J. OPERATOR THEORY
51(2004), 3–18

FONCTIONS PERTURBATION ET FORMULES DU RAYON SPECTRAL ESSENTIEL ET DE DISTANCE AU SPECTRE ESSENTIEL

MOSTAFA MBEKHTA

Communicated by Şerban Strătilă

Abstract. Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space. Let $\mathcal{N}$ be the set of norms on X that are equivalent with $\|\cdot\|$. For $T \in B(X)$ and $|\cdot| \in \mathcal{N}$, we introduce a Fredholm perturbation function $\mathcal{F}_{|\cdot|}(T)$ (for example: the measure of non-compactness; the essential norm, etc.). In this article we show that $r_{\mathrm{e}}(T)$, the essential spectral radius of T, can be calculated by the following formula: $r_{\mathrm{e}}(T) = \inf\{\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\}$.

In addition, we introduce another perturbation function $\mathcal{G}_{|\cdot|}(T)$ (for example: the essential conorm, the distance with respect to the set of Fredholm operators, etc.) and we show that if T is Fredholm then $\mathrm{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T)) = \sup\{\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\}$.

Keywords: *Essential spectrum, essential spectral radius, Fredholm operator.*

MSC (2000): 47A53, 47A68, 46B04.

1. INTRODUCTION

Dans ce travail $(X, \|\cdot\|)$ désignera un espace de Banach (complexe) et $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes dans X, équivalentes à $\|\cdot\|$. Soit $B(X)$ l'algèbre des opérateurs bornés de X dans lui-même. Si $T \in B(X)$ et $|\cdot| \in \mathcal{N}$, alors $|T|$ dénotera, dans la suite, la norme d'algèbre de T associée à la norme $|\cdot|$. Pour $T \in B(X)$, on notera $N(T), R(T)$ et $\sigma(T)$ respectivement le noyau, l'image et le spectre de T.

L'idéal des opérateurs compacts sera noté par $K(X)$. Soit

$$C(X) = B(X)/K(X)$$

l'algèbre de Calkin et soit $\pi : B(X) \mapsto C(X)$ la surjection canonique. Un opérateur $T \in B(X)$ est dit *Fredholm* si l'image de T est fermée et

$$\max\{\dim(N(T)), \mathrm{codim}(R(T))\} < \infty.$$

L'ensemble des opérateurs Fredholm sera noté par $\Phi(X)$. Par le théorème d'Atkinson on a

$$T \in \Phi(X) \Leftrightarrow \pi(T) \text{ est inversible dans } C(X). \tag{1.1}$$

Notons par $\sigma_{\mathrm{e}}(T)$ le spectre essentiel de T, défini par

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas Fredholm}\}.$$

D'après (1.1), $\sigma_{\mathrm{e}}(T) = \sigma(\pi(T))$.

Le rayon spectral essentiel de T sera noté $r_{\mathrm{e}}(T)$ et défini par,

$$r_{\mathrm{e}}(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathrm{e}}(T)\}.$$

Plusieurs auteurs ([5], [7], [11], [17], [18], [20], [21] et [22]) ont introduit et étudiés des quantités liées aux opérateurs de Fredholm (par exemple: norme essentielle, mesure de non-compacité, mesure de non-strict singularété, etc.). Ils ont obtenus des formules de $r_{\mathrm{e}}(T)$ en fonction du comportement asymptotique des puissances de T.

Dans le paragraphe 2, nous introduisons une fonction perturbation des opérateurs Fredholm. Plusieurs exemples de quantités liées aux opérateurs de Fredholm, notamment les exemples cités plus haut, entrent dans le cadre de la définition de cette fonction. En remarquant que cette fonction de perturbation dépend aussi de la norme choisie dans $\mathcal{N}$, nous donnons une formule du rayon spectral essentiel en fonction des variations de la norme dans $\mathcal{N}$ (voir théorème 2.3).

Dans le paragraphe 3, nous introduisons une autre fonction de perturbation qui dépend aussi de la norme choisie dans $\mathcal{N}$ et nous établissons une formule de distance au spectre essentiel (voir théorème 3.7).

Dans la suite nous adoptons essentiellement les notations utilisées par M. Schechter ([17]) et J. Zemánek ([20], [21] et [22]).

2. RAYON SPECTRAL ESSENTIEL

Pour $T \in B(X)$ et $|\cdot| \in \mathcal{N}$, définissons le module minimal par

$$j_{|\cdot|}(T) = \inf\{|Tx| : |x| = 1\},$$

et, le module de surjectivité par

$$q_{|\cdot|}(T) = \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon B_{|\cdot|}(0,1) \subset T B_{|\cdot|}(0,1)\},$$

où $B_{|\cdot|}(0,1) = \{x \in X : |x| \leqslant 1\}$.

Alors (voir [16]), pour tout $|\cdot| \in \mathcal{N}$,

$$j_{|\cdot|}(T) > 0 \Leftrightarrow N(T) = \{0\} \quad \text{et} \quad R(T) \text{ fermé}. \tag{2.1}$$

Et,

$$q_{|\cdot|}(T) > 0 \Leftrightarrow R(T) = X. \tag{2.2}$$

Si T est inversible alors $j_{|\cdot|}(T) = q_{|\cdot|}(T) = |T^{-1}|^{-1}$. Si T^* est l'adjoint de T alors

$$j_{|\cdot|}(T) = q_{|\cdot|}(T^*) \quad \text{et} \quad j_{|\cdot|}(T^*) = q_{|\cdot|}(T). \tag{2.3}$$

D'autre part il est facile de voir que pour tout $T, S \in B(X)$,

$$j_{|\cdot|}(ST) \leqslant |S| \cdot j_{|\cdot|}(T) \quad \text{et} \quad q_{|\cdot|}(TS) \leqslant |S| \cdot q_{|\cdot|}(T). \tag{2.4}$$

Dans toute la suite on utilisera les notations suivantes

$\mathcal{E}(X) = \{\text{sous-espaces fermés de } X\}$;
$\mathcal{E}_{\mathrm{di}}(X) = \{M \in \mathcal{E}(X) : \dim(M) = \infty\}$;
$\mathcal{E}_{\mathrm{df}}(X) = \{M \in \mathcal{E}(X) : \dim(M) < \infty\}$;
$\mathcal{E}_{\mathrm{cf}}(X) = \{M \in \mathcal{E}(X) : \mathrm{codim}(M) < \infty\}$;
$\mathcal{E}_{\mathrm{ci}}(X) = \{M \in \mathcal{E}(X) : \mathrm{codim}(M) = \infty\}$.

Soit M et V dans $\mathcal{E}(X)$ alors J_M et Q_V désignera respectivement l'injection canonique de M dans X et la surjection canonique de X sur le quotient X/V.

Un opérateur $T \in B(X)$ est dit *strictement singulier* et sera noté $T \in \mathrm{SS}(X)$ si il n'existe pas de sous-espace fermé M de dimension infinie tel que $j_{|\cdot|}(TJ_M)$ soit strictement positive.

Un opérateur $T \in B(X)$ est dit *strictement co-singulier* et sera noté $T \in \mathrm{SC}(X)$ si il n'existe pas de sous-espace fermé V de codimension infinie tel que $q_{|\cdot|}(Q_V T)$ soit strictement positive.

