J. OPERATOR THEORY
56:2(2006), 273–290

DÉNOMINATEURS UNIVERSELS POUR LA DÉCOMPOSITION DE POLYNÔMES POSITIFS SUR UN ESPACE DE HILBERT

O. DEMANZE and A. MOUZE

Communicated by Şerban Strătilă

ABSTRACT. In this work, we prove that, under natural conditions, one can give representations of positive polynomials defined on a Hilbert space $\mathcal{H}$ where appear squares of rational fractions with specified denominators and the norm of powers of S^* (where S is the unilateral shift on $\mathcal{H}$). We generalize some recent results using functional analysis methods in finite dimensional case.

KEYWORDS: *Polynomial representation, semialgebraic sets, positive polynomials, sums of squares.*

MSC (2000): 26C05, 26C15, 47A13, 14P10.

INTRODUCTION

À la fin du XIXème siècle, Hilbert prouve l'existence de polynômes strictement positifs qui ne peuvent s'écrire comme somme de carrés de polynômes (ceci dès que le nombre de variables est supérieur ou égal à 2). Des exemples explicites seront donnés dans la seconde moitié du XXème siècle par T.S. Motzkin, R.M. Robinson ou K. Schmüdgen (voir respectivement [12], [19] et [20]). Le polynôme $P(x,y) = x^2y^2(x^2+y^2-1)+1$ [12] en est une illustration. En 1900, Hilbert pose alors la question suivante : tout polynôme de $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ positif sur tout $\mathbb{R}^n$ peut-il s'écrire comme somme de carrés de fractions rationnelles ? C'est le 17ème problème de Hilbert. En 1927, E. Artin [2] répond par l'affirmative en n'imposant aucune condition sur la forme des dénominateurs. On peut aussi consulter [4] sur le sujet. Plus récemment, par des méthodes d'analyse fonctionnelle, G. Cassier [6] s'est intéressé à la représentation polynomiale (mais non sous la forme de somme de carrés) de polynômes strictement positifs sur un compact d'intérieur non vide (on peut également consulter [22] pour le cas des compacts semi-algébriques, et [14] pour des idées similaires). La représentation des polynômes strictement positifs sur des compacts semi-algébriques, en somme de carrés de polynômes, a été étudiée par M. Putinar et F.-H. Vasilescu ([13] ou [15]) et aussi par K. Schmüdgen [21]. Dans [16], les auteurs montrent aussi que les polynômes positifs sur des ensembles non bornés de $\mathbb{R}^n$ se décomposent, sous de bonnes conditions, en somme de carrés de fractions rationnelles avec des dénominateurs de la forme $(1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^m$. Il s'agit ici d'une particularisation du résultat d'Artin. La méthode utilisée, basée sur la transformation de Gelfand et Naimark, a permis d'obtenir des décompositions avec d'autres types de dénominateurs [7] ou des résultats analogues dans le cas opératoriel [1]. On peut aussi consulter [8].

Dans cet article, on considère $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable muni d'une base orthonormale $(e_i)_{i\geqslant 1}$. On note $\| * \|$ sa norme hilbertienne. Pour tout élément x de $\mathcal{H}$, on note $(x_i)_{i\geqslant 1}$ ses coordonnées dans la base $(e_i)_{i\geqslant 1}$. On définit aussi des normes de Hölder $\| * \|_j$ sur cet espace, pour tout entier $j = 2^p$,

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad \|x\|_j = \Big(\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^{2j} \Big)^{1/2j} < +\infty.$$

On a donc, pour $p = 0$, $\| * \|_1 = \| * \|$. Le but est d'étudier le cas où les polynômes sont définis sur l'espace $\mathcal{H}$, c'est-à-dire les polynômes en une infinité de variables. On reporte le lecteur à la section 1 pour la définition et les propriétés essentielles. De manière analogue à [16], on cherche des représentations des polynômes positifs P sous formes de carrés de fractions rationnelles ayant des *dénominateurs universels* de la forme

$$(1 + \|x\|_j^{2j})^k, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

On obtient ainsi, sous de bonnes conditions, l'existence d'un entier naturel i tel que l'on ait la décomposition

$$P(x) = \sum_{k=1}^{l} \Big(\frac{Q_k(x)}{(1 + \|x\|_j^{2j})^{m_k}} \Big)^2 + \|S^{*i} x\|_j^{2j} \sum_{k=1}^{u} \Big(\frac{R_k(x)}{(1 + \|x\|_j^{2j})^{n_k}} \Big)^2, \tag{0.1}$$

où m_k et n_k sont des entiers, Q_k et R_k des polynômes sur $\mathcal{H}$ et S^* l'adjoint du shift unilatéral sur $\mathcal{H}$. C'est le théorème 4.3. On peut comparer ce résultat à la décomposition des polynômes positifs en un nombre fini de variables obtenue dans [16]. La méthode employée est d'ailleurs similaire. Elle est explicitée dans la section 2. Comme conséquence, on prouve, en particulier, la densité de l'ensemble des polynômes qui peuvent se décomposer comme dans (0.1) dans l'ensemble des polynômes positifs sur $\mathcal{H}$. On reporte le lecteur à la section 5. Des corollaires sur la décomposition de polynômes positifs sur des ensembles de type semi-algébriques sont également donnés dans la section 6. On précise d'abord la notion de polynômes sur un espace vectoriel.

1. POLYNÔMES SUR UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

On rappelle dans ce paragraphe des outils essentiels pour la suite. Dans tout ce travail, on identifie polynôme et fonction polynomiale. On renvoie à [5] ou [17] pour une étude plus précise. On dit que P est un polynôme homogène de degré n sur $\mathcal{H}$ s'il existe une forme n-linéaire symétrique ϕ sur $\mathcal{H}^n$ telle que l'on ait

$$P(x) = \phi(x, x, \dots, x), \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Dans ces conditions, ϕ est unique et se calcule par

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{x_n} \cdots \Delta_{x_1} P,$$

où l'on a posé, pour $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\Delta_x P(y) = \frac{1}{2}(P(y+x) - P(y-x)).$$

Tout polynôme P s'écrit donc

$$P = P_0 + P_1 + \cdots + P_n,$$

où, pour tout $i = 0, \dots, n$, P_i est un polynôme homogène de degré i et n est le degré de P (que l'on note $\deg(P)$). On note ϕ_i les formes multilinéaires associées à P_i. On a alors les équivalences suivantes.

