta \right\rangle \leq \|\omega'\|_\tau \|\omega\|_\tau \|\omega_\eta\|_* . \end{aligned}$$

On en déduit que  $\frac{d(|(\omega_s \otimes_r \omega') \circ \Gamma| \circ r)}{d\tau}$  est borné et  $\left\| \frac{d(|(\omega_s \otimes_r \omega') \circ \Gamma| \circ r)}{d\tau} \right\| \leq \|\omega'\|_\tau \|\omega\|_\tau$ ; un

raisonnement analogue permet de montrer que  $\frac{d(|(\omega_s \otimes_r \omega') \circ \Gamma| \circ s)}{d\tau}$  est dans les mêmes conditions; ainsi,  $(\omega_s \otimes_r \omega') \circ \Gamma$  est dans  $V_*^\tau$  avec  $\|(\omega_s \otimes_r \omega') \circ \Gamma\|_\tau \leq \|\omega'\|_\tau \|\omega\|_\tau$ . ■

2.3.4. PROPOSITION. *Soit  $\mathcal{V} = (V, \Gamma)$  un bimodule de Hopf, alors en posant pour tous  $\omega, \omega'$  dans  $V_*^\tau$ :*

$$\omega \star_\tau \omega' = (\omega \otimes_r \omega') \circ \Gamma$$

*on fait de  $(V_*^\tau, \star_\tau)$  une algèbre qu'on notera  $\mathcal{V}_*^\tau$ ; cette algèbre est commutative si et seulement si  $(V, \Gamma)$  est symétrique. Si, de plus,  $\kappa$  est une co-involution de  $(V, \Gamma)$ ,*

en posant pour tout  $x$  dans  $M$ :

$$\omega^*(x) = \overline{\omega \circ \kappa(x^*)}$$

on fait de  $\mathcal{V}_*^\tau$  une algèbre involutive.

*Démonstration.* Soient  $\omega, \omega', \omega''$  quel conques dans  $V_*^\tau$  on a, en utilisant successivement le lemme 2.3.2, le fait que  $\Gamma$  est un coproduit, le lemme 2.3.1 et le lemme 2.3.2 à nouveau:

$$\begin{aligned} (\omega \star_\tau \omega') \star_\tau \omega'' &= ((\omega_s \otimes_\tau \omega') \circ \Gamma) \star_\tau \omega'' = (((\omega_s \otimes_\tau \omega') \circ \Gamma) \otimes_\tau \omega'') \circ \Gamma \\ &= ((\omega_s \otimes_\tau \omega') \otimes_\tau \omega'') \circ (\Gamma \star_\tau \mathbf{i}) \circ \Gamma = (\omega_s \otimes_\tau (\omega' \otimes_\tau \omega'')) \circ (\mathbf{i}_s \star_\tau \Gamma) \circ \Gamma \\ &= (\omega_s \otimes_\tau ((\omega' \otimes_\tau \omega'') \circ \Gamma)) \circ \Gamma = (\omega_s \otimes_\tau (\omega' \star_\tau \omega'')) \circ \Gamma = \omega \star_\tau (\omega' \star_\tau \omega''). \end{aligned}$$

Le fait que  $(V_*^\tau, \star_\tau)$  soit une algèbre est clair par linéarité.

Si  $\kappa$  est une co-involution de  $\mathcal{V} = (M, \Gamma)$ , alors en notant  $\mathcal{J}$  une implémentation involutive de  $\kappa$  dans  $H$ , on a pour tout  $x$  dans  $M$ ,  $\kappa(x) = \mathcal{J}x^*\mathcal{J}$ ; en particulier, l'égalité  $\mathcal{J}r(n) = s(n^*)\mathcal{J}$  pour tout  $n$  dans  $N$  permet de définir deux anti-isomorphismes adjoints l'un de l'autre:

$$\mathcal{J}_s \otimes_\tau \mathcal{J} : H_r \otimes_\tau H \mapsto H_s \otimes_\tau H, \quad \mathcal{J}_r \otimes_s \mathcal{J} : H_s \otimes_r H \mapsto H_r \otimes_s H$$

définis pour tous  $\xi, \eta$  dans  $\mathcal{D}(H_s, \tau)$  et  $\mathcal{D}(H_r, r)$  respectivement, par les conditions suivantes:  $(\mathcal{J}_r \otimes_s \mathcal{J})(\xi_s \otimes_r \eta) = \mathcal{J}\xi_r \otimes_s \mathcal{J}\eta$  et  $(\mathcal{J}_s \otimes_r \mathcal{J})(\eta_r \otimes_s \xi) = \mathcal{J}\eta_s \otimes_r \mathcal{J}\xi$ .

Ainsi, pour tout  $y$  dans  $M_{s \star_r M}$ , on a:

$$(\kappa_s \star_r \kappa)(y) = (\mathcal{J}_r \otimes_s \mathcal{J})y^*(\mathcal{J}_s \otimes_r \mathcal{J}).$$

Soit  $\omega$  dans dans  $M_*^+$  et  $\xi$  dans  $H$  tel que  $\omega = \omega_\xi$ ; alors pour tout  $x$  dans  $M$  on a:

$$\omega^*(x) = \overline{\langle \kappa(x^*)\xi, \xi \rangle} = \overline{\langle \mathcal{J}x\mathcal{J}\xi, \xi \rangle} = \langle x\mathcal{J}\xi, \mathcal{J}\xi \rangle = \omega_{\mathcal{J}\xi}(x).$$

Si  $\omega$  est plus spécialement dans  $\mathcal{V}_*^\tau$ , alors  $\xi$  est dans  $\mathcal{D}(H_r, \tau)$ ; soit  $\omega'$  un autre élément positif de  $\mathcal{V}_*^\tau$  et si  $\xi'$  dans  $\mathcal{D}(H_s, \tau)$  est tel que  $\omega' = \omega_{\xi'}$ , on a:

$$\begin{aligned} (\omega \star_\tau \omega')^*(x) &= (\omega \star_\tau \omega')^*(x) = (\omega \star_\tau \omega')^*(x) = (\omega_{\mathcal{J}\xi_s \otimes_r \omega_{\mathcal{J}\xi'}})^*(x) = \omega_{(\mathcal{J}\xi_s \otimes_r \mathcal{J}\xi')}^*(x) \\ &= \left\langle \Gamma(x)(\mathcal{J}\xi_s \otimes_r \mathcal{J}\xi'), (\mathcal{J}\xi_s \otimes_r \mathcal{J}\xi') \right\rangle \\ &= \left\langle \Gamma(x)(\mathcal{J}_s \otimes_r \mathcal{J})(\xi_r \otimes_s \xi'), (\mathcal{J}_s \otimes_r \mathcal{J})(\xi_r \otimes_s \xi') \right\rangle \\ &= \overline{\left\langle (\mathcal{J}_r \otimes_s \mathcal{J})\Gamma(x)(\mathcal{J}_s \otimes_r \mathcal{J})(\xi_r \otimes_s \xi'), \xi_r \otimes_s \xi' \right\rangle} \\ &= \overline{\left\langle (\kappa_s \star_r \kappa)\Gamma(x^*)(\xi_r \otimes_s \xi'), \xi_r \otimes_s \xi' \right\rangle} \\ &= \overline{\left\langle \varsigma_{s,r}(\kappa_s \star_r \kappa)\Gamma(x^*)(\xi'_s \otimes_r \xi), \xi'_s \otimes_r \xi \right\rangle} \\ &= \overline{\left\langle (\Gamma \circ \kappa)(x^*)(\xi'_s \otimes_r \xi), \xi'_s \otimes_r \xi \right\rangle} \\ &= \overline{(\omega'_r \otimes_s \omega) \circ \Gamma(\kappa(x^*))} = \overline{(\omega' \star_\tau \omega)(\kappa(x^*))} = (\omega' \star_\tau \omega)^*(x). \end{aligned}$$