Alors ([15]),

(1) $K(X) \subset \mathrm{SS}(X) \cap \mathrm{SC}(X)$;
(2) $T^* \in \mathrm{SS}(X^*) \Rightarrow T \in \mathrm{SC}(X)$ et $T^* \in \mathrm{SC}(X^*) \Rightarrow T \in \mathrm{SS}(X)$.

2.1. Définition. Soit $T \in B(X)$ et $|\cdot| \in \mathcal{N}$, on dira que la fonction $\mathcal{F}_{|\cdot|}(T)$ à valeurs réelles positives est une *fonction Φ_1-perturbation* si les conditions suivantes sont vérifiées:

(a) $\mathcal{F}_{|\cdot|}(T + K) = \mathcal{F}_{|\cdot|}(T)$ pour tout $K \in K(X)$;
(b) $\mathcal{F}_{|\cdot|}(I) = 1$;
(c) $\min\{\mathcal{F}_{|\cdot|}(ST), \mathcal{F}_{|\cdot|}(TS)\} \leqslant |S|\mathcal{F}_{|\cdot|}(T)$ pour tout $T, S \in B(X)$;
(d) si $|\lambda| > \mathcal{F}_{|\cdot|}(T)$ alors $T - \lambda I$ est Fredholm.

2.2. Remarque. Les propriétés suivantes résultent directement des conditions (a), (b) et (c) de la définition 2.1:

(i) $\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) \leqslant |T|$ pour tout $T \in B(X)$;
(ii) $\mathcal{F}_{|\cdot|}(K) = 0$ pour tout $K \in K(X)$;
(iii) si pour tout $T, S \in B(X)$, $\mathcal{F}_{|\cdot|}(ST) \leqslant |S|\mathcal{F}_{|\cdot|}(T)$ ou $\mathcal{F}_{|\cdot|}(TS) \leqslant |S|\mathcal{F}_{|\cdot|}(T)$ alors la condition (c) est vérifiée.

Les quantités suivantes sont des exemples de fonction Φ_1-perturbation.

2.3. Example. La norme essentielle,

$$|T|_{\mathrm{e}} = \inf\{|T + K| : K \in K(X)\}$$

il est clair que $|T|_{\mathrm{e}}$ vérifie les conditions de la définition d'une fonction Φ_1-perturbation.

2.4. Example. La mesure de non-compacité de Kuratowski ([1], [4], [5], [10]).

Soit D un sous-ensemble borné de X, notons alors,

$$\widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(D) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : D \subset \bigcup_{k=1}^{n} D_k\right\};$$

où les D_k sont des sous-ensembles de X de diamètres, $\delta(D_k) < \varepsilon$ et par définition $\delta(D_k) = \sup\{|x-y| : x, y \in D_k\}$.

Alors $\widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(D) = 0$ si est seulement si D est relativement compact.

Maintenant pour $T \in B(X)$, on définit,

$$\widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(T) = \sup\left\{\frac{\widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(TD)}{\widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(D)} : \widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(D) > 0\right\}.$$

$\widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(T)$ est une fonction Φ_1-perturbation. En effet, les conditions (a), (b), (c) et (d) de la définition 2.1 se déduisent de [4], lemme I.2.8 et théorème I.4.4.

2.5. EXEMPLE. La mesure de non-compacité de Hausdorff ([1], [4], [5], [11]),

$$\alpha_{|\cdot|}(T) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : TB(0,1) \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)\right\}$$

où, $x_k \in X$ et $B(x_k, \varepsilon) = \{x \in X : |x - x_k| \leqslant \varepsilon\}$.

$\alpha_{|\cdot|}(T)$ est une fonction Φ_1-perturbation. En effet, les conditions (a), (b), (c) et (d) de la définition 2.1 se déduisent respectivement de [4], lemme I.2.8 et théorème I.4.4.

2.6. EXEMPLE. Encore une mesure de non-compacité ([1], [4], [11]),

$$|T|_{\mathrm{m}} = \inf\{|TJ_M| : M \in \mathcal{E}_{\mathrm{cf}}(X)\}.$$

$|T|_{\mathrm{m}}$ est une fonction Φ_1-perturbation. En effet, les conditions (a) et (d) se déduisent respectivement de [11], p. 9 et théorème 6.1, et les condition (b) et (c) sont évidentes.

2.7. EXEMPLE. Encore une mesure de non-compacité ([21]):

$$k_{|\cdot|}(T) = \inf\{|Q_V T| : V \in \mathcal{E}_{\mathrm{df}}(X)\}.$$

$k_{|\cdot|}(T)$ est une fonction Φ_1-perturbation. En effet, les condition (b) et (c) sont évidentes. D'autre part $k_{|\cdot|}(T) = 0$ si et seulement si $T \in K(X)$ (voir [21], p. 221) et puisque $k_{|\cdot|}(T+S) \leqslant k_{|\cdot|}(T) + k_{|\cdot|}(S)$, pour tout opérateur compact K, $k_{|\cdot|}(T+K) \leqslant k_{|\cdot|}(T)$. D'où si on remplace dans la dernière inégalité T par $T+K$ et K par $-K$, on obtient $k_{|\cdot|}(T) \leqslant k_{|\cdot|}(T+K)$. Par conséquent la condition (a) est vérifiée. La condition (d) se déduit de [21], théorème 5.2.

2.8. EXEMPLE. Mesures de non-stricte singularité ([7], [17], [19], [21]):

$$\Delta_{|\cdot|}(T) = \sup\{\inf\{|TJ_N| : N \subset M,\, N \in \mathcal{E}_{\mathrm{di}}(X)\}, M \in \mathcal{E}_{\mathrm{di}}(X)\}.$$

$\Delta_{|\cdot|}(T)$ est une fonction Φ_1-perturbation. En effet, la condition (a) se déduit de [17], (c), p. 1062. Les conditions (b) et (c) sont évidentes. Pour la condition (d), il suffit d'appliquer le [17], théorème 2.12, pour $B = T$ et $A = \lambda I$.

2.9. EXEMPLE. Encore une mesures de non-stricte singularité ([17], [5], [21]):

$$\tau_{|\cdot|}(T) = \sup\{j_{|\cdot|}(TJ_M) : M \in \mathcal{E}_{\mathrm{di}}(X)\}.$$

$\tau_{|\cdot|}(T)$ est une fonction Φ_1-perturbation. En effet, la condition (a) se déduit de [17], (d), p. 1062. Les conditions (b) et (c) sont évidentes. Pour la condition (d), il suffit d'appliquer le [17], théorème 2.14, pour $B = T$ et $A = \lambda I$.

2.10. Exemple. Mesures de non-stricte co-singularité ([3], [7], [17], [19], [21]):

$$\nabla_{|\cdot|}(T) = \sup\{\inf\{|Q_V T| : V \supset W,\ V \in \mathcal{E}_{\mathrm{ci}}(X)\}, W \in \mathcal{E}_{\mathrm{ci}}(X)\}.$$

Posons $K_{|\cdot|}(T) = \inf\{|Q_V T| : V \in \mathcal{E}_{\mathrm{di}}(X)\}$, alors d'après [3], lemme 4.13, on a pour tout $T, S \in B(X)$

$$K_{|\cdot|}(T+S) \leqslant \nabla_{|\cdot|}(T) + K_{|\cdot|}(S) \tag{2.5}$$

d'où

$$\nabla_{|\cdot|}(T+S) \leqslant \nabla_{|\cdot|}(T) + \nabla_{|\cdot|}(S). \tag{2.6}$$

D'autre part, il résulte de [3], théorème 4.15, que si $K \in K(X)$ alors $\nabla_{|\cdot|}(K) = 0$. D'où, (2.6) implique que pour tout $K \in K(X)$, $\nabla_{|\cdot|}(T+K) \leqslant \nabla_{|\cdot|}(T)$. Donc $\nabla_{|\cdot|}(T) = \nabla_{|\cdot|}((T+K)+(-K)) \leqslant \nabla_{|\cdot|}(T+K)$ et donc pour tout $K \in K(X)$, $\nabla_{|\cdot|}(T+K) = \nabla_{|\cdot|}(T)$, ce qui montre que la condition (a) est vérifiée.