PROPOSITION 1.1. ([5]) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\phi_0, \dots, \phi_n$ *sont des applications continues;*

(ii) *le polynôme P est une application continue;*

(iii) *P est continue à l'origine;*

(iv) *pour tout $r > 0$, $\|P(x)\|$ est bornée sur la boule $\|x\| \leqslant r$.*

Dans toute la suite, on s'intéresse aux polynômes continus sur $\mathcal{H}$. Tout polynôme $P(x) = \phi(x, \dots, x)$ homogène de degré j se décompose formellement de la manière suivante

$$P(x) = \sum_{I=(i_1,\dots,i_j), i_k \in \mathbb{N}^*} c_I x_I,$$

en notant $x_I = x_{i_1} \cdots x_{i_j}$ et $c_I = \phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_j})$.

LEMME 1.2. *Soit $P(x) = \phi(x, \dots, x)$ un polynôme continu homogène de degré j sur $\mathcal{H}$. Alors on a*

$$\sup_{(i_1,\dots,i_j)} |\phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_j})| < +\infty.$$

Preuve. Il est bien connu [5] qu'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout polynôme homogène $Q(t) = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} q_I t^I$ de degré j en la variable $t \in \mathbb{C}^n$, on ait

$$A^j \sup_{I \in \mathbb{N}^n} |q_I| \leqslant \sup_{|t|=1} |Q(t)|. \tag{1.1}$$

Comme P est continu, on a, d'après la proposition 1.1, $\sup_{\|x\|=1} |P(x)| < +\infty$. Si on suppose $\sup_{(i_1,\dots,i_j)} |\phi(e_{i_1},\dots,e_{i_j})|$ non fini, on peut donc trouver une suite de coefficients $\phi(e_{i_1},\dots,e_{i_j})$ qui tend vers l'infini. Quitte alors à faire des projections sur j variables choisies en fonction des termes de la suite, on obtient alors, en utilisant l'inégalité (1.1), des polynômes homogènes de degré j en j variables qui satisfont, pour tous les coefficients $\phi(e_{i_1},\dots,e_{i_j})$ de la suite extraite, l'inégalité

$$|\phi(e_{i_1},\dots,e_{i_j})| \leqslant A^{-j} \sup_{\|x\|=1} |P(x)|,$$

ce qui donne une contradiction. ∎

2. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

2.1. DÉFINITIONS. (i) On définit $\mathcal{F}_j$ comme le cône positif engendré par les carrés de fractions rationnelles ayant des dénominateurs de la forme $(1 + \|x\|_j^{2j})^k$, $(k \in \mathbb{Z}^+)$. On introduit alors les ensembles $\mathcal{C}_j$ définis de la manière suivante

$$\mathcal{C}_j = \{f(x) + \|x\|_j^{2j} g(x); f, g \in \mathcal{F}_j\}.$$

Il est facile de voir que les ensembles $\mathcal{C}_j$ sont également des cônes positifs. Il faut aussi remarquer que les $\|x\|_j^{2j}$ sont bien des polynômes positifs sur $\mathcal{H}$, mais ils ne peuvent s'écrire comme somme (finie) de carrés de polynômes. On le justifie pour $j = 1$. Sinon, on a la décomposition

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} P_k^2(x), \tag{2.1}$$

où, pour $k = 1, \dots, n$, le terme P_k est, par identification, un polynôme homogène de degré 1. Le polynôme P_k est donc, par définition, une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$. On a donc, pour tout $k = 1, \dots, n$,

$$P_k(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} P_k(e_j) x_j,$$

avec, par dualité, $(P_k(e_j))_{j\geqslant 1}$ élément de $\mathcal{H}$. On en déduit

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P_k^2(e_j) < +\infty.$$

En utilisant la relation (2.1), on a aussi

$$\sum_{k=1}^{n} P_k^2(e_j) = 1,$$

ce qui donne une contradiction (via Fubini) avec l'inégalité précédente.

Cela constitue une différence majeure entre la dimension finie et le cadre hilbertien. Dans le cas d'un nombre fini de variables, $\mathcal{C}_j$ n'est autre que $\mathcal{F}_j$.

(ii) On introduit l'espace $\mathcal{E}$ comme l'ensemble des fractions rationnelles bornées et on pose

$$\mathcal{C}_{j,+} = \mathcal{C}_j \cap \mathcal{E}, \quad \mathcal{F}_{j,+} = \mathcal{F}_j \cap \mathcal{E},$$

et $\mathcal{E}_+$ comme étant la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par les éléments de $(\mathcal{F}_{j,+} - \mathcal{F}_{j,+})$. Dans toute la suite, on impose $x_0 = 1$. On note $\underline{i}$ tout multi-indice $(i_1, \ldots, i_{2j})$ de $\mathbb{Z}_+^{2j}$. On note alors $\Psi^{(j)}$ $(\in (\mathcal{C}_{j,+} - \mathcal{C}_{j,+})^{\mathbb{N}^{2j}})$ l'application de l'espace $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^{2j}}$ définie par

$$\Psi^{(j)}(x) = \Big(\frac{x_{i_1} \cdots x_{i_{2j}}}{1 + \|x\|_j^{2j}}\Big)_{i_1,\ldots,i_{2j} \in \mathbb{Z}_+} = (\Psi^{(j)}_{\underline{i}}(x))_{i_1,\ldots,i_{2j} \in \mathbb{Z}_+}.$$

C'est-à-dire, $\mathcal{E}_+$ est la $\mathbb{C}$-algèbre générée par les $(\Psi^{(j)}_{\underline{i}})$.

(iii) On rappelle aussi la transformation due à I.M. Gelfand et M.A. Naimark sur des formes semi-définies positives (voir [11], [10] et [16]).
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre, sur $\mathbb{C}$, de fonctions à valeurs complexes définies sur un espace vectoriel $\mathcal{X}$, vérifiant les propriétés suivantes

$$\begin{cases} 1 \in \mathcal{A}; \\ \text{si } f \in \mathcal{A}, \text{ alors } \overline{f} \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Soit φ une forme linéaire semi-définie positive sur $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$, c'est à dire vérifiant

$$\varphi(f\overline{f}) \geqslant 0, \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Si la forme φ n'est pas identiquement nulle, on a nécessairement $\varphi(1) > 0$ et on peut associer à la paire $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace préhilbertien. Il suffit en effet de poser

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{A} : \varphi(f\overline{f}) = 0\}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathcal{N}$ est un idéal bilatère. Par conséquent, on peut définir le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ qui est un $\mathcal{A}$-module. En fait, on attache à ce quotient $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ un produit scalaire en posant

$$\langle f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N} \rangle_\varphi = \varphi(f\overline{g}), \quad \forall (f,g) \in \mathcal{A}^2.$$

On définit alors $\| * \|_\varphi$ la norme associée au produit scalaire précédent. Pour plus de détails, on peut consulter [9], [10]. Dans toute la suite, on note $\mathcal{H}_\varphi$ le complété de $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. $\mathcal{H}_\varphi$ est donc un espace de Hilbert.