On en déduit par linéarité que  $(V_{*, \frac{\star}{\tau}, *})$  est une algèbre involutive. ■

### 3. UNITAIRES PSEUDO-MULTIPLICATIFS ASSOCIÉS AUX GROUPOÏDES

3.1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS. (cf. [22], paragraphe 3) Dans toute la suite, on notera  $G$  un groupoïde topologique localement compact et  $\sigma$ -compact, muni d'un système de Haar  $\{\lambda^u : u \in G^0\}$ ; on considère  $\mu$  une mesure de probabilité quasi-invariante sur  $G^0$  qu'on identifie à la trace sur  $L^\infty(G, \mu)$  canoniquement associée; on note  $\nu$  la mesure sur  $G$  associée à  $\mu$  (avec la même identification que précédemment),  $\nu^{-1}$  la mesure image de  $\nu$  par l'application  $(z \mapsto z^{-1})$  et  $\delta$  la dérivée de Radon-Nikodym de  $\nu$  par rapport à  $\nu^{-1}$ . Dans [16], le triplet  $(G, \{\lambda^u : u \in G^0\}, \mu)$  s'appelle un groupoïde mesuré. Les applications  $s$  et  $r$  (source et but de  $G$ ) amènent à définir deux représentations normales et unitaires notées  $s_G$  et  $r_G$  de  $L^\infty(G^0, \mu)$  vers  $L^\infty(G, \nu)$  en posant pour tout  $f$  de  $L^\infty(G^0, \mu)$  et pour  $\nu$ -presque tout  $x$  de  $G$ :

$$\begin{aligned} [r_G(f)](x) &= f(xx^{-1}) \\ [s_G(f)](x) &= f(x^{-1}x). \end{aligned}$$

Pour tout  $x$  dans  $G$ , on peut définir une isométrie surjective,  $L(x)$  de  $L^2(G, \lambda^{s(x)})$  sur  $L^2(G, \lambda^{r(x)})$ , telle que pour tout  $\xi$  dans  $L^2(G, \lambda^{r(x)})$  et  $\lambda^{r(x)}$ -presque tout  $y$  dans  $G^{r(x)}$ :  $L(x)\xi(y) = \xi(x^{-1}y)$ .

Ces données permettent de construire deux algèbres de Banach involutives, l'une est définie par P. Hahn dans le premier paragraphe de [11] et notée  $I(G)$ ; c'est l'ensemble:

$$\left\{ f \in L^1(G, \nu) : u \mapsto \int |f| d\lambda^u, u \mapsto \int |f(x^{-1})\delta(x)^{-1}| d\lambda^u(x) \right. \\ \left. \text{essentiellement bornées} \right\}$$

muni du produit de convolution et de la norme définie pour tout  $f$  dans  $I(G)$  par

$$\|f\| = \sup \left\{ \left\| u \mapsto \int |f| d\lambda^u \right\|_\infty, \left\| u \mapsto \int |f(x^{-1})\delta(x)^{-1}| d\lambda^u(x) \right\|_\infty \right\}.$$

L'autre algèbre de Banach involutive, appelée algèbre de Fourier de  $G$  par J. Renault, est d'après la proposition 2.5 de [16], l'algèbre  $A(G)$  des fonctions numériques  $\varphi$  sur  $G$  définies pour tout  $x$  dans  $G$  par:

$$\varphi(x) = (\xi, \eta)(x) = \langle L(x)(\xi \circ s(x)), \eta \circ r(x) \rangle$$

où  $\xi, \eta$  sont quelconques dans  $\mathcal{D}_{(r_G)} L^2(G, \nu, \mu)$  (qui est exactement, puisqu'ici  $\mu$  est bornée, l'ensemble noté  $L^\infty(G^0, L^2(G, \lambda))$  dans [16]). La norme employée par J. Renault est définie pour tout  $\varphi$  de  $A(G)$  par  $\|\varphi\|_{A(G)} = \inf \|\xi'\|_\infty \|\eta'\|_\infty$ , où la borne inférieure est à prendre sur toutes les représentations possibles de  $\varphi$  sous la forme  $\varphi = (\xi', \eta')$ .

L'algèbre de Banach involutive  $I(G)$  se représente dans  $H = L^2(G, \nu)$  par convolution et fournit par construction l'algèbre de la représentation régulière gauche de  $G$  que nous noterons  $\mathcal{L}(G)$ ; cette algèbre de von Neumann est en position

standard dans  $H$  et a pour commutant l'algèbre  $\mathcal{R}(G)$  de la représentation régulière droite de  $G$  que nous noterons  $R$ . De plus, grâce au théorème 2.3 de [16], on peut décrire le prédual de  $\mathcal{L}(G)$ : il existe une isométrie complète que nous noterons  $\Omega$  de  $\mathcal{L}(G)_*$  sur le produit tensoriel de Haagerup  $L^2(G^0, \mu)^* \otimes_{hN} A(G) \otimes_{hN} L^2(G^0, \mu)$  (au dessus de  $N = L^\infty(G^0, \mu)$ ); plus précisément, pour tous  $a, \varphi$  dans  $L^2(G^0, \mu), A(G)$  respectivement on a:

$$\Omega(a^* \otimes \varphi \otimes a) : (L(f) \mapsto \int_G a(r(x)\varphi(x)a(s(x)))f(x) d\nu(x)).$$

Les triplets  $\mathcal{G} = (L^\infty(G, \nu), s_G, r_G)$  et  $\widehat{\mathcal{G}} = (\mathcal{L}(G), r_G, r_G)$  sont alors deux bimodules de von Neumann sur  $N = L^\infty(G^0, \mu)$ ; rappelons que  $r_G(L^\infty(G^0, \mu))$  est inclu dans  $\mathcal{L}(G)$  et  $s_G(L^\infty(G^0, \mu))$  est inclu dans son commutant  $\mathcal{R}(G)$ .

Si, pour tous  $i, j$  dans  $\{r_G, s_G\}$ ,  $G_{i,j}^2$  est l'ensemble  $\{(x, y) \in G \times G : i(x) = j(y)\}$ , les espaces hilbertiens  $L^2(G, \nu)_i \otimes_j L^2(G, \nu)$  et  $L^2(G_{i,j}^2, \nu_{i,j}^2)$ , où  $\nu_{i,j}$  est une certaine mesure sur  $G_{i,j}^2$  s'identifient d'après le lemme 3.2.2 de [22]. On peut alors considérer l'isomorphisme isométrique fondamental  $W_G$  de  $L^2(G, \nu)_r \otimes_r L^2(G, \nu)$  sur  $L^2(G, \nu)_s \otimes_r L^2(G, \nu)$ , en posant pour tous  $\xi$  dans  $L^2(G_{r,r}^2, \nu_{r,r}^2)$ ,  $\nu_{s,r}^2$ -presque tout  $(x, y)$  dans  $G_{s,r}^2$ , et  $f$  dans  $L^\infty(G, \nu)$ :

$$W_G \xi(x, y) = \xi(x, xy).$$

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons plus précisément son adjoint  $V_G = W_G^*$  qui est un isomorphisme isométrique de  $L^2(G, \nu)_s \otimes_r L^2(G, \nu)$  sur  $L^2(G, \nu)_r \otimes_r L^2(G, \nu)$  tel que pour tous  $\xi$  dans  $L^2(G_{s,r}^2, \nu_{s,r}^2)$ ,  $\nu_{r,r}^2$ -presque tout  $(x, y)$  dans  $G_{r,r}^2$ , et  $f$  dans  $L^\infty(G, \nu)$ :

$$V_G \xi(x, y) = \xi(x, x^{-1}y).$$

3.1.1. THÉORÈME. *Les coproduits  $\Gamma_G$  et  $\widehat{\Gamma}_G$  de  $L^\infty(G, \nu)$  et  $\mathcal{L}(G)$  respectivement, sont engendrés par  $V_G$ ; plus précisément, pour tout  $x$  dans  $L^\infty(G, \nu)$  et tout  $y$  de  $\mathcal{L}(G)$ , on a:*

$$\Gamma_G(x) = V_G^*(1_r \otimes_r x)V_G,$$

$$\widehat{\Gamma}_G(y) = V_G(y_s \otimes_r 1)V_G^*.$$

Il s'agit d'une reformulation du théorème 3.2.7 et de la proposition 3.3.2 de [22].