Montrons que la condition (d) est aussi vérifiée. Soit $|\lambda| > \nabla_{|\cdot|}(T)$ et posons $S = -\lambda I$ alors $K_{|\cdot|}(S) = |\lambda|$ et $\nabla_{|\cdot|}(T) < K_{|\cdot|}(S)$. Soit $t \in [0,1]$ alors (2.5) implique $K_{|\cdot|}(S+tT) \geqslant K_{|\cdot|}(S) - \nabla_{|\cdot|}(tT) = |\lambda| - t\nabla_{|\cdot|}(T) > 0$. D'où d'après [4], corollaire 4.4, $S+tT$ est semi-Fredholm inférieur et par continuité de l'indice, on obtient $\mathrm{ind}(T-\lambda I) = \mathrm{ind}(S) = \mathrm{ind}(\lambda I)$. Par conséquent $T - \lambda I$ est Fredholm et la condition (d) est vérifiée.

2.11. Exemple. Encore une mesures de non-stricte co-singularité ([21]):

$$v_{|\cdot|}(T) = \sup\{q_{|\cdot|}(Q_W T) : W \in \mathcal{E}_{\mathrm{ci}}(X)\}.$$

$v_{|\cdot|}(T)$ est une fonction Φ_1-perturbation. En effet, les conditions (b) et (c) sont évidentes. La condition (d) se déduit de [21], théorème 5.1. D'autre part, soit $\varepsilon > 0$ alors par dédinition de $v_{|\cdot|}(T)$, il existe W_ε sous-espace fermé de codimension infinie tel que $v_{|\cdot|}(T) \leqslant q_{|\cdot|}(Q_{W_\varepsilon} T) + \varepsilon/2$.

Soit K un opérateur compact alors il existe un sous-espace V_ε de dimension finie tel que $|Q_{V_\varepsilon} K| < \varepsilon/2$.

D'où, en posant $Z_\varepsilon = W_\varepsilon + V_\varepsilon$, alors Z_ε est fermé, de codimension infinie et on a

$$\begin{aligned} &v_{|\cdot|}(T) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant q_{|\cdot|}(Q_{W_\varepsilon} T) \leqslant q_{|\cdot|}(Q_{Z_\varepsilon} T) \leqslant q_{|\cdot|}(Q_{Z_\varepsilon}(T+K)) + |Q_{Z_\varepsilon} K| \\ &\leqslant q_{|\cdot|}(Q_{Z_\varepsilon}(T+K)) + |Q_{W_\varepsilon} K| \leqslant q_{|\cdot|}(Q_{Z_\varepsilon}(T+K)) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_{|\cdot|}(T+K) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Et, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $v_{|\cdot|}(T) \leqslant v_{|\cdot|}(T+K)$. En remplaçant dans cette dernière inégalité T par $T+K$ et K par $-K$, on obtient $v_{|\cdot|}(T+K) \leqslant v_{|\cdot|}(T)$. Par conséquent, pout tout $K \in K(X)$, $v_{|\cdot|}(T+K) = v_{|\cdot|}(T)$ et donc $v_{|\cdot|}(T)$ vérifie la condition (a).

2.12. Exemple. Distance aux opérateurs strictements singuliers:

$$|T|_{\mathrm{SS}} = \inf\{|T+R| : R \in \mathrm{SS}(X)\}.$$

Les conditions (a) et (b) sont clairement vérifiées ($K(X) \subset \mathrm{SS}(X)$). Puisque $\mathrm{SS}(X)$ est un idéal, pour tout $R \in \mathrm{SS}(X)$,

$$|ST|_{\mathrm{SS}} \leqslant |ST - SR| \leqslant |S| \cdot |T - R|$$

et donc, $|ST|_{\mathrm{SS}} \leqslant |S| \cdot |T|_{\mathrm{SS}}$. D'où, la condition (c) est vérifiée.

D'autres part, pour tout $R \in \mathrm{SS}(X)$,

$$\Delta_{|\cdot|}(T) = \Delta_{|\cdot|}(T - R) \leqslant |T - R|$$

d'où

$$\Delta_{|\cdot|}(T) \leqslant |T|_{\mathrm{SS}}$$

et la condition (d) se déduit de cette dernière inégalité (voir exemple 2.8).

2.13. Exemple. Distance aux opérateurs strictements co-singuliers:

$$|T|_{\mathrm{SC}} = \inf\{|T + R| : R \in \mathrm{SC}(X)\}.$$

Les conditions (a) et (b) sont clairement vérifiées ($K(X) \subset \mathrm{SC}(X)$). Puisque $\mathrm{SC}(X)$ est un idéal, pour tout $R \in \mathrm{SC}(X)$,

$$|ST|_{\mathrm{SC}} \leqslant |ST - SR| \leqslant |S| \cdot |T - R|$$

et donc, $|ST|_{\mathrm{SC}} \leqslant |S| \cdot |T|_{\mathrm{SC}}$. D'où, la condition (c) est vérifiée.

D'autres part, pour tout $R \in \mathrm{SC}(X)$,

$$\nabla_{|\cdot|}(T) = \nabla_{|\cdot|}(T - R) \leqslant |T - R|$$

d'où

$$\nabla_{|\cdot|}(T) \leqslant |T|_{\mathrm{SC}}$$

et la condition (d) se déduit de cette dernière inégalité (voir exemple 2.10).

2.14. Exemple. La quantitée suivante a été introduite par H. Tylli ([18]).

Soit M un sous-espace fermé de dimension infinie, notons par

$$\phi_{|\cdot|,M}(T) = \inf\{\alpha_{|\cdot|}(TJ_N) : N \subset M\} \quad \text{et} \quad \chi_{|\cdot|}(T) = \sup\{\phi_{|\cdot|,M}(T) : M \in \mathcal{E}_{\mathrm{di}}(X)\}.$$

Alors il est facile de voir que $\chi_{|\cdot|}(T)$ vérifie les conditions (a), (b) et (c) de la définition d'une fonction Φ_1-perturbation. La condition (d) se déduit de [18], corollaire 3.

2.15. Exemple. La quantitée suivante a été aussi introduite par H. Tylli ([18]).

Soit W un sous-espace fermé de codimension infinie, notons par

$$\eta_{|\cdot|,W}(T) = \inf\{\alpha_{|\cdot|}(Q_V T) : V \subset W\} \quad \text{et} \quad \mu_{|\cdot|}(T) = \sup\{\eta_{|\cdot|,W}(T) : W \in \mathcal{E}_{\mathrm{ci}}(X)\}.$$

Alors il est facile de voir que $\mu_{|\cdot|}(T)$ vérifie les conditions (a), (b) et (c) de la définition d'une fonction Φ_1-perturbation. La condition (d) se déduit de [18], corollaire 3.