(iv) Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{E}_+$, semi-définie positive. Soit $\mathcal{H}_\varphi$ l'espace de Hilbert associé à φ par la transformation de Gelfand-Naimark. Pour tout multi-indice $\underline{a}$ de $\mathbb{Z}_+^{2j}$, on définit les opérateurs V_j et $T_{\underline{a}}$ de multiplication sur $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$ par, pour tout f de $\mathcal{E}_+$,

$$\begin{aligned} V_j(f+\mathcal{N}) &= \frac{\|x\|_j^{2j}}{1+\|x\|_j^{2j}} f + \mathcal{N}, \\ T_0(f+\mathcal{N}) &= \frac{1}{1+\|x\|_j^{2j}} f + \mathcal{N}, \\ T_{\underline{a}}(f+\mathcal{N}) &= \Psi_{\underline{a}}^{(j)} f + \mathcal{N}. \end{aligned}$$

On remarque que les opérateurs V_j et $T_{\underline{a}}$ sont bien définis. En effet, si $g \in \mathcal{N}$, on a $\|T_{\underline{a}} g\|_\varphi^2 = \langle T_{\underline{a}}^2 g, g\rangle_\varphi \leqslant \|T_{\underline{a}}^2 g\|_\varphi \|g\|_\varphi = 0$, ce qui donne bien $T_{\underline{a}} g = 0$. La justification est identique pour V_j.

Enfin, dans la suite, on confond f et sa classe dans $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$.

2.2. POSITION DU PROBLÈME. Le résultat principal de ce travail est contenu dans le théorème 4.3. Ce théorème donne, pour tout polynôme P continu et strictement positif sur $\mathcal{H}$, vérifiant une condition technique supplémentaire, l'existence d'un entier positif ou nul i, tel que l'on puisse écrire

$$P(x) = \sum_{k=1}^{l} \Big(\frac{Q_k(x)}{(1+\|x\|_j^{2j})^{m_k}} \Big)^2 + \|S^{*i} x\|_j^{2j} \sum_{k=1}^{u} \Big(\frac{R_k(x)}{(1+\|x\|_j^{2j})^{n_k}} \Big)^2,$$

où m_k et n_k sont des entiers, Q_k et R_k des polynômes sur $\mathcal{H}$ et S^* l'adjoint du shift unilatéral sur $\mathcal{H}$. La méthode employée pour la démonstration est tout à fait parallèle à celle de [16]. Elle consiste à plonger l'espace $\mathcal{H}$ dans un espace plus grand via l'application $\Psi^{(j)}$, définie en 2.1 (ii). Les coordonnées du plongement engendrent une algèbre de fonctions rationnelles bornées sur $\mathcal{H}$. Une forme linéaire semi-définie positive φ sur cette algèbre permet d'obtenir un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\varphi$ en complétant le quotient de l'algèbre par le noyau de la forme sesquilinéaire associée à φ. C'est ce qui est décrit en 2.1 (iii). On définit alors les opérateurs de multiplication par les coordonnées du plongement $\Psi^{(j)}$ (voir 2.1 (iv)). La première étape de la démonstration, développée dans la section 3, consiste d'abord à montrer que les opérateurs de multiplication se prolongent à $\mathcal{H}_\varphi$. C'est le lemme 3.3. Ainsi on peut représenter φ par une mesure positive à support dans l'adhérence de l'image de $\Psi^{(j)}$. C'est le théorème 3.4. On aboutit ensuite au résultat principal, dans la section 4, en séparant le cône réel décrit par les éléments ayant une représentation comme dans le théorème et un élément n'appartenant pas à ce cône par une forme linéaire semi-définie positive. Le fait que le support de la mesure est contenu dans la réunion de $\Psi^{(j)}(\mathcal{H})$ et de sa frontière se traduit par le fait qu'il faut imposer plus que la stricte positivité de P sur $\mathcal{H}$. Enfin, le terme correcteur, donné par le shift, qui apparaît ici et pas dans la décomposition des polynômes en un nombre fini de variables de [16] est une conséquence de la différence majeure mise en valeur dans 2.1 (i).

3. REPRÉSENTATION DANS LES CÔNES POSITIFS $\mathcal{C}_{j,+}$

Le lemme suivant donne une description de l'image de $\mathcal{H}$ par $\Psi^{(j)}$.

LEMME 3.1. *L'application* $(\mathcal{C}_{j,+} - \mathcal{C}_{j,+})^{\mathbb{N}^{2j}} \ni \Psi^{(j)} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}^{2j}}$ *est injective. Son image est donnée par*

$$\Psi^{(j)}(\mathcal{H}) = \left\{ z = (z_{\underline{i}})_{\underline{i} \in \mathbb{Z}_+^{2j}} \quad t.q. \quad \begin{cases} z_0 > 0, \sum_{i=0}^{+\infty} z_{i,\dots,i} = 1 \\ z_{a_1,\dots,a_{2j}} z_0^{2j-1} = z_{a_1,0,\dots,0} \cdots z_{0,\dots,0,a_{2j}} \\ z_{a_1,\dots,a_{2j}} = z_{a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(2j)}}, \quad \sigma \in S_{2j} \end{cases} \right\}$$

où S_{2j} est l'ensemble des permutations à $2j$ éléments.