On notera toujours  $\mathcal{G}$  le bimodule de Hopf commutatif  $(L^\infty(G, \nu), s_G, r_G, \Gamma_G)$  et  $\widehat{\mathcal{G}}$  le bimodule de Hopf symétrique  $(\mathcal{L}(G), r_G, r_G, \widehat{\Gamma}_G)$ .

3.2. REPRÉSENTATION DE FOURIER DES ALGÈBRES DE P. HAHN ET J. RENAULT. Nous allons à présent traduire, dans ce contexte, la proposition 2.3.4. Rappelons que  $\mathcal{G}_*^\mu$  est le sous espace vectoriel de  $L^\infty(G, \nu)_*$  engendré par le cone convexe héréditaire  $\left\{ \omega \in (L^\infty(G, \nu)_*)^+ : \frac{d\omega \circ r_G}{d\tau}, \frac{d\omega \circ s_G}{d\tau} \text{ bornées} \right\}$ . De même,  $\widehat{\mathcal{G}}_*^\mu$  est le sous espace vectoriel de  $\mathcal{L}(G)_*$  engendré par  $\left\{ \omega \in (\mathcal{L}(G)_*)^+ : \frac{d\omega \circ r_G}{d\tau} \text{ borné} \right\}$ .

3.2.1. LEMME. *Les espaces vectoriels  $I(G)$  et  $A(G)$  s'identifient respectivement à  $\mathcal{G}_*^\mu$  et  $\widehat{\mathcal{G}}_*^\mu$ .*

*Démonstration.* Il est immédiat de constater que l'isomorphisme canonique d'espaces vectoriels entre  $L^\infty(G, \nu)_*$  et  $L^1(G, \nu)$  échange  $\mathcal{G}_*^\mu$  et  $I(G)$ .

Soit  $\widehat{\omega}$  un élément positif quelconque de  $\widehat{\mathcal{G}}_*^\mu$ ; comme  $\mathcal{L}(G)$  est en position standard dans  $L^2(G, \nu)$ , il existe  $\xi$  dans  $L^2(G, \nu)$  tel que  $\widehat{\omega} = \omega_\xi$ . De plus,  $\xi$  est dans  $\mathcal{D}(L^2(G, \nu), r_G)$  ceci permet d'affirmer, d'après 3.1 que  $\widehat{\omega} = \Omega(1 \otimes [\xi, \xi] \otimes 1)$ , on en déduit que  $\Omega(1 \otimes A(G)^+ \otimes 1)$  est égal à la partie positive de  $\widehat{\mathcal{G}}_*^\mu$ , par polarisation sur  $A(G)$  (cf. [16], Proposition 1.3 (i)), et compte tenu du lemme 2.1.2, on peut identifier les ensembles  $A(G)$  et  $\widehat{\mathcal{G}}_*^\mu$ . ■

3.2.2. LEMME. *Avec les notations de la définition 2.1.1, pour tout élément  $\omega$  positif dans  $I(G)$ ,  $\|\omega\|_\mu$  est égal à sa norme.*

*Démonstration.* Des calculs de routine donnent le résultat. ■

3.2.3. PROPOSITION. *Les structures d'algèbres involutives, que la proposition 2.3.4 permet de conférer à  $I(G)$  et  $A(G)$ , s'identifient à celle de la convolution de P. Hahn ([11], paragraphe 1) pour  $I(G)$  et à celle de la multiplication de J. Renault pour  $A(G)$ .*

*Démonstration.* Suivant le chapitre 3 de [22], pour tout  $f$  dans  $L^\infty(G, \nu)$ ,  $\nu_{s,r}^2$ -presque tout  $(x, y)$  dans  $G_{s,r}^2$  et tout  $\xi$  dans  $L^2(G_{r,r}^2, \nu_{r,r}^2)$ , on a:

$$(\Gamma_G(f))\xi(x, y) = f(xy)\xi(x, y).$$

Des calculs de routine permettent alors de montrer que pour tout couple  $(f, g)$  d'éléments positifs de  $I(G)$ , on a:

$$\begin{aligned} \left( \omega \sqrt{f} \otimes_{\mu} \omega \sqrt{g} \right) \circ \Gamma_G &= \omega \sqrt{f \star g}, \\ \left( \omega \sqrt{f} \right)^* &= \omega \sqrt{f^*}, \end{aligned}$$

où  $f \star g$  et  $f^*$  désignent respectivement le produit de convolution et l'involution de de P. Hahn. On retrouve ainsi la structure d'algèbre involutive usuelle sur  $I(G)$ .

Parallèlement, d'après le chapitre 3 de [22], pour tout  $f$  dans  $I(G)$ ,  $\nu_{r,r}^2$ -presque tout  $(x, y)$  dans  $G_{r,r}^2$  et tout  $\xi$  dans  $L^2(G_{r,r}^2, \nu_{r,r}^2)$ , on a:

$$\widehat{\Gamma}_G(L(f))\xi(x, y) = \int_G f(t)\xi(t^{-1}x, t^{-1}y) d\lambda^{r(x)}(t).$$

Alors, si  $(u, v)$  est un couple quelconque d'éléments de  $A(G)$ , soient  $\xi, \eta$  dans  $\mathcal{D}(r_G H, \mu)$  tels que  $u = (\xi, \eta)$ , ainsi en notant  $\widehat{\omega}^u$  et  $\widehat{\omega}^v$  les éléments de  $\widehat{\mathcal{G}}_*^\mu$  correspondants, on a:

$$\begin{aligned} \left( \widehat{\omega}^u \otimes_{\mu} \widehat{\omega}^v \right) \circ \widehat{\Gamma}_G &= \widehat{\omega}^{uv} \\ \left( \widehat{\omega}^{(\xi, \eta)} \right)^* &= \widehat{\omega}^{(\eta, \xi)}, \end{aligned}$$

où  $uv$  désigne le produit ordinaire des fonctions; on retrouve la structure d'algèbre involutive définie par J. Renault. ■

3.2.4. LEMME. Avec les notations de la définition 2.2.1, l'application fondamentale  $V_G$  appartient à  $\mathcal{G} \star \widehat{\mathcal{G}}$  et son adjoint  $W_G$  appartient à  $\mathcal{G}^\circ \star \widehat{\mathcal{G}}$  où  $\mathcal{G}^\circ$  (l'opposé de  $\mathcal{G}$ ) désigne le triplet  $(L^\infty(G, \nu), r_G, s_G)$ .