2.16. Remarque. (i) La fonction perturbation étudié par F. Galaz-Fontes ([5]) est une fonction Φ_1-perturbation.

(ii) Les quantités $|T|_{\mathrm{e}}, \widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(T), \alpha_{|\cdot|}(T)$ et $|T|_{\mathrm{m}}$ sont des mesures de non-compacités car on a (voir [4], [9], [1] et [3]),

$$T \in K(X) \Leftrightarrow |T|_{\mathrm{e}} = 0 \Leftrightarrow \widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(T) = 0 \Leftrightarrow \alpha_{|\cdot|}(T) = 0 \Leftrightarrow |T|_{\mathrm{m}} = 0.$$

(iii) Les quantités $\Delta_{|\cdot|}(T)$ et $\tau_{|\cdot|}(T)$ sont des mesures de non-stricte singularité car on a (voir [17])

$$T \in \mathrm{SS}(X) \Leftrightarrow \Delta_{|\cdot|}(T) = 0 \Leftrightarrow \tau_{|\cdot|}(T) = 0.$$

(iv) Les quantités $\nabla_{|\cdot|}(T)$ et $v_{|\cdot|}(T)$ sont des mesures de non-stricte co-singularité car on a (voir [3], [19], [20]), $T \in \mathrm{SC}(X) \Leftrightarrow \nabla_{|\cdot|}(T) = 0 \Leftrightarrow v_{|\cdot|}(T)$.

(v) Les exemples 2.13 et 2.14, restent des fonction Φ_1-perturbation même si on remplace $\alpha_{|\cdot|}(T)$ par $\widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(T)$ ou par $|T|_{\mathrm{m}}$.

(vi) Les mesures de non-compacités (exemples 2.3–2.6) sont des semi-normes dans $B(X)$ et des normes dans $C(X) = B(X)/K(X)$, l'algèbre de Calkin. $\alpha_{|\cdot|}(T)$, $\widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(T)$ et $|T|_{\mathrm{m}}$ sont équivalentes (voir [1], [4], [11]). Il est facile de voir que $C(X)$ muni de la norme $|T|_{\mathrm{e}}$ est complet. Puisque $\alpha_{|\cdot|}(T) \leqslant |T|_{\mathrm{e}}$, par le théorème du graphe fermé, on a : $C(X)$ muni de la norme $\alpha_{|\cdot|}(T)$ est complet si et seulement si $\alpha_{|\cdot|}(T)$ et $|T|_{\mathrm{e}}$ sont équivalentes. A. Lebow et M. Schechter, ([11], corollaire 3.7) ont montrés que si X a la propriété de l'approximation compacte bornée (b.c.a.p.) alors les normes $\alpha_{|\cdot|}(T)$ et $|T|_{\mathrm{e}}$ sont équivalentes. La reciproque a été obtenu par K. Astala et H. Tylli ([1], théorème 2.5) et ils donnent un exemple d'espace de Banach n'admettant pas b.c.a.p. ([1], exemple 2.6). Donc en général, $\alpha_{|\cdot|}(T)$ (ou $\widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(T)$ ou $|T|_{\mathrm{m}}$) et $|T|_{\mathrm{e}}$ ne sont pas équivalentes.

D'autre part, puisque les noyaux de $\Delta_{|\cdot|}(T), \nabla_{|\cdot|}(T)$ et $\alpha_{|\cdot|}(T)$ sont respectivement $\mathrm{SS}(X), \mathrm{SC}(X)$ et $K(X)$, ces quantités ne pouvent pas être équivalentes.

Le résultat suivant se déduit directement de la définition d'une fonction Φ_1-perturbation.

2.17. Théorème. *Soit $T \in B(X)$ et $|\cdot| \in \mathcal{N}$ et $\mathcal{F}_{|\cdot|}$ une fonction Φ_1-perturbation. Alors*

$$r_{\mathrm{e}}(T) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_{|\cdot|}(T^n)^{1/n}.$$

Démonstration. En utilisant la condition (d), on voit facilement que pour tout $n \geqslant 1$,

$$r_{\mathrm{e}}(T) = r_{\mathrm{e}}(T^n)^{1/n} \leqslant \mathcal{F}_{|\cdot|}(T^n)^{1/n}.$$

D'autre part, les conditions (a), (b) et (c) impliquent que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathcal{F}_{|\cdot|}(T^n)^{1/n} \leqslant |T^n|_{\mathrm{e}}^{1/n}.$$

Puisque $|\cdot| \in \mathcal{N}$, il existe $k > 0$ tel que $|T|_{\mathrm{e}} \leqslant k\|T\|_{\mathrm{e}}$. D'où en utilisant les deux inégalités précédente et en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient la conclusion du théorème. ∎

2.18. Remarque. La conclusion du théorème précédent a été obtenue, pour les exemples cités plus haut, par des différents auteurs (voir [4], [5], [11], [17], [18], [21]).

2.19. Théorème. *Soit $T \in B(X)$ et $\mathcal{F}_{|\cdot|}$ une fonction Φ_1-perturbation, alors*

$$r_{\mathrm{e}}(T) = \inf\{\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\}.$$

Pour la démonstration du théorème 2.19 on aura besoin des lemmes suivants.

2.20. Lemme. ([14], lemme 6) *Soit $T \in B(X)$ et $\varepsilon > 0$. Alors:*
(i) *l'ensemble $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r_e(T) + \varepsilon\}$ est fini (éventuellement vide);*
(ii) *il existe un opérateur de rang fini $F \in B(X)$ tel que*

$$\sigma(T + F) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant r_e(T) + \varepsilon\}.$$

2.21. Lemme. *Soit $T \in B(X)$ avec $r(T) < 1$, alors il existe $|\cdot| \in \mathcal{N}$ tel que $|T| \leqslant 1$ où $r(T)$ est le rayon spectral de T.*

Démonstration. Puisque $r(T) < 1$, la suite $(T^n)_{n \geqslant 0}$ converge vers zéro, donc elle est bornée. Soit $M = \sup_{n \geqslant 0} \|T^n\|$. Posons $|x| = \sup_{n \geqslant 0} \|T^n x\|$, pour $x \in X$. Alors pour tout $x \in X$, $\|x\| \leqslant |x| \leqslant M \cdot \|x\|$ et $|Tx| \leqslant |x|$. Par conséquent, $|\cdot| \in \mathcal{N}$ et $|T| \leqslant 1$. ∎

Démonstration du théorème 2.19. D'après la condition (d) de la définition d'une fonction Φ_1-perturbation, on a pour tout $|\cdot| \in \mathcal{N}$, $r_e(T) \leqslant \mathcal{F}_{|\cdot|}(T)$. D'où,

$$r_e(T) \leqslant \inf\{\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\}.$$

Montrons l'autre inégalité. Soit $\varepsilon > 0$, alors, par le lemme 2.20, il existe un opérateur de rang fini $F \in B(X)$, tel que le rayon spectral,

$$r(T + F) \leqslant r_e(T) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant par le lemme 2.21, il existe $|\cdot|_\varepsilon \in \mathcal{N}$ tel que $|T+F|_\varepsilon \leqslant r_e(T) + \varepsilon$. Mais par définition d'une fonction Φ_1-perturbation (voir la remarque 2.2), on obtient, $\mathcal{F}_{|\cdot|_\varepsilon}(T) = \mathcal{F}_{|\cdot|_\varepsilon}(T + F) \leqslant |T + F|_\varepsilon$. Par conséquent, $\mathcal{F}_{|\cdot|_\varepsilon}(T) \leqslant r_e(T) + \varepsilon$ et donc, $\inf\{\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} \leqslant r_e(T) + \varepsilon$. Et, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il résulte que $\inf\{\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} \leqslant r_e(T)$ et le théorème est démontré. ∎

Application à un exemple classique. Soit H un espace de Hilbert séparable muni de la norme $\|\cdot\|$, définie par le produit scalaire et soit $(e_n)_{n \geqslant 1}$ une base orthonormée de H. Soit $T \in B(H)$ le shift unilatéral défini par $Te_n = e_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$. Alors il est facile de voir que: $\|T\| = 1$ et $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$.