Preuve. Si on suppose $\Psi^{(j)}(x) = \Psi^{(j)}(x')$, l'égalité

$$x_i = \frac{\Psi^{(j)}_{i,0,\dots,0}(x)}{\Psi^{(j)}_{0,\dots,0}(x)} = \frac{\Psi^{(j)}_{i,0,\dots,0}(x')}{\Psi^{(j)}_{0,\dots,0}(x')} = x'_i$$

donne directement l'injectivité. Pour la description de l'ensemble image, soit y avec les propriétés de l'énoncé. On pose $t_i = y_{i,0,\dots,0}/y_0$. Alors, des deux dernières relations, on tire $y_0^{2j} t_i^{2j} = y_{i,\dots,i} y_0^{2j-1}$. Ainsi, à l'aide de l'égalité $\sum_{i=0}^{+\infty} y^2_{i,\dots,i} = 1$, on déduit que t appartient à $\mathcal{H}$ et vérifie

$$y_0 = \frac{1}{1 + \|t\|_j^{2j}}.$$

Par conséquent, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$y_{k,0,\dots,0} = t_k y_0 = \frac{t_k}{1 + \|t\|_j^{2j}}.$$

Enfin, soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_{2j})$ un multi-indice, on a l'écriture suivante

$$y_{a_1,\dots,a_{2j}} = \frac{y_{a_1,0,\dots,0} \cdots y_{0,\dots,0,a_{2j}}}{y_0^{2j-1}} = \frac{t_{a_1} \cdots t_{a_{2j}}}{y_0^{-1}} = \frac{t_{a_1} \cdots t_{a_{2j}}}{1 + \|t\|_j^{2j}},$$

ce qui nous permet de conclure $y \in \Psi^{(j)}(\mathcal{H})$. L'inclusion réciproque est triviale. ∎

LEMME 3.2. *On a les égalités suivantes sur $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$ (en notant* Id *l'application identité)*

$$T_0 + V_j = \mathrm{Id}, \quad \sum_{k,p \geqslant 0} T^2_{k,\dots,k,p,\dots,p} = \mathrm{Id} \quad et \quad \sum_{k \geqslant 1} T_{k,\dots,k} = V_j,$$

où dans le multi-indice $(k, \dots, k, p, \dots, p)$ les entiers k et p apparaissent j fois. De plus, avec les notations de la définition 2.1 (iv), *les opérateurs T_0 et V_j sont positifs sur $\mathcal{H}_\varphi$.*

Preuve. Pour $f \in \mathcal{E}_+$, on a

$$T_0(f) + V_j(f) = \frac{1}{1+\|x\|_j^{2j}} f + \frac{\|x\|_j^{2j}}{1+\|x\|_j^{2j}} f = f,$$

$$\sum_{k,p\geqslant 0} T^2_{k,\dots,k,p\dots,p} f = \sum_{k,p\geqslant 0} \frac{x_k^{2j} x_p^{2j}}{(1+\|x\|_j^{2j})^2} f = f,$$

$$\sum_{k\geqslant 1} T_{k,\dots,k} f = \sum_{k\geqslant 1} \frac{x_k^{2j}}{1+\|x\|_j^{2j}} f = V_j(f).$$

On obtient ainsi les relations annoncées. Pour la positivité, il suffit de remarquer que l'on a

$$\langle T_0 f, f\rangle_\varphi = \varphi(T_0 f\overline{f}) = \varphi\Big(\frac{f\overline{f}}{1+\|x\|_j^{2j}}\Big) = \varphi\Big(\frac{f\overline{f}}{(1+\|x\|_j^{2j})^2}(1+\|x\|_j^{2j})\Big),$$

et que l'élément $\dfrac{f\overline{f}}{(1+\|x\|_j^{2j})^2}(1+\|x\|_j^{2j})$ appartient à $\mathcal{C}_{j,+}$. Son image par φ est donc positive par définition. La démonstration est analogue pour l'application V_j. ∎

LEMME 3.3. *Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{E}_+$, semi-définie positive. Alors les opérateurs de multiplications T_0, V_j et $T_{\underline{a}}$ se prolongent continûment sur $\mathcal{H}_\varphi$ en applications contractantes.*

Preuve. On a, pour $f \in \mathcal{E}_+/\mathcal{N}$

$$\begin{aligned}\|f\|_\varphi^2 = \|(T_0+V_j)f\|_\varphi^2 &= \varphi(((T_0+V_j)f) \times ((T_0+V_j)\overline{f})) \\ &= \|T_0 f\|_\varphi^2 + \|V_j f\|_\varphi^2 + 2\mathrm{Re}(\varphi(T_0 V_j f\overline{f})).\end{aligned}$$

Or, clairement $T_0 V_j f\overline{f} \in \mathcal{C}_{j,+}$. On en déduit que T_0 et V_j sont des contractions sur $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$. On peut donc les prolonger par continuité. On a aussi pour tout entier n, si on note, pour tout entier i, $\widetilde{\underline{i}}$ le multi-indice $(i,\dots,i)$ de $\mathbb{Z}_+^{2j}$,

$$\Big\|\sum_{k=1}^n T_{\widetilde{\underline{k}}} f\Big\|^2 = \sum_{k,l=1}^n \varphi(T_{\widetilde{\underline{k}}} T_{\widetilde{\underline{l}}} f\overline{f}) = u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc positive, croissante et, d'après le lemme 3.2, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \|V_j f\|_\varphi^2$. De plus, en utilisant la forme linéaire φ, on a

$$\forall k = 1,\dots,n, \quad \|T_{\widetilde{\underline{k}}} f\|_\varphi^2 \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^n T_{\widetilde{\underline{k}}} f\Big\|_\varphi^2.$$

On en déduit que, pour tout entier k non nul, $T_{\underline{\widetilde{k}}}$ est une contraction. De même, on montre que pour tout $\underline{a} = (a_1, \dots, a_{2j})$ $T_{\underline{a}}$ est une contraction. On a

$$\begin{aligned}\|T_{\underline{a}} f\|_\varphi^2 &= \varphi\Big(\frac{x_{a_1}^2 \cdots x_{a_{2j}}^2}{(1+\|x\|_j^{2j})^2} f\overline{f}\Big) = \Big\langle \frac{x_{a_1}^2 \cdots x_{a_j}^2}{(1+\|x\|_j^{2j})} f, \frac{x_{a_{j+1}}^2 \cdots x_{a_{2j}}^2}{(1+\|x\|_j^{2j})} f \Big\rangle_\varphi \\ &\leqslant \|T_{a_1,a_1,a_2,a_2,\dots,a_j,a_j} f\|_\varphi \, \|T_{a_{j+1},a_{j+1},\dots,a_{2j},a_{2j}} f\|_\varphi \,.\end{aligned}$$