*Démonstration.* Soit  $f$  un élément quelconque de  $L^\infty(G, \nu)$  et  $g$  un élément quelconque de  $I(G)$ . Il est immédiat de constater que pour tout  $i$  dans  $\{s_G, r_G\}$ , en notant  $\theta$  un élément quelconque de  $L^2(G, \nu_{i,r}^2)$ , on a, pour  $\nu_{i,r}^2$ -presque tout  $(x, y)$  dans  $G_{i,r}^2$ :

$$(f_i \otimes_r R(g))\theta(x, y) = \int_G f(x)g(t^{-1}y)\theta(x, t) d\lambda^{r(y)}(t).$$

Ainsi, quelque soit  $\Sigma$  dans  $L^2(G, \nu_{r,r}^2)$  et pour  $\nu_{r,r}^2$ -presque tout  $(x, y)$  dans  $G_{r,r}^2$ , on peut écrire que:

$$\begin{aligned} [V_G(f_s \otimes_r R(g))]\Sigma(x, y) &= (f_s \otimes_r R(g))\Sigma(x, x^{-1}y) \\ &= \int_G f(x)g(t^{-1}x^{-1}y)\Sigma(x, t) d\lambda^{r(x^{-1}y)}(t) \\ &= \int_G f(x)g(t^{-1}x^{-1}y)\Sigma(x, t) d\lambda^{s(x)}(t). \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable  $t' = xt$  dans la dernière intégrale, on obtient:

$$\begin{aligned} [V_G(f_s \otimes_r R(g))\Sigma](x, y) &= \int_G f(x)g((t')^{-1}y)\Sigma(x, x^{-1}t') d\lambda^{r(x)}(t') \\ &= \int_G f(x)g((t')^{-1}y)(V_G\Sigma)(x, t') d\lambda^{r(y)}(t') \\ &= [(f_r \otimes_r R(g))V_G\Sigma](x, y), \end{aligned}$$

donc  $V_G$  appartient à  $\mathcal{G} \star \widehat{\mathcal{G}}$ ; en passant aux adjoints dans la dernière égalité, il vient:

$$(f^* \otimes_r R(g)^*)W_G = W_G(f^* \otimes_r R(g)^*).$$

Ceci permet d'affirmer que  $W_G$  appartient à  $\mathcal{G}^\circ \star \widehat{\mathcal{G}}$ . ■

3.2.5. COROLLAIRE. Avec les notations du paragraphe 1.3,  $V_G$  est de trois manières un morphisme de modules hilbertiens sur  $L^\infty(G^0, \mu)$  que nous noterons respectivement:  ${}_r V_G : {}_r(L^2(G, \nu) \otimes_{\mu} {}_s L^2(G, \nu)) \mapsto {}_r(L^2(G, \nu) \otimes_{\mu} {}_r L^2(G, \nu))$  ( $= (L^2(G, \nu) \otimes_{\mu} {}_r L^2(G, \nu))_r$ ),  ${}_s V_G : {}_s(L^2(G, \nu) \otimes_{\mu} {}_r L^2(G, \nu))$  ( $= (L^2(G, \nu) \otimes_{\mu} {}_r L^2(G, \nu))_s$ )  $\mapsto {}_r(L^2(G, \nu) \otimes_{\mu} {}_r L^2(G, \nu))$ ,  $(V_G)_s : (L^2(G, \nu) \otimes_{\mu} {}_r L^2(G, \nu))_s \mapsto (L^2(G, \nu) \otimes_{\mu} {}_r L^2(G, \nu))_s$ .

*Démonstration.* Immédiate. ■

3.2.6. COROLLAIRE. *En posant pour tout  $\omega$  dans  $I(G)$  et tout  $\omega'$  dans  $A(G)$ :*

$$\begin{aligned}\lambda(\omega) &= (\omega \otimes_{\mu} \mathbf{i})(V_G) \\ \widehat{\lambda}(\omega') &= (\mathbf{i} \otimes_{\mu} \omega')(V_G).\end{aligned}$$

on définit une application  $\lambda$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(G)$  et une application  $\widehat{\lambda}$  à valeurs dans  $L^{\infty}(G)$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la proposition 2.2.7 pour montrer que  $\lambda(\omega)$  a bien un sens et est dans  $\mathcal{L}(G)$ . On fait un raisonnement identique pour le reste du corollaire. ■

3.2.7. PROPOSITION. *Les applications  $\lambda$  et  $\widehat{\lambda}$  sont les représentations de  $I(G)$  et  $A(G)$  qui engendrent  $\mathcal{L}(G)$  et  $L^{\infty}(G, \nu)$ .*

*Démonstration.* Soient  $\xi$  dans  $\mathcal{D}(H_r, \mu) \cap \mathcal{D}(H_s, \mu)$  et  $\eta, \eta'$  deux fonctions continues sur  $G$  à support compact (donc dans  $\mathcal{D}(H_r, \mu)$  d'après le lemme 3.2.1 de [22]) ces supports étant notés  $\text{supp } \eta$  et  $\text{supp } \eta'$  respectivement, on a, d'après la proposition 2.2.7 et le théorème de Fubini:

$$\begin{aligned}\langle \lambda(\omega_{\xi})\eta, \eta' \rangle &= (\omega_{\xi} \otimes_{\mu} \omega_{\eta, \eta'})(V_G) = \langle V_G(\xi_s \otimes_{\mu} \eta), \xi_r \otimes_{\mu} \eta' \rangle \\ &= \int_{G_{r,r}^2} (\xi_s \otimes_{\mu} \eta)(x, x^{-1}y) \overline{(\xi_r \otimes_{\mu} \eta')(x, y)} d\nu_{r,r}^2(x, y) \\ &= \int_{G^0} \iint_{G \times G} \xi(x)\eta(x^{-1}y)\overline{\xi(x)\eta'(y)} d\lambda^u(x) d\lambda^u(y) d\mu(u) \\ &= \int_{G^0} \int_{\text{supp } \eta(\text{supp } \eta')^{-1}} \int_{\text{supp } \eta'} \xi\overline{\xi}(x)\eta(x^{-1}y)\overline{\eta'(y)} d\lambda^u(y) d\lambda^u(x) d\mu(u) \\ &= \int_{G^0} \int_{\text{supp } \eta'} \int_{\text{supp } \eta(\text{supp } \eta')^{-1}} \xi\overline{\xi}(x)\eta(x^{-1}y) d\lambda^u(x)\overline{\eta'(y)} d\lambda^u(y) d\mu(u) \\ &= \int_G \int_G \xi\overline{\xi}(x)\eta(x^{-1}y) d\lambda^u(x)\overline{\eta'(y)} d\nu(y) = \langle L(\xi\overline{\xi})\eta, \eta' \rangle.\end{aligned}$$

On en tire par densité que  $\lambda(\omega_{\xi}) = L(\xi\overline{\xi})$ .

Soit  $u$  un élément positif de  $A(G)$  et  $\omega^u$  l'élément correspondant dans  $\mathcal{L}(G)_*$ ; alors, pour tout  $\xi$  dans  $\mathcal{K}(G)$ , on a d'après la dernière égalité de la proposition 2.2.7 et en notant  $M(u)$  l'opérateur de multiplication par  $u$  dans  $\mathcal{L}(L^2(G, \nu))$ :

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\lambda}(\omega^u)\xi, \xi \rangle &= \omega_{\xi}(\widehat{\lambda}(\omega^u)) = (\omega_{\xi} \otimes_{\mu} \omega^u)(V_G) = \omega^u(\omega_{\xi} \otimes_{\mu} \mathbf{i})(V_G) \\ &= \omega^u(L(\xi\overline{\xi})) = \langle M(u)\xi, \xi \rangle.\end{aligned}$$

On en déduit par densité que  $\widehat{\lambda}(\omega^u) = M(u)$ , et la proposition en résulte. ■

3.2.8. COROLLAIRE. *On met en dualité séparante  $\mathcal{L}(G)$  et  $L^\infty(G)$  en posant pour tous  $\omega$  dans  $I(G)$  et  $\omega'$  dans  $A(G)$ :  $\langle \lambda(\omega), \hat{\lambda}(\omega') \rangle = (\omega \otimes_\mu \omega')(V_G)$ .*

*Démonstration.* Evidente. ■

3.3. PROPRIÉTÉS QUANTIQUES DE  $V_G$ . Dans ce paragraphe, on montre que  $V_G$  vérifie une relation pentagonale et définit la co-involution  $j_G$  qui s'exprime pour tout  $f$  dans  $L^\infty(G, \nu)$  et  $\nu$ -presque tout  $x$  dans  $G$  par  $j_G(f)(x) = f(x^{-1})$  (cf. [22], 3.1).