Maintenant en utilisant remarque 2.2 (i) on obtient pour la norme usuelle, $\mathcal{F}_{\|\cdot\|}(T) \leqslant \|T\| = 1$. D'où,

$$\inf\{\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} \leqslant \mathcal{F}_{\|\cdot\|}(T) \leqslant 1.$$

Montrons que pour tout $|\cdot| \in \mathcal{N}$, $\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) \geqslant 1$. Supposons que $\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) < 1$. Alors pour $\lambda \in \partial\sigma(T)$, $|\lambda| = 1 > \mathcal{F}_{|\cdot|}(T)$. Il résulte alors que $T - \lambda I$ est Fredholm (voir la condition (d) de la définition 2.1), contradiction, car $R(T - \lambda I)$ n'est pas fermé pour tout $\lambda \in \partial\sigma(T)$. Par conséquent,

$$\inf\{\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} \geqslant 1.$$

Donc finalement,

$$r_e(T) = \inf\{\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} = 1.$$

2.22. Remarque. (i) Dans le cas de l'exemple du shift l'inf est atteint. Ceci suggère la question suivante: Pour un opérateur $T \in B(X)$ Fredholm et X

un espace de Banach de dimension infinie, existe-t-il une norme équivalente $|\cdot| \in \mathcal{N}$ telle que $r_{\mathrm{e}}(T) = \mathcal{F}_{|\cdot|}(T)$?

(ii) Si T est une isométrie dans un espace de Hilbert avec indice fini alors, par un raisonnement analogue utilisé dans le cas du shift, il est facile de voir que $r_{\mathrm{e}}(T) = \inf\{\mathcal{F}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} = 1$ est que cet inf est atteint.

3. FORMULE DE DISTANCE AU SPECTRE ESSENTIEL

Rappelons la définition et quelques propriétés de la conorme d'un opérateur $T \in B(X)$ et $|\cdot| \in \mathcal{N}$, notée par $\gamma_{|\cdot|}(T)$ et par définition:

$$\gamma_{|\cdot|}(T) := \inf\{|Tx| : \mathrm{dist}(x, N(T)) = 1\}, \quad \gamma_{|\cdot|}(T) = +\infty \text{ si } T = 0.$$

Alors (cf. [6], [9])

$$\gamma_{|\cdot|}(T) > 0 \quad \text{si et seulement si } R(T) \text{ est fermé,} \tag{3.1}$$

$$\gamma_{|\cdot|}(T) = \gamma_{|\cdot|}(T^*). \tag{3.2}$$

D'après la définition de $\gamma_{|\cdot|}(T)$, on voit facilement que

$$j_{|\cdot|}(T) = \begin{cases} \gamma_{|\cdot|}(T) & \text{si } T \text{ est injectif à image fermée,} \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Et par dualité (voir (2.3) et (3.2)) on obtient,

$$q_{|\cdot|}(T) = \begin{cases} \gamma_{|\cdot|}(T) & \text{si } T \text{ est surjectif,} \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Le théorème qui suit, sur les perturbations des Fredholm, est dû à T. Kato ([9], théorème 1; voir aussi [6], théorème V.1.6).

3.1. THÉORÈME. *Si $T \in \Phi(X)$ et $S \in B(X)$ alors*

$$|S| < \gamma_{|\cdot|}(T) \Rightarrow T - S \in \Phi(X).$$

3.2. LEMME. *Soit $T, S \in B(X)$ avec $TST = T$ (dans ce cas, S est dit inverse généralisé de T), alors pour tout $|\cdot| \in \mathcal{N}$,*

$$\gamma_{|\cdot|}(T) \geqslant \frac{1}{|S|}.$$

Démonstration. Puisque $TST = T$, alors pour tout $x \in X$, $x - STx \in N(T)$. D'où, $\mathrm{dist}(x, N(T)) = \mathrm{dist}(STx, N(T)) \leqslant |STx| \leqslant |S|\,|Tx|$. Et donc, $\gamma_{|\cdot|}(T) \geqslant 1/|S|$. ∎

3.3. LEMME. *Soit $T \in \Phi(X)$ alors:*

(i) *il existe $S \in B(X)$ tel que $TST = T$;*

(ii) *si $TST = T$ alors $\pi(S) = \pi(T)^{-1}$.*

Démonstration. (i) Puisque T est Fredholm, il existe X_0, M_0 sous-espaces fermés de X tel que $N(T) \oplus X_0 = X = R(T) \oplus M_0$. Soit P la projection sur $R(T)$. Soit $T_0 = T : X_0 \mapsto R(T)$ alors T_0 est inversible et $S = T_0^{-1}P \in B(X)$ vérifie $TST = T$.

(ii) Par le théorème d'Atkinson (voir (1.1)), $\pi(T)$ est inversible dans l'algèbre de Calkin $C(X)$. D'autre part $TST = T$ implique $\pi(T)\pi(S)\pi(T) = \pi(T)$. D'où, en multipliant à droite et à gauche l'égalité précédente par $\pi(T)^{-1}$, on trouve $\pi(S) = \pi(T)^{-1}$. ∎

3.4. Définition. Soit $T \in B(X)$ et $|\cdot| \in \mathcal{N}$, on dira que la fonction $\mathcal{G}_{|\cdot|}(T)$ à valeurs réelles positives est une fonction Φ_2-*perturbation* si les conditions suivantes sont vérifiées:

(a) $\mathcal{G}_{|\cdot|}(T+K) = \mathcal{G}_{|\cdot|}(T)$ pour tout $K \in K(X)$;
(b) $\mathcal{F}_{|\cdot|}(I) = 1$;
(c) $\min\{\mathcal{F}_{|\cdot|}(ST), \mathcal{F}_{|\cdot|}(TS)\} \leqslant |S|\mathcal{F}_{|\cdot|}(T)$ pour tout $T, S \in B(X)$;
(d′) si $T \in \Phi(X)$ et $|\lambda| < \mathcal{G}_{|\cdot|}(T)$ alors $T - \lambda I \in \Phi(X)$.

Les quantités suivantes sont des exemples de fonction Φ_2-perturbation.