Soit f un vecteur de $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$ de norme inférieure à 1. On obtient alors (où p désigne toujours l'entier naturel vérifiant $2^p = j$)

$$\begin{aligned}\|T_{\underline{a}} f\|_\varphi^{2j} &= \varphi\Big(\frac{x_{a_1}^2 \cdots x_{a_{2j}}^2}{(1+\|x\|_j^{2j})^2} f\overline{f}\Big)^{2^p} = \Big\langle \frac{x_{a_1}^2 \cdots x_{a_j}^2}{(1+\|x\|_j^{2j})} f, \frac{x_{a_{j+1}}^2 \cdots x_{a_{2j}}^2}{(1+\|x\|_j^{2j})} f \Big\rangle_\varphi^{2^p} \\ &\leqslant \|T_{a_1,a_1,a_2,a_2,\dots,a_j,a_j} f\|_\varphi^{2^p} \|T_{a_{j+1},a_{j+1},\dots,a_{2j},a_{2j}} f\|_\varphi^{2^p} \\ &\leqslant \|T_{a_1,a_1,a_1,a_1,\dots,a_{j/2},a_{j/2},a_{j/2},a_{j/2}} f\|_\varphi^{2^{p-1}} \\ &\qquad \times \|T_{a_{j/2+1},a_{j/2+1},a_{j/2+1},a_{j/2+1},\dots,a_j,a_j,a_j,a_j} f\|_\varphi^{2^{p-1}} \\ &\qquad \times \|T_{a_{j+1},a_{j+1},a_{j+1},a_{j+1},\dots,a_{3j/2},a_{3j/2},a_{3j/2},a_{3j/2}} f\|_\varphi^{2^{p-1}} \\ &\qquad \times \|T_{a_{3j/2+1},a_{3j/2+1},a_{3j/2+1},a_{3j/2+1},\dots,a_{2j},a_{2j},a_{2j},a_{2j}} f\|_\varphi^{2^{p-1}} \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{2j} \|T_{\underline{\widetilde{k}}} f\|_\varphi \leqslant 1.\end{aligned}$$

Et donc pour tout multi-indice $\underline{a}$, $T_{\underline{a}}$ est une contraction. ∎

On peut remarquer que l'hypothèse $j = 2^p$ joue un rôle essentiel dans la preuve du lemme précédent. À l'aide des contractions ainsi trouvées, on donne une représentation des formes linéaires sur $\mathcal{E}_+$ qui sont semi-définies positives. On considère alors P un polynôme défini et continu sur $\mathcal{H}$. Clairement, il existe une fonction $Q_{P,j}$ en $\mathbb{N}^j$ variables vérifiant $Q_{P,j} \circ \Psi^{(j)}(x) = P(x)(1+\|x\|_j^{2j})^{-m}$ (où m est le plus petit multiple de j supérieur à $\deg(P)$).

THÉORÈME 3.4. *Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{E}_+$, semi-définie positive. Il existe deux mesures positives μ et ρ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^{2j}}$ vérifiant l'égalité suivante pour tout polynôme, continu à coefficients complexes, sur $\mathcal{H}$ (où $2mj \geqslant \deg(P)$) :*

$$\varphi(P(x)(1+\|x\|_j^{2j})^{-m}) = \int P(x)(1+\|x\|_j^{2j})^{-m} \mathrm{d}\mu(x) + \int Q_{P,j}(t)\mathrm{d}\rho(t).$$

Preuve. On se place dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\varphi$ associé à la forme linéaire φ sur $\mathcal{E}_+$. Par les lemmes précédents, on sait que les opérateurs $T_{\underline{a}}$ et V_j sont des contractions. Le fait que ces opérateurs soient des opérateurs de multiplication par une fonction réelle permet d'affirmer que les $T_{\underline{a}}$ et V_j sont auto-adjoints. On définit $\mathcal{A}$ comme étant l'adhérence de l'algèbre engendrée par les polynômes en $(T_{\underline{a}}, V_j)$. L'algèbre $\mathcal{A}$ est donc une C^*-algèbre commutative fermée de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$. Il existe alors (voir par exemple [18]) une résolution de l'identité E sur les sous-ensembles boréliens de l'espace idéal maximal (noté Δ) de $\mathcal{A}$ telle que l'on ait

$$\Phi(f) = \int_{\Delta} f \mathrm{d}E, \quad \forall f \in L^{\infty}(E),$$

où Φ est un $*$-isomorphisme isométrique qui prolonge la transformée de Gelfand inverse. Or l'espace Δ peut être identifié à l'espace des caractères sur $\mathcal{A}$ (noté $\Gamma(\mathcal{A})$).

Si $Q_{P,j}$ est une fonction bornée sur E, en utilisant l'égalité $Q_{P,j} \circ \Psi^{(j)}(x) = P(x)(1 + \|x\|_j^{2j})^{-m}$, on peut écrire

$$Q_{P,j} \circ T(\mathbf{1}) = P(x)(1 + \|x\|_j^{2j})^{-m},$$

où T est la famille d'opérateurs $(T_{\underline{a}})_{\underline{a}}$. Alors, on obtient

$$\varphi(P(x)(1 + \|x\|_j^{2j})^{-m}) \quad = \langle Q_{P,j} \circ T(\mathbf{1}), \mathbf{1} \rangle_{\varphi} = \int_{\Gamma(\mathcal{A})} Q_{P,j}(t) \mathrm{d}\langle E(t)\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle.$$

On veut alors appliquer le lemme 3.1. Si $\gamma \in \Gamma(\mathcal{A})$ est un caractère, on utilisera la notation suivante : $\gamma_{\underline{a}} = \gamma(T_{\underline{a}})$. En utilisant le lemme 3.2 combiné avec la commutativité de la famille d'opérateurs étudiés, on voit que si $\gamma_0 > 0$, alors il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que $\gamma(T, V_j) = \Psi^{(j)}(x)$. Dans le cas contraire, on a $\gamma_0 = 0$ puisque l'opérateur $T_{\underline{0}}$ est un opérateur positif. Alors on obtient la représentation voulue

$$\begin{aligned}
\varphi(P(x)(1 + \|x\|_j^{2j})^{-m}) &= \langle Q_{P,j} \circ T(\mathbf{1}), \mathbf{1} \rangle_{\varphi} \\
&= \int_{t \in \Psi^{(j)}(\mathcal{E})} Q_{P,j}(t) \mathrm{d}\langle E(t)\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle + \int_{\gamma \in \Gamma(\mathcal{A}), \gamma_0 = 0} Q_{P,j}(t) \mathrm{d}\langle E(t)\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle \\
&= \int P(x)(1 + \|x\|_j^{2j})^{-m} \mathrm{d}\mu(x) + \int Q_{P,j}(t) \mathrm{d}\rho(t),
\end{aligned}$$

où les mesures μ et ρ sont deux mesures positives définies par

$$\begin{cases} \mu(\tau) = \langle E(\Psi^j(\tau) \cap \{\gamma/\gamma_0 > 0\})\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle, \\ \rho(\sigma) = \langle E(\sigma \cap \{\gamma/\gamma_0 = 0\})\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle. \end{cases}$$