3.3.1. REMARQUE. Avec les notations du paragraphe 1.3, la reflexion  $\Sigma_{r,s}$  est un morphisme de modules hilbertiens:  $(L^2(G, \nu)_{r \otimes_\mu s} L^2(G, \nu))_r \mapsto_r (L^2(G, \nu)_s \otimes_\mu L^2(G, \nu))_r$ ; on peut donc construire par le procédé rappelé en 1.2, une application linéaire continue que nous noterons  $(\Sigma_{r,s})_{r \otimes_\mu 1}$ :

$$L^2(G, \nu)_{r \otimes_\mu s} L^2(G, \nu)_{r \otimes_\mu r} L^2(G, \nu) \mapsto_r (L^2(G, \nu)_s \otimes_\mu L^2(G, \nu))_{r \otimes_\mu r} L^2(G, \nu).$$

De même, d'après 3.2.5 on construit canoniquement une application linéaire continue que nous noterons  ${}_r V_G \otimes_\mu 1$ :

$$\begin{aligned} {}_r (L^2(G, \nu)_i \otimes_\mu {}_j L^2(G, \nu)_k \otimes_\mu {}_l L^2(G, \nu)) &\mapsto_r (L^2(G, \nu)_{r \otimes_\mu r} L^2(G, \nu))_{r \otimes_\mu r} L^2(G, \nu) \\ & (= L^2(G, \nu)_{r \otimes_\mu r} L^2(G, \nu)_{r \otimes_\mu r} L^2(G, \nu)). \end{aligned}$$

On peut donc considérer la composée  $({}_r V_G \otimes_\mu 1) \circ ((\Sigma_{r,s})_{r \otimes_\mu 1})$ :

$$L^2(G, \nu)_{r \otimes_\mu s} L^2(G, \nu)_{r \otimes_\mu r} L^2(G, \nu) \mapsto L^2(G, \nu)_{r \otimes_\mu r} L^2(G, \nu)_{r \otimes_\mu r} L^2(G, \nu).$$

3.3.2. LEMME. *Pour tous  $i, j, k, l$  dans  $\{r_G, s_G\}$ , soit  $G^3_{(i,j,k,l)}$  l'ensemble  $\{(x, y, z) \in G \times G \times G : i(x) = j(y); k(y) = l(z)\}$ ; alors l'espace hilbertien  $L^2(G, \nu)_i \otimes_\mu {}_j L^2(G, \nu)_k \otimes_\mu {}_l L^2(G, \nu)$  s'identifie à  $L^3(G^3_{(i,j,k,l)}, \nu^3_{(i,j,k,l)})$ , où  $\nu^3_{(i,j,k,l)}$  est une certaine mesure sur  $G^3_{(i,j,k,l)}$ .*

*Démonstration.* L'espace hilbertien  $L^2(G, \nu)_i \otimes_\mu {}_j L^2(G, \nu)_k \otimes_\mu {}_l L^2(G, \nu)$  est un complété séparé de  $\mathcal{K}(G) \otimes \mathcal{K}(G) \otimes \mathcal{K}(G)$ , où  $\mathcal{K}(G)$  désigne l'ensemble de fonctions continues à support compact dans  $G$ ; des calculs de routine amènent au résultat. ■

3.3.3. LEMME. *En utilisant l'identification que permet le lemme 3.3.2, pour  $\nu^3_{(r,r,r,r)}$ -presque tout  $(x, y, z)$  dans  $G^3_{(r,r,r,r)}$  et tout  $\xi$  dans  $L^3(G^3_{(r,s,r,r)}, \nu^3_{(r,s,r,r)})$  on a:*

$$({}_r V_G \otimes_\mu 1) \circ ((\Sigma_{r,s})_{r \otimes_\mu 1}) \xi(x, y, z) = \xi(x^{-1}y, x, z).$$

*Démonstration.* Pour tous  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  dans  $\mathcal{K}(G)$  on montre facilement que  $\xi = \xi^1_{r \otimes_\mu s} \xi^2_{r \otimes_\mu r} \xi^3$  vérifie, pour  $\nu^3_{(r,r,r,r)}$ -presque tout  $(x, y, z)$  dans  $G^3_{(r,r,r,r)}$  l'égalité

$$({}_r V_G \otimes_\mu 1) \circ ((\Sigma_{r,s})_{r \otimes_\mu 1}) \xi(x, y, z) = \xi(x^{-1}y, x, z);$$

on en déduit le résultat par continuité. ■



3.3.4. DÉFINITION. Soit  $(N, \tau)$  une algèbre de von Neumann munie d'un poids normal semi-fini fidèle, et un couple  $(s, r)$  de représentations, qui commutent entre elles, normales et non dégénérées de  $N$  dans un espace hilbertien  $H$ . On appelle *unitaire pseudo-multiplicatif* tout unitaire  $V : H_s \otimes_{\tau} H \mapsto H_r \otimes_{\tau} H$ , tel que:

(i) Pour tout  $n$  dans  $N$  on a

$$V(s(n)_s \otimes_s 1) = (s(n)_r \otimes_r 1)V$$

$$V(r(n)_s \otimes_s 1) = (r(n)_r \otimes_r 1)V$$

$$V(1_s \otimes_s s(n)) = (1_r \otimes_r s(n))V.$$

(ii)  $V$  vérifie la relation pentagonale suivante:

$$({}_r V \otimes_r 1)((\Sigma_{r,s})_r \otimes_r 1)(1_r \otimes_s V)((\Sigma_{s,r})_r \otimes_r 1)(1_s \otimes_r V) = (1_r \otimes_r V)(V_s \otimes_r 1).$$

3.3.5. REMARQUE. En vertu de 3.3.4 (i) les deux membres de l'égalité 3.3.4 (ii) ont un sens; les propriétés 3.3.4 (i) et (ii) ne dépendent pas de  $\tau$ .

3.3.6. PROPOSITION. *L'application  $V_G$  est un unitaire pseudo-multiplicatif.*

*Démonstration.* D'après la remarque 3.3.1,  $V_G$  est dans les conditions de la définition 3.3.4 (i); pour tous  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  dans  $\mathcal{K}(G)$  on montre, en vertu du lemme 3.3.3, que  $\xi = \xi_s^1 \otimes_{\mu} \xi_s^2 \otimes_{\mu} \xi_s^3$  vérifie pour  $\nu_{(r,r,r,r)}^3$ -presque tout  $(x, y, z)$  dans  $G_{(r,r,r,r)}^3$ :

$$\begin{aligned} ({}_r V_G \otimes_r i)((\Sigma_{r,s})_r \otimes_r i)(1_r \otimes_s V_G)((\Sigma_{s,r})_r \otimes_r i)(1_s \otimes_r V_G)\xi(x, y, z) &= \xi(x, x^{-1}y, y^{-1}z) \\ &= (1_r \otimes_r V_G)(V_G \otimes_r 1)\xi(x, y, z). \end{aligned}$$