3.5. Exemple. La distance aux opérateurs non Fredholm:

$$d_{|\cdot|}(T) = \operatorname{dist}(T, B(X) \setminus \Phi(X)).$$

La stabilté des opérateurs Fredholm par les perturbations compacts implique la condition (a). Par le Théorème 3.1 et puisque $0 \in K(X)$, on a

$$1 = \gamma_{|\cdot|}(I) \leqslant d_{|\cdot|}(I) \leqslant |I| = 1$$

et la condition (b) est vérifiée. La condition (d′) est évidente. Il reste à montrer que $d_{|\cdot|}(T)$ vérifie la condition (c). En utilisant (1.1), on voit facilement que:

$$TS \text{ et } ST \in \Phi(X) \Leftrightarrow T \text{ et } S \in \Phi(X), \tag{3.3}$$

$$T \in \Phi(X) \text{ et } A \in B(X) \setminus \Phi(X) \Rightarrow TA \text{ et } AT \in B(X) \setminus \Phi(X), \tag{3.4}$$

$$T \in \Phi(X) \Rightarrow B(X) \setminus \Phi(X) = T \cdot [B(X) \setminus \Phi(X)] + K(X). \tag{3.5}$$

D'autre part, si TS ou ST est dans $B(X)\setminus\Phi(X)$ alors $\min\{d_{|\cdot|}(TS), d_{|\cdot|}(ST)\} = 0$ et donc (c) est vérifiée.

Supposons maintenant que TS et $ST \in \Phi(X)$ alors d'après (3.3), $T \in \Phi(X)$. D'où, par (3.4), pour tout $A \in B(X) \setminus \Phi(X)$ et $K \in K(X)$ on a,

$$d_{|\cdot|}(ST) \leqslant |ST - STA + SK| \leqslant |S| \cdot |T - TA + K|.$$

Maintenant en utilisant (3.5), on obtient, $d_{|\cdot|}(ST) \leqslant |S| \cdot d_{|\cdot|}(T)$. Ce qui montre que la condition (c) est vérifiée.

3.6. Exemple. La quantité suivante, introduite par B. Gramsch, est liée aux nombres de Gelfand (voir [8], [17], [21]):

$$G_{|\cdot|}(T) = \inf\{|TJ_M| : M \in \mathcal{E}_{\mathrm{di}}(X)\}.$$

Pour la condition (a) voir [21], théorème 3.1. Les conditions (b) et (c) sont évidentes. La condition (d′) se déduit du [17], théorème 2.12, appliqué à $B = \lambda I$ et $A = T$ (voir aussi [21], théorème 5.3).

3.7. Exemple. La quantité suivante est liée aux nombres de Kolmogorov ([21]):

$$K_{|\cdot|}(T) = \inf\{|Q_V T| : V \in \mathcal{E}_{\mathrm{ci}}(X)\}.$$

Pour la condition (a) voir [21], théorème 3.1. Les conditions (b) et (c), sont évidentes. La condition (d′) se déduit du [21], théorème 5.3.

3.8. Exemple. Pour la quantité suivante a été introduite par J. Zemànek ([7], [22]):

$$\Delta'_{|\cdot|}(T) = \sup\{\inf\{|TJ_N| : N \subset M \text{ et } N \in \mathcal{E}_{\mathrm{di}}(X)\}, M \in \mathcal{E}_{\mathrm{cf}}(X)\}.$$

Dans [7], remarque 3.2, on montre que $\Delta'_{|\cdot|}(T) = G_{|\cdot|}(T)$ (voir section 2, exemple 2.4), d'où $\Delta'_{|\cdot|}(T)$ est aussi une fonction Φ_2-perturbation.

3.9. Exemple. Pour la quantité suivante voir [3], [7], [22]:

$$\nabla'_{|\cdot|}(T) = \sup\{\inf\{|Q_V T| : V \supset W \text{ et } V \in \mathcal{E}_{\text{ci}}(X)\}, W \in \mathcal{E}_{\text{if}}(X)\}.$$

Les conditions (b) et (c), sont évidentes. Pour la condition (a) s'obtient comme dans section 2, exemple 8. La condition (d′) se déduit de $\nabla'_{|\cdot|}(T) \leqslant d_{|\cdot|}(T)$, (voir [22], p. 233) d'où $\nabla'_{|\cdot|}(T)$ est aussi une fonction Φ_2-perturbation.

3.10. Exemple. La quantité suivante est liée aux nombres de Mityagin ([7], [21]):

$$M_{|\cdot|}(T) = \sup\{q_{|\cdot|}(Q_V T) : V \in \mathcal{E}_{\text{if}}(X)\}.$$

Pour la condition (a) voir [21], théorème 3.1. Les conditions (b) et (c), sont évidentes. La condition (d′) se déduit du [21], théorème 5.1.

3.11. Exemple. La quantité suivante est liée aux nombres de Bernstein ([7], [21]):

$$B_{|\cdot|}(T) = \sup\{j_{|\cdot|}(T J_M) : M \in \mathcal{E}_{\text{cf}}(X)\}.$$

Pour la condition (a) voir [21], théorème 3.1 . Les conditions (b) et (c), sont évidentes. La condition (d′) se déduit du [21], théorème 5.1.

3.12. Exemple. Pour la quantité suivante voir [7], [18]:

$$\phi_{|\cdot|}(T) = \inf\{\alpha_{|\cdot|}(T J_M) : M \in \mathcal{E}_{\text{di}}(X)\}.$$

Les conditions (a), (b) et (c) se vérifient facilement (voir section 2, exemple 2.5). La condition (d′) se déduit de [18], corollaire 3.

3.13. Exemple. Voir [7], [18]:

$$\eta_{|\cdot|}(T) = \inf\{\alpha_{|\cdot|}(Q_V T) : V \in \mathcal{E}_{\text{ci}}(X)\}.$$

Les conditions (a), (b) et (c) se vérifient facilement (voir section 2, exemple 2.5). La condition (d′) se déduit de [18], corollaire 3.

3.14. Exemple. Pour la quantité suivante voir [18]:

$$\widetilde{A}_{|\cdot|}(T) = \inf\Big\{\frac{\widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(TD)}{\widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(D)} : \widetilde{\alpha}_{|\cdot|}(D) > 0\Big\}.$$

Les conditions (a), (b) et (c) se vérifient facilement(voir section 2, exemple 2.4). Pour démontrer la condition (d′), on utilise l'inégalité $\widetilde{A}_{|\cdot|}(T) \leqslant \phi(T)$ voir la preuve du [18], théorème 7 et corollaire 3.

3.15. Exemple. Pour la quantité suivante voir [7]:

$$V_{|\cdot|}(T) = \inf\{v_{|\cdot|}(Q_W T) : W \in \mathcal{E}_{\text{ci}}(X)\}.$$

Les conditions (a), (b) et (c) se vérifient facilement (voir section 2, exemple 2.11). La condition (d′) se déduit de section 3, exemple 3.7 et de l'inégalité suivante $V_{|\cdot|}(T) \leqslant K_{|\cdot|}(T)$ (voir [7], théorème 4.5).

3.16. EXEMPLE. Pour la quantité suivante voir [7]:

$$\widetilde{\tau}_{|\cdot|}(T) = \inf\{\tau_{|\cdot|}(TJ_M) : M \in \mathcal{E}_{\mathrm{di}}(X)\}.$$

Les conditions (a), (b) et (c) se vérifient facilement (voir section 2, exemple 2.9). La condition (d′) se déduit de section 3, exemple 3.5, et de l'inégalité suivante $\widetilde{\tau}_{|\cdot|}(T) \leqslant d_{|\cdot|}(T)$ (voir [7], p. 21).