Il reste alors à montrer que $Q_{P,j}$ est effectivement borné sur E. Soit γ un caractère. Si γ vérifie $\gamma_0 > 0$, il existe donc $x \in \mathcal{H}$ tel que $(\gamma(T)) = \Psi^{(j)}(x)$ et donc on a la relation

$$Q_{P,j}(\gamma(T)) = P(x)(1 + \|x\|_j^{2j})^{-m}.$$

Or, par continuité du polynôme P, il existe une constante M telle que l'on ait

$$P(x)(1 + \|x\|_j^{2j})^{-m} \leqslant M$$

et, l'application $Q_{P,j}(\gamma(T)) = P(x)(1 + \|x\|_j^{2j})^{-m}$ est donc bornée. Sinon, par une simple récurrence sur le nombre d'indices non nul, on peut affirmer que $\gamma(T_{\underline{a}})$

est nul dès que l'un des indices est nul. Dans ces conditions, on en déduit que $Q_{P,j}(\gamma(T))$ est égal à la valeur de $\widetilde{Q}_{P,j}(\gamma(T))$ où $\widetilde{Q}$ est la partie homogène de plus haut degré. Ainsi, on obtient la relation

$$Q_{P,j}(\gamma(T)) = \lim_{\|x\|_j \to_d +\infty} P(x)(1 + \|x\|_j^{2j})^{-m} \leqslant M,$$

où la limite est prise suivant une direction d donnée. La fonction $Q_{P,j}$ est donc dans $L^\infty(E)$, ce qui achève la démonstration. ∎

4. DÉCOMPOSITION DES POLYNÔMES POSITIFS

On applique les résultats de la section 3 pour obtenir des décompositions particulières des polynômes (à coefficients réels) continus et positifs sur $\mathcal{H}$.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS 4.1. On note dans la suite S le shift unilatéral sur $\mathcal{H}$ et S^* son adjoint. On définit alors, pour tout entier i, les cônes $\mathcal{C}_j^i$ par

$$\mathcal{C}_j^i = \{f(x) + \|S^{*i}x\|_j^{2j} g(x),\ f, g \in \mathcal{F}_j\}.$$

On a $\mathcal{C}_j^0 = \mathcal{C}_j$ et on remarque que, pour tout entier $i \geqslant 1$, on a l'inclusion $\mathcal{C}_j^{i-1} \subset \mathcal{C}_j^i$. On pose alors

$$\mathcal{C}_{j,+}^i = \mathcal{C}_j^i \cap \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{j,+}^\infty = \bigcup_{i \geqslant 1} \mathcal{C}_{j,+}^i.$$

On peut noter que les inclusions sur les cônes $\mathcal{C}_j^i$ impliquent les inclusions suivantes $\mathcal{C}_{j,+}^{i-1} \subset \mathcal{C}_{j,+}^i$.

LEMME-CLÉ 4.2. *Pour tout entier non nul j, le polynôme constant égal à* **1** *appartient à l'intérieur de* $\mathcal{C}_{j,+}^\infty$.

Preuve. On procède comme dans Lemme 15 de [1]. Il suffit de remarquer que, en posant $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_k)$, $i = \max(i_k) + 1$ et $\xi_{\underline{i},m} = x_{i_1} \cdots x_{i_k} / (1 + \|x\|_j^{2j})^m$, on a l'existence de fractions g_k et h_k de tels que $1 = \xi_{\underline{i},m}^2 + \sum_k g_k^2 + \|S^{*i}x\|_j^{2j} \sum_k h_k^2$. On termine alors exactement comme dans [1]. ∎

On énonce alors un théorème de décomposition des polynômes continus et positifs sur $\mathcal{H}$ relativement à l'ensemble $\mathcal{C}_{j,+}^\infty$.

THÉORÈME 4.3. *Soit P un polynôme, à coefficients réels, défini et continu sur* $\mathcal{H}$. *Si P est strictement positif sur* $\mathcal{H}$ *et s'il existe une fonction associée* $Q_{P,j}$ *qui soit strictement positive sur l'adhérence de* $\Psi^{(j)}(\mathcal{H})$ *privée éventuellement de 0, alors il existe un entier i tel que le polynôme P soit dans le cône* $\mathcal{C}_j^i$.

Preuve. Soit $Q_{P,j}$ une fonction associée à P (c'est à dire $Q_{P,j} \circ \Psi^{(j)}(x) = P(x)(1+\|x\|_j^{2j})^{-m}$), vérifiant les conditions du théorème. On suppose que $P(x)(1+\|x\|_j^{2j})^{-m}$ n'est pas dans un cône convexe $\mathcal{C}_{j,+}^{\infty}$ qui est d'intérieur non vide par le lemme 4.2. En utilisant un résultat de Mazur [3], il existe une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}$ qui sépare ces deux convexes. C'est-à-dire

$$\inf\{\varphi(f); f \in \mathcal{C}_{j,+}^{\infty}\} \geqslant \varphi(P(x)(1+\|x\|_j^{2j})^{-m}).$$

Par construction, si on a $f \in \mathcal{C}_{j,+}^{\infty}$, alors, pour tout entier n, on a aussi nf et f/n dans $\mathcal{C}_{j,+}^{\infty}$. Par passage à la limite, on en déduit $\varphi(P(x)(1+\|x\|_j^{2j})^{-m}) \leqslant 0$ et $\Phi(f) \geqslant 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}_{j,+}^{\infty}$. On prolonge alors φ en une forme linéaire sur $\mathcal{E}_+$. La positivité de la forme linéaire φ sur $\mathcal{C}_{j,+}^{\infty}$ entraine que son extension, que l'on notera toujours φ, est semi-définie positive sur $\mathcal{E}_+$. On peut donc appliquer le théorème 3.4 à φ pour obtenir

$$0 \geqslant \varphi(P(x)(1+\|x\|_j^{2j})^{-m}) = \int P(x)(1+\|x\|_j^{2j})^{-m}\mathrm{d}\mu(x) + \int Q_{P,j}(t)\mathrm{d}\rho(t).$$