La proposition en résulte par continuité. ■

3.3.7. PROPOSITION. *Pour tout  $\omega$  dans  $A(G)$  on a la relation:*

$$j_G(i \otimes_{\mu} \omega)(V_G) = (i \otimes_{r,s,\mu,r,r} \omega)(V_G^*).$$

*Démonstration.* Grâce au corollaire 3.2.5 et à la remarque 2.2.8, les deux membres de l'égalité ont un sens et sont dans  $L^\infty(G, \nu)$ . D'après la proposition 3.2.7, pour tout  $u$ , élément positif dans  $A(G)$ , en notant  $\omega^u$  l'élément correspondant de  $\mathcal{L}(G)_*$ , on a, pour  $\nu$ -presque tout  $x$  dans  $G$ :

$$j_G(i \otimes_{\mu} \omega^u)(V_G)(x) = u(x^{-1}).$$

Un calcul de routine analogue à ceux de la proposition 3.2.7 donne aussi l'égalité:  $(i \otimes_{r,s,\mu,r,r} \omega)(V_G^*)(x) = u(x^{-1})$ . La proposition en résulte. ■

4. APPLICATION À LA MOYENNABILITÉ DES GROUPOÏDES

Dans le paragraphe 3.1 de [16] est donnée la définition d'un groupoïde mesuré moyennable. Cette notion a été précisée par C. Anantharaman et J. Renault dans [1] où de nouvelles caractérisations ont été données. Dans la proposition suivante nous en extrayons celles que nous utiliserons pour prouver que l'unitaire  $V_G$  fournit lui aussi une caractérisation de cette moyennabilité et permet également de la décrire à l'aide de l'existence d'une unité approchée de  $A(G)$  vu dans le préduel de  $\mathcal{L}(G)$ .

4.1. PROPOSITION. *Un groupoïde mesuré  $(G, \Lambda, \mu)$  est moyennable si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée:*

- (i) *La représentation triviale de  $G$  est incluse dans la régulière;*
- (ii) *Il existe une file  $\{h_i\}_{i \in I}$  de fonctions de type positif dans  $A(G)$  vérifiant:*
  - (a)  $h_i^{(0)} \leq 1$  pour tout  $i$ ,
  - (b)  $\lim_i h_i^{(0)} = 1$  pour la topologie  $*$ -faible de  $L^\infty(G^0, \mu)$ ,
  - (c)  $\lim_i h_i = 1$  pour la topologie  $*$ -faible de  $L^\infty(G, \nu)$ .

Nous allons maintenant donner d'autres caractérisations de la moyennabilité.

4.1.1. LEMME. *Pour tout  $x$  dans  $\mathcal{L}(G)$  on a  $\|x_s \otimes_r 1\| = \|x\|$ .*

*Démonstration.* Soit  $x$  dans  $\mathcal{L}(G)$ ; puisqu'il commute avec  $s(L^\infty(G^0, \mu))$ , c'est un opérateur décomposable et il s'écrit  $x = \int_{G^0} x(u) d\mu(u)$  avec  $\|x\| = \sup \text{ess} \{u \mapsto \|x(u)\|\}$ . D'après le paragraphe 1.1.5. de [18], on a:  $x_s \otimes_r 1 = \int_{G^0} (x(u) \otimes 1) d\mu(u)$ . On en déduit, grâce à la proposition 2 du paragraphe II.2 de [6]:

$$\|x_s \otimes_r 1\| = \sup \text{ess} \{u \mapsto \|x(u) \otimes 1\|\} = \sup \text{ess} \{u \mapsto \|x(u)\|\} = \|x\|$$

d'où le lemme. ■

4.2. THÉORÈME. *Le groupoïde mesuré  $(G, \lambda, \mu)$  est moyennable si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- (i) *Il existe une file  $\{\xi_j\}$  de vecteurs de  $L^2(G, \nu)$ ,  $\mu$ -bornés pour  $r$  telle que:*
  - (a)  $\left\{ \frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu} \right\}$  est une file dans la boule unité de  $L^\infty(G^0, \mu)$  qui converge vers 1 pour la topologie ultraforte de  $\mathcal{L}(L^2(G^0, \mu))$ ,
  - (b)  $\widehat{\lambda}(\widehat{\omega}_{\xi_j})$  converge  $*$ -faiblement dans  $L^\infty(G, \nu)$  vers 1.
- (ii) *Il existe une file  $\{\xi_j\}$  de vecteurs de  $L^2(G, \nu)$ ,  $\mu$ -bornés pour  $r$ , telle que:*
  - (a)  $\left\{ \frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu} \right\}$  est une file dans la boule unité de  $L^\infty(G^0, \mu)$  qui converge vers 1 pour la topologie ultraforte de  $\mathcal{L}(L^2(G^0, \mu))$ ,
  - (b) La file  $\left\| \eta_r \otimes_r \xi_j - V_G(\eta_s \otimes_r \xi_j) \right\|$  tend vers 0 pour tout  $\eta$  dans  $H$ ;
- (iii) *L'algèbre  $A(G)$  possède une unité approchée pour la norme du préduel de  $\mathcal{L}(G)$ , positive et qui est dans la boule unité pour la norme de  $A(G)$ .*

*Démonstration.* Supposons que le groupoïde mesuré  $(G, \lambda, \mu)$  soit moyennable; notons  $(h_i)$  une file dans les conditions de la proposition 4.1 (ii). Comme

la boule unité de  $A(G)^+$  est convexe, et que les topologies  $*$ -faibles et ultrafortes sont compatibles avec la dualité, on peut affirmer l'existence d'une file  $(e_j)$  dans la boule unité de  $A(G)^+$  telle que  $(e_j^0)$  converge vers 1 pour la topologie ultraforte de  $\mathcal{L}(L^2(G^0, \mu))$  et  $(e_j)$  converge vers 1 pour la topologie  $*$ -faible de  $L^\infty(G, \nu)$ . Mais pour tout  $j$ , il existe un vecteur  $\xi_j$  de  $L^2(G, \nu)$ ,  $\mu$ -borné pour  $r$ , tel que  $e_j = (\xi_j, \xi_j)$ , or pour tout  $u$  dans  $G^0$  on a:  $e_j^0(u) = \|\xi_j|_{G^0}\|^2 = \left(\frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu}\right)(u)$ ; on en déduit que  $\left\{\frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu}\right\}$  est une file dans la boule unité de  $L^\infty(G^0, \mu)$  qui converge vers 1 pour la topologie ultraforte de  $\mathcal{L}(L^2(G^0, \mu))$ . D'après la proposition 3.2.7, on sait que  $\widehat{\lambda}(\widehat{\omega}_{\xi_j})$  s'identifie à  $e_j$  ce qui permet d'affirmer que  $\widehat{\lambda}(\widehat{\omega}_{\xi_j})$  converge  $*$ -faiblement dans  $L^\infty(G, \nu)$  vers 1, donc la moyennabilité de  $(G, \lambda, \mu)$  entraîne (i).