3.17. REMARQUE. (i) ([7], théorème 4.3 et théorème 4.5) montre que $M_{|\cdot|}(T) \leqslant V_{|\cdot|}(T) \leqslant K_{|\cdot|}(T)$, mais ces quantitées ne sont pas équivalentes.

(ii) ([7], théorème 2.7) montre que $B_{|\cdot|}(T) \leqslant \widetilde{\tau}_{|\cdot|}(T)$, mais ces deux quantitées ne sont pas équivalentes.

(iii) ([7], proposition 3.6) montre que $\phi_{|\cdot|}(T) \leqslant G_{|\cdot|}(T) \leqslant 2\phi_{|\cdot|}(T)$.

3.18. LEMME. *Soit $T \in \Phi(X)$ et $S \in B(X)$ avec $TST = T$ alors*

$$\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) \geqslant \frac{1}{|S|_{\mathrm{e}}}.$$

Démonstration. Puisque $T \in \Phi(X)$ et $TST = T$, $F_1 = I - ST$ et $F_2 = I - TS$ sont des projections respectivement sur le noyau de T et un complement de $R(T)$. Donc, F_1 et F_2 sont de rang fini. En utilisant les conditions (a) et (b) de la définition d'une fonction Φ_2-perturbation, on obtient pour tout $K \in K(X)$,

$$1 = \mathcal{G}_{|\cdot|}(I) = \mathcal{G}_{|\cdot|}(ST + F_1) = \mathcal{G}_{|\cdot|}(ST) = \mathcal{G}_{|\cdot|}((S-K)T),$$

de même $1 = \mathcal{G}_{|\cdot|}(I) = \mathcal{G}_{|\cdot|}(TS + F_2) = \mathcal{G}_{|\cdot|}(TS) = \mathcal{G}_{|\cdot|}(T(S-K))$. D'où, par (c), on a pour tout $K \in K(X)$, $1 = \mathcal{G}_{|\cdot|}(T(S-K)) = \mathcal{G}_{|\cdot|}((S-K)T) \leqslant |S-K|\mathcal{G}_{|\cdot|}(T)$, et donc pour tout $K \in K(X)$, $\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) \geqslant \frac{1}{|S-K|}$. Par conséquent, $\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) \geqslant \frac{1}{|S|_{\mathrm{e}}}$ et le lemme est démontré. ∎

3.19. THÉORÈME. *Soit $T \in \Phi(X)$, $|\cdot| \in \mathcal{N}$ et $\mathcal{G}_{|\cdot|}$ une fonction de Φ_2-perturbation. Alors*

$$\operatorname{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T)) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_{|\cdot|}(T^n)^{1/n}.$$

Démonstration. Par la condition (d′) de la définition d'une fonction Φ_2-perturbation, on a pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{G}_{|\cdot|}(T^n) \leqslant \operatorname{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T^n))$. Maintenant, en appliquant le théorème de l'application spectral, on obtient pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{G}_{|\cdot|}(T^n)^{1/n} \leqslant \operatorname{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T))$. D'autre part, en utilisant les lemmes 3.18 et 3.3, on voit sans difficulté que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathcal{G}_{|\cdot|}(T^n) \geqslant \frac{1}{|\pi(T)^{-n}|_{\mathrm{e}}}.$$

Par conséquent, on a pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{|\pi(T)^{-n}|_{\mathrm{e}}^{1/n}} \leqslant \mathcal{G}_{|\cdot|}(T^n)^{1/n} \leqslant \operatorname{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T)).$$

Finalement, par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient la conclusion du théorème. ∎

3.20. Remarque. La conclusion du théorème précédent a été obtenue, pour les exemples cités plus haut, par des différents auteurs (voir [4], [5], [11], [17], [18], [21]).

3.21. Théorème. *Soit $T \in \Phi(X)$, alors*

$$\operatorname{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T)) = \sup\{\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\}.$$

Démonstration. Soit $d = \operatorname{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T))$ et $\delta > 0$. Puisque $T \in \Phi(X)$, par théorème 5.2 du [12], il existe un opérateur $F_\delta \in B(X)$ de rang fini tel que pour tout $\lambda \in B(0, d/(1+\delta))$, $T + F_\delta - \lambda I \in \Phi(X)$ soit injectif ou surjectif (selon l'indice de T). Maintenant en utilisant [2], théorème 3.1, on voit facilement que si, on note, $T_\delta = T + F_\delta$, alors

$$\frac{d}{1+\delta} \leqslant \sup\left\{\frac{1}{r(S)} : T_\delta S T_\delta = T_\delta\right\}.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $S \in B(X)$ avec $T_\delta S T_\delta = T_\delta$. Alors par le lemme 2.20, il existe $|\cdot| \in \mathcal{N}$ tel que $|S| \leqslant r(S) + \varepsilon$.

D'où en utilisant le lemme 3.18 et la condition (a) de la définition d'une fonction Φ_2-perturbation, on obtient

$$\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) = \mathcal{G}_{|\cdot|}(T_\delta) \geqslant \frac{1}{|S|_{\mathrm{e}}} \geqslant \frac{1}{|S|} \geqslant \frac{1}{r(S)+\varepsilon}.$$

D'où, $\sup\{\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} \geqslant 1/(r(S)+\varepsilon)$. Et, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\sup\{\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} \geqslant 1/r(S)$ et ceci pour tout $S \in B(X)$ avec $T_\delta S T_\delta = T_\delta$. D'où,

$$\sup\{\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} \geqslant \sup\left\{\frac{1}{r(S)} : T_\delta S T_\delta = T_\delta\right\} \geqslant \frac{d}{1+\delta}.$$

Et, comme $\delta > 0$ est arbitraire, on obtient

$$\sup\{\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} \geqslant d.$$

L'autre inégalité s'obtient en utilisant la condition (d$'$) de la définition d'une fonction Φ_2-perturbation. En effet, la condition (d$'$), implique que pour tout $|\cdot| \in \mathcal{N}$, $\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) \leqslant d$ et donc,

$$\sup\{\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} \leqslant d.$$

Ce qui permet de conclure. ∎

Application à un exemple classique. Considérons encore le shift unilatéral défini à la fin de la deuxième section. Soit H un espace de Hilbert séparable muni de la norme $\|\cdot\|$, définie par le produit scalaire et soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H. Soit $T \in B(H)$ le shift unilatéral défini par $Te_n = e_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$. Alors il est facile de voir que:

(1) L'opérateur $T^* \in B(H)$, l'adjoint de T est défini par $T^*e_1 = 0$ et $T^*e_n = e_{n-1}$ pour tout $n > 1$.

(2) $T^*T = I$, $TT^* = I - P$, où P est la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par e_1.

(3) $\|T\| = \|T^*\| = 1$ et $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$.

En utilisant maintenant, (a) et (b) de la définition 3.4, et (2), on obtient $\mathcal{G}_{|\cdot|}(T^*T) = \mathcal{G}_{|\cdot|}(TT^*) = 1$. D'où par la condition (c) de la définition 3.4, on a pour tout $|\cdot| \in \mathcal{N}$, $1 \leqslant |T^*| \cdot \mathcal{G}_{|\cdot|}(T)$. Par conséquent on a,

$$\sup\{\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} \geqslant \mathcal{G}_{\|\cdot\|}(T) \geqslant \frac{1}{\|T^*\|} = 1.$$

D'autre part, la condition (d′) de la définition 3.4 implique que pour tout $|\cdot| \in \mathcal{N}$, $\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) \leqslant 1$. En effet, si $\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) > 1$ alors pour $\lambda \in \partial\sigma(T)$, $|\lambda| = 1 < \mathcal{G}_{|\cdot|}(T)$. Il résulte alors que $T - \lambda I$ est Fredholm, contradiction car $R(T - \lambda I)$ n'est pas fermé pour tout $\lambda \in \partial\sigma(T)$.