Or, par construction, les deux mesures positives ne peuvent avoir un support vide simultanément. De plus les fonctions intégrées sont strictement positives sur ces supports respectifs. Donc, on obtient l'inégalité stricte

$$\int P(x)(1+\|x\|_j^{2j})^{-m}\mathrm{d}\mu(x) + \int Q_{P,j}(t)\mathrm{d}\rho(t) > 0,$$

qui donne une contradiction. Donc $P(x)(1+\|x\|_j^{2j})^{-m}$ est, en particulier, dans $\mathcal{C}_{j,+}^{i}$, pour un certain entier i. On en déduit aisément que P est un élément du cône positif $\mathcal{C}_j^i$. ∎

REMARQUES 4.4. (i) Le théorème 4.3 donne donc, pour tout polynôme P, vérifiant de bonnes conditions, continu et strictement positif sur $\mathcal{H}$, l'existence d'un entier positif ou nul i, tel que l'on puisse écrire

$$P(x) = \sum_{k=1}^{l}\Big(\frac{Q_k(x)}{(1+\|x\|_j^{2j})^{m_k}}\Big)^2 + \|S^{*i}x\|_j^{2j}\sum_{k=1}^{u}\Big(\frac{R_k(x)}{(1+\|x\|_j^{2j})^{n_k}}\Big)^2,$$

où m_k et n_k sont des entiers, Q_k et R_k des polynômes sur $\mathcal{H}$. Dans la section suivante, on montre que l'ensemble des polynômes continus et positifs ayant une telle décomposition est dense dans l'ensemble des polynômes continus et positifs.

(ii) Contrairement au cas d'un nombre fini de variables [16], on ne contrôle pas le degré des dénominateurs des fractions rationnelles qui apparaissent dans la décomposition.

(iii) Le théorème précédent est un analogue du théorème 4.2 de [16] dans le cas d'un espace de Hilbert. Les conditions de décomposition sont comparables. On remarque simplement l'existence de termes correcteurs faisant apparaître l'expression $\|x\|^2$. Cela provient essentiellement du fait que les termes du type $\|x\|^2$ ne sont plus des sommes de carrés de polynômes (on peut se reporter aux sections 1 et 2).

5. APPLICATIONS

Dans cette section, on donne quelques conséquences du théorème 4.3. On commence par un lemme qui permet de contrôler le support des mesures positives qui apparaissent dans le théorème 3.4.

PROPOSITION 5.1. *Soit Φ une forme linéaire sur $\mathcal{E}_+$, semi-définie positive. On suppose qu'il existe un polynôme (à coefficients réels) R et une fonction associée $Q_{R,j}$ vérifiant*

$$\begin{cases} Q_{R,j} \circ \Psi^{(j)}(x) = R(x)(1 + \|x\|_j^{2j})^{-l}, \\ \Phi\Big(\dfrac{Rf\overline{f}}{(1 + \|x\|_j^{2j})^l}\Big) \geqslant 0, \quad f \in \mathcal{E}_+ . \end{cases}$$

Alors le support des mesures positives μ et ρ vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(\mu) \subset R^{-1}(\mathbb{R}^+), \\ \operatorname{supp}(\rho) \subset Q_{R,j}^{-1}(\mathbb{R}^+) - \{0\}, \end{cases}$$

Preuve. Si $\Phi(Rf\overline{f}(1 + \|x\|_j^{2j})^{-l}) \geqslant 0$ on obtient l'inégalité suivante

$$\langle Q_{R,j}(T)f, f\rangle_\Phi = \langle Q_{R,j} \circ \Psi^{(j)}(\mathbf{1})f, f\rangle_\Phi = \Phi(Rf\overline{f}(1 + \|x\|_j^{2j})^{-l}) \geqslant 0.$$

Donc l'opérateur $Q_{R,j}(T)$ est positif dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\Phi$. En utilisant les propriétés de multiplicativité et de linéarité des caractères, on a, pour tout $\gamma \in \Gamma(\mathcal{A})$,

$$\gamma(Q_{R,j}(T)) = Q_{R,j}(\gamma(T)) \geqslant 0.$$

Ceci signifie exactement que $\gamma(T)$ est dans $Q_{R,j}^{-1}(\mathbb{R}^+)$. On obtient ainsi les inclusions annoncées pour les supports (en décomposant, à nouveau, $\Gamma(\mathcal{A}) = \{\gamma/\gamma_0 = 0\} \cup \{\gamma/\gamma_0 > 0\}$). ∎

On peut donner quelques exemples de polynômes vérifiant les hypothèses des théorèmes précédents.

PROPOSITION 5.2. *Soit P un polynôme (à coefficients réels) défini et continu sur $\mathcal{H}$. Si $P = U + V$ est strictement positif $\mathcal{H}$ et s'il vérifie*

$$\begin{aligned} &\deg(U) > \deg(V), \\ &Q_{U,j}(t) > 0, \quad \forall t \in \overline{\Psi^{(j)}(\mathcal{H})} - \{0\}, \end{aligned}$$

alors il existe un entier i tel que le polynôme P soit dans le cône $\mathcal{C}_j^i$.

Preuve. Il suffit de reprendre les preuves des deux théorèmes principaux de la section précédente en remarquant que la condition $\deg(U) > \deg(V)$ affirme que, pour tout caractère γ vérifiant $\gamma_0 = 0$, on a

$$Q_{P,j}(\gamma(T)) = Q_{U,j}(\gamma(T)) > 0.$$

En effet, cela est une conséquence du fait suivant : si $\gamma_0 = 0$, on a $\gamma_{\underline{a}} = 0$ dès qu'il y a un zéro dans $\underline{a}$. ∎

Cette dernière proposition peut se traduire par : pour un polynôme strictement positif, s'il existe une partie dominante ayant une fonction associée qui est strictement positive sur $\overline{\Psi^{(j)}(\mathcal{H})} - \{0\}$, le polynôme est dans le cône $\mathcal{C}_j^\infty$. On donne ci-dessous quelques exemples pour lesquels cette propriété est vérifiée.