Supposons maintenant que (i) soit réalisée; pour tout  $\eta$  dans  $H(= L^2(G, \nu))$  et  $k$  dans  $\{s, r\}$ , on a:

$$\|\eta_k \otimes_r \xi_j\|_\mu^2 = \left\langle k \left( \frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu} \right) \eta, \eta \right\rangle$$

or, la file  $\left\{\frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu}\right\}$  converge ultrafortement vers 1. Comme  $k$  est normale, on en déduit que  $\left\{k \left( \frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu} \right)\right\}$  converge ultrafortement vers 1. On en tire que:

$$(1) \quad \lim_j \|\eta_r \otimes_r \xi_j\|_\mu = \lim_j \|\eta_s \otimes_r \xi_j\|_\mu = \|\eta\|.$$

De plus, la propriété (b) permet d'affirmer que:

$$(2) \quad \lim_j \operatorname{Re} \langle \widehat{\lambda}(\widehat{\omega}_{\xi_j}) \eta, \eta \rangle = \lim_j \langle \widehat{\lambda}(\widehat{\omega}_{\xi_j}) \eta, \eta \rangle = \|\eta\|^2.$$

Or on a:

$$\begin{aligned} & \|\eta_r \otimes_r \xi_j - V_G(\eta_s \otimes_r \xi_j)\| \\ &= \|\eta_r \otimes_r \xi_j\|_\mu^2 + \|V_G(\eta_s \otimes_r \xi_j)\|_\mu^2 - 2\operatorname{Re} \langle V_G(\eta_s \otimes_r \xi_j), \eta_r \otimes_r \xi_j \rangle \\ &= \|\eta_r \otimes_r \xi_j\|_\mu^2 + \|\eta_s \otimes_r \xi_j\|_\mu^2 - 2\operatorname{Re} (\omega_\eta \otimes \omega_{\xi_j})(V_G) \\ &= \|\eta_r \otimes_r \xi_j\|_\mu^2 + \|\eta_s \otimes_r \xi_j\|_\mu^2 - 2\operatorname{Re} (\omega_\eta (i \otimes \omega_{\xi_j}))(V_G) \\ &= \|\eta_r \otimes_r \xi_j\|_\mu^2 + \|\eta_s \otimes_r \xi_j\|_\mu^2 - 2\operatorname{Re} \langle \widehat{\lambda}(\widehat{\omega}_{\xi_j}) \eta, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi (ii) est vérifiée d'après (1) et (2). Donc (i) entraîne (ii).

Supposons à présent que (ii) est vraie; d'après le lemme 4.1.1 et la démonstra-

tion du lemme 2.11 de [8] on peut écrire pour tous  $x$  dans  $\mathcal{L}(G)$  avec  $\|x\| \leq 1$ :

$$\begin{aligned}
& \left| \langle V_G(x_s \otimes_r 1) V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j), \eta_r \otimes_r \xi_j \rangle - \langle x\eta, \eta \rangle \right| \\
& \leq \left| \langle V_G(x_s \otimes_r 1) V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j), \eta_r \otimes_r \xi_j \rangle - \langle (x_s \otimes_r 1)(\eta_s \otimes_r \xi_j), \eta_s \otimes_r \xi_j \rangle \right| \\
& \quad + \left| \langle (x_s \otimes_r 1)(\eta_s \otimes_r \xi_j), \eta_s \otimes_r \xi_j \rangle - \langle x\eta, \eta \rangle \right| \\
& \leq \left| \langle (x_s \otimes_r 1) V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j), V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j) - \langle (x_s \otimes_r 1)(\eta_s \otimes_r \xi_j), \eta_s \otimes_r \xi_j \rangle \right| \\
& \quad + \left| \langle (x\eta)_s \otimes_r \xi_j, \eta_s \otimes_r \xi_j \rangle - \langle x\eta, \eta \rangle \right| \\
& \leq \left| \left( \omega_{V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j)} - \omega_{\eta_r \otimes_r \xi_j} \right) (x_s \otimes_r 1) \right| + \left| \left\langle \left( s \left( \frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu} \right) - 1 \right) x\eta, \eta \right\rangle \right| \\
& \leq \left\| \omega_{V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j)} - \omega_{\eta_r \otimes_r \xi_j} \right\| \|x_s \otimes_r 1\| + \left| \left\langle x\eta, \left( s \left( \frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu} \right) - 1 \right) \eta \right\rangle \right| \\
& \leq \left\| \left( \omega_{V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j)} - \omega_{\eta_r \otimes_r \xi_j} \right) \right\| \|x\| + \|x\eta\| \left\| \left( s \left( \frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu} \right) - 1 \right) \eta \right\| \\
& \leq \left\| \omega_{V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j)} - \omega_{\eta_r \otimes_r \xi_j} \right\| + \|\eta\| \left\| \left( s \left( \frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu} \right) - 1 \right) \eta \right\| \\
& \leq \left\| V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j) - \eta_r \otimes_r \xi_j \right\| \|V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j) + \eta_r \otimes_r \xi_j\| \\
& \quad + \left\| \left( s \left( \frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu} \right) - 1 \right) \eta \right\| \|\eta\| \\
& \leq 2 \left\| \eta_r \otimes_r \xi_j - V_G(\eta_r \otimes_r \xi_j) \right\| \|\eta_r \otimes_r \xi_j\| + \left\| \left( s \left( \frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu} \right) - 1 \right) \eta \right\| \|\eta\|.
\end{aligned}$$

Or, la condition (ii)(a), identique à (i)(a), permet d'affirmer que  $\lim_{\mu} \|\eta_r \otimes_r \xi_j\| = \|\eta\|$  et que la file  $\left\{ s \left( \frac{d\omega_{\xi_j} \circ r}{d\mu} \right) \right\}$  converge ultrafortement vers 1 dans  $\mathcal{L}(L^2(G, \nu))$ , donc la condition (ii)(b) et la dernière inégalité entraînent que:

$$\lim_j \sup_{x \in \mathcal{L}(G); \|x\| \leq 1} \left\{ \left| \langle V_G(x_s \otimes_r 1) V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j), \eta_r \otimes_r \xi_j \rangle - \langle x\eta, \eta \rangle \right| \right\} = 0.$$

Ainsi, pour tout élément  $\eta$  de  $\mathcal{D}(H_r, \mu)$  et puisque  $\varsigma \widehat{\Gamma}_G = \widehat{\Gamma}_G$  on a:

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\omega}_{\xi_j} \star \widehat{\omega}_\eta - \widehat{\omega}_\eta\|_* &= \sup \left\{ \left| \langle \widehat{\Gamma}_G(x), \widehat{\omega}_{\xi_j} \otimes_r \widehat{\omega}_\eta \rangle - \langle x, \widehat{\omega}_\eta \rangle \right| \mid x \in \mathcal{L}(G), \|x\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| \langle \varsigma \widehat{\Gamma}_G(x), \widehat{\omega}_{\xi_j} \otimes_r \widehat{\omega}_\eta \rangle - \langle x, \widehat{\omega}_\eta \rangle \right| \mid x \in \mathcal{L}(G), \|x\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup_{\mathcal{L}(G); \|x\| \leq 1} \left\{ \left| \langle \Sigma_{r,r} V_G(x_s \otimes_r 1) V_G^* \Sigma_{r,r} (\xi_j \otimes_r \eta), \xi_j \otimes_r \eta \rangle - \langle x\eta, \eta \rangle \right| \right\} \\
&= \sup_{\mathcal{L}(G); \|x\| \leq 1} \left\{ \left| \langle V_G(x_s \otimes_r 1) V_G^*(\eta_r \otimes_r \xi_j), \eta_r \otimes_r \xi_j \rangle - \langle x\eta, \eta \rangle \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Ceci permet d'affirmer que la file  $\widehat{\omega}_{\xi_j}$  est une unité approchée de  $A(G)$ , positive et dans la boule unité de  $A(G)$  pour la norme de  $A(G)$  car  $\|\widehat{\omega}_{\xi_j}\|_{A(G)} = \left\| \frac{d\omega_{\xi_j}^{or}}{d\mu} \right\|$ ; donc (ii) entraîne (iii).