Donc finalement, le théorème 3.21 montre que

$$\operatorname{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T)) = \sup\{\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} = 1.$$

3.22. REMARQUE. (i) Dans le cas de l'exemple du shift le sup est atteint. Ceci suggère la question suivante: Pour un opérateur $T \in B(X)$ Fredholm et X un espace de Banach de dimension infinie, existe-t-il une norme équivalente $|\cdot| \in \mathcal{N}$ telle que $\operatorname{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T)) = \mathcal{G}_{|\cdot|}(T)$?

(ii) Si T est une isométrie dans un espace de Hilbert avec indice fini alors, par un raisonnement analogue utilisé plus haut dans le cas du shift, on peut montrer facilement que $\operatorname{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T)) = \sup\{\mathcal{G}_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\} = 1$ est que ce sup est atteint.

3.23. EXEMPLE. La conorme essentielle ([13]):

$$\gamma_{\mathrm{e},|\cdot|}(T) = \sup\{\gamma_{|\cdot|}(T + K) : K \in K(X)\}.$$

Les conditions (a) et (b) de la définition d'une fonction Φ_2-perturbation sont évidentes. La condition (d′) se déduit du théorème 3.1. En effet, si $T \in \Phi(X)$ et $|\lambda| < \gamma_{\mathrm{e},|\cdot|}(T)$ alors il existe un opérateur compact $K_0 \in K(X)$ tel que $|\lambda| < \gamma_{|\cdot|}(T + K_0)$. Comme $T + K_0 \in \Phi(X)$, le théorème 3.1 implique que $T + K_0 - \lambda I \in \Phi(X)$ et donc $T - \lambda I \in \Phi(X)$. Par contre la condition (c) n'est pas vraie en général. En effet, soit T un opérateur tel que $\gamma_{\mathrm{e},|\cdot|}(T) = 0$ (voir [13], p. 249, exemple 3) et soit K un opérateur compact alors $\gamma_{\mathrm{e},|\cdot|}(KT) = \gamma_{\mathrm{e},|\cdot|}(TK) = \infty$ et $|K|\gamma_{\mathrm{e},|\cdot|}(T) = 0$ par conséquent la condition (c) n'est pas vérifiée.

3.24. THÉORÈME. *Soit $T \in \Phi(X)$, alors*

$$\operatorname{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T)) = \sup\{\gamma_{\mathrm{e},|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\}.$$

Démonstration. On utilise le lemme 3.2 et les mêmes arguments que la démonstration du théorème 3.21. ∎

J. Zemànek a introduit les quantités suivantes (voir [21]):

$$q_{|\cdot|,\mathrm{e}}(T) = \sup\{q_{|\cdot|}(T + K) : K \in K(X)\}$$

et

$$j_{|\cdot|,\mathrm{e}}(T) = \sup\{j_{|\cdot|}(T + K) : K \in K(X)\}.$$

Soit $g_{|\cdot|}(T) = \max\{q_{|\cdot|,\mathrm{e}}(T), j_{|\cdot|,\mathrm{e}}(T)\}$. Alors on a le corollaire suivant

3.25. COROLLAIRE. *Soit $T \in \Phi(X)$, alors*

$$\operatorname{dist}(0, \sigma_{\mathrm{e}}(T)) = \sup\{g_{|\cdot|}(T) : |\cdot| \in \mathcal{N}\}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que si T est Fredholm alors $g_{|\cdot|}(T) = \gamma_{\mathrm{e},|\cdot|}(T)$ et appliquer le théorème 3.24. ∎

RÉFÉRENCES

1. K. ASTALA, H.O. TYLLI, On the bounded compact approximation property and measures of non-compactness, *J. Funct. Anal.* **70**(1987), 388–401.
2. C. BADEA, M. MBEKHTA, Generalized inverses and the maximal radius of regularity of Fredholm operator, *Integral Equations Operator Theory* **28**(1997), 133–146.
3. R.W. CROSS, L.E. LABUSCHAGNE, Characterisations of operators of lower semi-Fredholm type in normed linear spaces, *Questiones Math.* **15**(1992), 151–173.
4. D.E. EDMUNDS, W.D. EVANS, *Spectral Theory and Differential Operators*, Clarendon Press, Oxford 1987.
5. F. GALAZ-FONTES, Measures of non-compactness and upper semi-Fredholm perturbation theorems, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118**(1993), 891–897.
6. S. GOLDBERG, *Unbounded Linear Operators*, McGraw-Hill, New York 1966.
7. M. GONZALEZ, A. MARTINON, Operational quantities characterizing semi-Fredholm operators, *Studia Math.* **144**(1995), 13–27.
8. B. GRAMSCH, *Über analytische störungen und den index von Fredholm operatoren auf Banachraumen,* Department of Mathematics, University of Maryland, 1969.
9. T. KATO, Perturbation theory for nulity, deficiency and other quantities of linear operators, *J. Analyse Math.* **6**(1958), 261–322.
10. C. KURATOWSKI, Sur les espaces complets, *Fund. Math.* **15**(1930), 301–309.
11. A. LEBOW, M. SCHECHTER, Semigroups of operators and measures of non-compactness, *J. Funct. Anal.* **7**(1971), 1–26.
12. M. MBEKHTA, Semi-Fredholm perturbations and commutators, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **113**(1993), 173–177.
13. M. MBEKHTA, R. PAUL, Sur la conorme essentielle, *Studia Math.* **117**(1996), 243–252.
14. R. NUSSBAUM, The radius of the essential spectrum, *Duke Math. J.* **37**(1970), 1161–1171.
15. A. PELZCYNSKI, On strictly singular and strictly cosingular operators. II. Strictly singular and strictly cosingular operators in L(ν)-spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* **13**(1965), 31–41.
16. A. PIETSCH, *Operator Ideals*, VEB Deutsch Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978.
17. M. SCHECHTER, Quantities related to strictly singular operators, *Indiana Univ. Math. J.* **21**(1972), 473–478.
18. H.O. TYLLI, On the asymptotic behaviour of some quantities related to semi-Fredholm operators, *J. London Math. Soc.* **31**(1985), 340–348.
19. H.O. TYLLI, The essential norm of an operator is not self-dual, *Israel J. Math.* **91**(1995), 93–110.
20. J. ZEMÁNEK, On the Δ-characteristic of M. Schechter, in *Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics, Leipzig (1983)*, pp. 232–234.
21. J. ZEMÁNEK, Geometric characteristics of semi-Fredholm operators and their asymptotic behaviour, *Studia Math.* **80**(1984), 219–234.

22. J. ZEMÁNEK, The semi-Fredholm radius of a linear operator, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* **32**(1984), 67–76.

MOSTAFA MBEKHTA
Université de Lille I
UFR de Mathématiques
UMR-CNRS 8524
F–59655 Villeneuve d'Ascq
FRANCE
E-mail: mbekhta@univ-lille1.fr

Received July 11, 2001.