Supposons que (iii) soit réalisée. Soit  $\omega$  un élément quelconque de  $\mathcal{G}_*^\mu$ ; il existe donc  $\xi, \eta$  dans  $L^2(G, \nu)$  tels que  $\xi\bar{\xi}$  et  $\eta\bar{\eta}$  soient dans  $I(G)$  et  $\omega = \omega_{\xi, \eta}$ . La représentation  $\widehat{\lambda}$  étant non dégénérée, il existe une file  $(\widehat{\omega}^j)_{j \in J}$  d'éléments de  $\widehat{G}_*^\mu$  telle que  $(\widehat{\lambda}(\widehat{\omega}^j))_{j \in J}$  converge fortement vers 1 dans  $\mathcal{L}(L^2(G, \nu))$ ; ainsi la file  $\omega_j = \omega_{\widehat{\lambda}(\widehat{\omega}^j)\xi, \widehat{\lambda}(\widehat{\omega}^j)\eta}$  converge normiquement vers  $\omega$  dans le préduale de  $L^\infty(G, \nu)$ .

Soit alors  $(\widehat{\Theta}^i)_{i \in I}$  une unité approchée de  $A(G)$  pour la norme préduale, positive et dans la boule unité pour la norme de  $A(G)$ ; comme  $\widehat{\lambda}(\widehat{\Theta}^i) = (i \otimes \widehat{\Theta}^i)_\mu(V_G)$  en vertu du corollaire 2.2.6, 1 majore la norme de  $\widehat{\lambda}(\widehat{\Theta}^i)$  pour tout  $i$ . Quelques soient  $i, j$  dans  $I$  et  $J$  respectivement, on a:

$$\begin{aligned} |\omega(1) - \omega(\widehat{\lambda}(\widehat{\Theta}^i))| &\leq |\omega(1) - \omega^j(1)| + |\omega^j(1) - \omega^j(\widehat{\lambda}(\widehat{\Theta}^i))| + |\omega^j(\widehat{\lambda}(\widehat{\Theta}^i)) - \omega(\widehat{\lambda}(\widehat{\Theta}^i))| \\ &\leq \|\omega - \omega^j\|_* (1 + \|\widehat{\lambda}(\widehat{\Theta}^i)\|) + |\langle \widehat{\lambda}(\widehat{\omega}^j)\xi, \widehat{\lambda}(\widehat{\omega}^j)\eta \rangle - \langle \widehat{\lambda}(\widehat{\Theta}^i)\widehat{\lambda}(\widehat{\omega}^j)\xi, \widehat{\lambda}(\widehat{\omega}^j)\eta \rangle| \\ &\leq \|\omega - \omega^j\|_* (1 + \|\widehat{\Theta}^i\|_\mu) + |\langle \widehat{\lambda}(\widehat{\Theta}^i)_\mu (\widehat{\omega}^j)_\mu (\widehat{\omega}^j)_\mu^* - (\widehat{\omega}^j)_\mu (\widehat{\omega}^j)_\mu^* \rangle, \omega \rangle| \\ &\leq 2\|\omega - \omega^j\|_* + |\langle \widehat{\Theta}^i_\mu (\widehat{\omega}^j)_\mu (\widehat{\omega}^j)_\mu^* - (\widehat{\omega}^j)_\mu (\widehat{\omega}^j)_\mu^* \rangle, \lambda(\omega) \rangle| \\ &\leq 2\|\omega - \omega^j\|_* + \|\widehat{\Theta}^i_\mu (\widehat{\omega}^j)_\mu (\widehat{\omega}^j)_\mu^* - (\widehat{\omega}^j)_\mu (\widehat{\omega}^j)_\mu^*\|_* \|\lambda(\omega)\|. \end{aligned}$$

Ceci entraîne que pour tout  $\omega$  dans  $\mathcal{G}_*^\mu$ , on a:

$$\omega(1) = \lim_I \omega(\widehat{\lambda}(\widehat{\Theta}^i)).$$

Il vient:

$$|\omega(1)| = \lim_I |\langle \widehat{\lambda}(\widehat{\Theta}^i), \omega \rangle| = \lim_I |\langle \widehat{\Theta}^i, \lambda(\omega) \rangle| \leq \|\lambda(\omega)\|.$$

On en déduit que  $(G, \lambda, \mu)$  est moyennable, le théorème en découle. ■

## BIBLIOGRAPHIE

1. C. ANANTHARAMAN, J. RENAULT, Groupoïdes moyennables, *l'Enseignement Mathématique*, Genève, 2000, à paraître.
2. S. BAAJ, G. SKANDALIS, Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de  $C^*$ -algèbres, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **26**(1993), 425–488.
3. F. COMBES, Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche, *Compositio Math.* **23** (1971), 49–77.
4. F. COMBES, Cours de troisième cycle de l'Université d'Orléans, 1980.
5. A. CONNES, On the spatial theory of von Neumann algebras, *J. Funct. Anal.* **35**(1980), 153–161.
6. J. DIXIMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier Villars, Paris 1957.
7. M. ENOCK, J.M. SCHWARTZ, *Kac algebras and duality of locally compact groups*, Springer-Verlag, Berlin 1989.

8. U. HAAGERUP, The standard form of von Neumann algebras, *Math. Scand.* **37** (1975), 271–283.
9. U. HAAGERUP, Operator valued weights in von Neumann Algebras. I, *J. Funct. Anal.* **32**(1979), 175–206.
10. U. HAAGERUP, Operator valued weights in von Neumann Algebras. II, *J. Funct. Anal.* **33**(1979), 331–361.
11. P. HAHN, The regular representations of measure groupoids, *Trans. Amer. Math. Soc.* **242**(1978), 35–78.
12. G.I. KAC, L.I. VAINERMAN, Non unimodular ring-groups and Hopf-von-Neumann algebras, *Soviet Math. Dokl.* **14**(1974), 1144–1148.
13. H. LEPTIN, Sur l’algèbre de Fourier d’un groupe localement compact, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. Math.* **266**(1968), 1180–1182.
14. G.K. PEDERSEN,  $C^*$ -algebras and their automorphism groups, *London Math. Soc. Monogr.*, vol. 14, Cambridge.
15. J. RENAULT, *A Groupoid Approach to  $C^*$ -Algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 793, Springer-Verlag, Berlin 1980.
16. J. RENAULT, The Fourier algebra of a measured groupoid, *J. Funct. Anal.* **145**(1997), 455–490.
17. J.L. SAUVAGEOT, Produit tensoriel de  $Z$ -modules, *Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie*, de l’Univ. Paris VI, vol. 23, 1980.
18. J.L. SAUVAGEOT, Produit tensoriel de  $Z$ -modules et applications, in *Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory* (Buzeni, 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1132, Springer-Verlag, Berlin–New York 1985, pp. 409–420.
19. J.L. SAUVAGEOT, Sur le produit tensoriel relatif d’espaces de Hilbert, *J. Operator Theory* **9**(1983), 237–258.
20. W.F. STINESPRING, Integration theorems for gages and duality for unimodular locally compact groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **90**(1959), 15–56.
21. M.A. TAKESAKI, Characterization of group algebras as a converse of Tannaka-Stinespring-Tatsuma duality theorem, *Amer. J. Math.* **91**(1969), 529–564.
22. J.M. VALLIN, Bimodules de Hopf et poids opératoriels de Haar, *J. Operator Theory* **35**(1996), 39–65.
23. D. VOICULESCU, Amenability and Katz algebras, Communication au Colloque International du CNRS, “Algèbres d’opérateurs et leur applications en physique mathématique”, Marseille, Juin 1977.
24. S.L. WORONOWICZ, Compact matrix pseudo-groups, *Comm. Math. Phys.* **111**(1987), 613–666.

JEAN-MICHEL VALLIN  
 Université d’Orléans  
 UMR/CNRS 6628 MAPMO  
 B.P. 6739  
 F-45067 Orléans Cedex 2  
 FRANCE  
 E-mail: jmva@math.jussieu.fr

Received July 1, 1998.