EXEMPLES 5.3. On se place dans le cas où $j = 1$. On peut donner sans aucune difficulté des exemples du même type pour toute valeur de $j = 2^p$.
(a) Soit P un polynôme défini, continu et strictement positif sur $\mathcal{H}$, de degré n. Alors pour tout réel strictement positif ε, on pose

$$P_\varepsilon(x) = \varepsilon\|x\|^{2n} + P(x), \quad x \in \mathcal{H}.$$

Le polynôme P_ε est dans $\mathcal{C}_1^\infty$. En effet, P_ε est strictement positif sur $\mathcal{H}$. Il suffit donc de montrer qu'il existe une fonction associée $Q_{P_\varepsilon,1}$ strictement positive sur $\Gamma(\mathcal{A})$. Si $\gamma_0 > 0$, il n'y a aucun problème puisque on est dans $\Psi^{(j)}(\mathcal{H})$. Sinon, on obtient, en utilisant la méthode donnée dans la partie précédente, une fonction $Q_{P_\varepsilon,1}$

$$Q_{P_\varepsilon,1}(\gamma(T)) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \varepsilon\gamma_{i_1,i_1}\cdots\gamma_{i_n,i_n} = \varepsilon\Big(\sum_{i>0}\gamma_{i,i}\Big)^n > 0.$$

En effet, tous les $\gamma_{i,i}$ sont positifs car les $T_{i,i}$ sont des opérateurs positifs. De plus, comme $\gamma_0 = 0$, on a $\sum_{i>0} \gamma_{i,i} = 1$ (c'est une conséquence directe du lemme 3.2).
(b) On considère les polynômes de la forme

$$S_\varepsilon(x) = \sum_k \varepsilon_k x_k^{2m} + P(x)$$

où P est un polynôme défini, continu et strictement positif sur $\mathcal{H}$ et où la suite $(\varepsilon_k)_k$ vérifie

$$\inf_k(\varepsilon_k) \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \sup_k(\varepsilon_k) \in \mathbb{R}_+^*.$$

De la même manière que précédemment, on montre que tous ces polynômes sont dans un cône positif $\mathcal{C}_1^i$.

Les exemples construits permettent aussi d'obtenir des résultats de densité. On précise d'abord quelques notations. Par le lemme 1.2, on sait que si P est un polynôme continu sur $\mathcal{H}$, tous ses coefficients sont bornés. On peut donc normer l'espace des polynômes continus sur $\mathcal{H}$ en posant

$$|||P||| = \sup_\alpha \|c_\alpha\|,$$

si $(c_\alpha)_\alpha$ représente la suite des coefficients de P.

THÉORÈME 5.4. *Soit N une norme sur l'ensemble des polynômes continus sur $\mathcal{H}$ moins fine que la norme $|||\cdot|||$. Alors l'ensemble des polynômes continus sur $\mathcal{H}$ qui sont dans $\mathcal{C}_j^\infty$ est dense dans l'ensemble des polynômes continus non négatifs sur $\mathcal{H}$.*

Preuve. Soit P un polynôme continu non négatif sur $\mathcal{H}$. Pour obtenir le résultat, il suffit de perturber le polynôme P par un élément de la forme $\varepsilon(1+\|x\|^2)^n$, avec $n > \deg(P)$, et appliquer alors la méthode de (i) de l'exemple 5.3. ∎

REMARQUE 5.5. On peut remarquer que de tels résultats de densité ont également été obtenus par M.A. Dritschel [8] pour des carrés de fractions avec d'autres dénominateurs dans le cadre d'un nombre fini de variables. On généralise donc ici au cadre hilbertien ce qui est connu dans la dimension finie.

6. POSITIVITÉ ET ENSEMBLES SEMI-ALGÉBRIQUES

Dans cette section, on donne quelques généralisations, à des ensembles de type semi-algébriques, des résultats de la section 4. Les démonstrations se transposent aisément dans ce cadre. On dit qu'un ensemble F est *de type semi-algébrique* s'il existe une famille finie $P_1, \ldots, P_m$ de polynômes, continus sur $\mathcal{H}$, telle que

$$F = \bigcap_{k=1}^{m} P_k^{-1}(\mathbb{R}^+).$$

On définit les cônes $\mathcal{G}_j$ par les relations suivantes

$$\mathcal{G}_j^i = \mathcal{C}_j^i + P_1\mathcal{C}_j^i + \cdots + P_m\mathcal{C}_j^i.$$

THÉORÈME 6.1. *On se donne m polynômes réels $P_1, \ldots, P_m$, continus et de degré multiple de $2j$, définissant un ensemble de type semi-algébrique F. Soit aussi P un polynôme (à coefficients réels) défini et continu sur $\mathcal{H}$ de degré multiple de $2j$. Si P est strictement positif sur F et s'il existe des fonctions $Q_{P,j}, Q_{P_1,j}, \ldots, Q_{P_m,j}$, associées à $P, P_1, \ldots, P_m$, vérifiant les conditions suivantes*

$$Q_{P,j}(t) > 0 \quad \forall t \in \Big(\bigcap_k Q_{P_k,j}^{-1}(\mathbb{R}^+)\Big) \bigcap \big(\overline{\Psi^{(j)}(\mathcal{H})} \setminus \{\Psi^{(j)}(\mathcal{H}); 0\}\big),$$

alors il existe un entier i tel que le polynôme P soit dans le cône $\mathcal{G}_j^i$.

Preuve. On remplace les cônes $\mathcal{C}_j^i$ par $\mathcal{G}_j^i$. La condition supplémentaire est nécessaire pour être certain qu'il existe des polynômes P avec la condition sur $Q_{P,j}$ qui soit vérifiée. ∎

Si on ne demande aucune condition sur les degrés, on peut donner des représentations mais avec des fractions dont les dénominateurs sont du type

$(1+\|x\|_j^{2j})^{m/2j}$, avec m entier. On note $Y^{(j)}$ l'application de l'espace $\mathcal{H}$ dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$Y^{(j)}(x) = \Big(\frac{x_k}{(1+\|x\|_j^{2j})^{1/2j}}\Big)_{k\in\mathbb{Z}_+} = (Y_k^{(j)}(x))_{k\in\mathbb{Z}_+}.$$

On note $\sqrt{\mathcal{C}_j^i}$ le cône positif engendré par les carrés de fractions avec des dénominateurs de la forme $(1+\|x\|_j^{2j})^{m/2j}$ et des numérateurs de la forme $R(x,(1+\|x\|_j^{2j})^{1/2j})$ (R étant un polynôme) ainsi que par $\|S^{*i}x\|_j^{2j}$.

Si on note les U_k les opérateurs multiplications par la fraction $Y_k^{(j)}$, il existe toujours une fonction associée $Q'_{P,j}$ vérifiant l'égalité suivante

$$\frac{P(x)}{(1+\|x\|_j^{2j})^{\deg(P)/2j}} = Q'_{P,j}\circ Y^{(j)}(x) = Q'_{P,j}(U)(\mathbf{1}).$$

On définit les cônes $\sqrt{\mathcal{G}_j^i}$ par les relations suivantes

$$\sqrt{\mathcal{G}_j^i} = \sqrt{\mathcal{C}_j^i} + P_1\sqrt{\mathcal{C}_j^i} + \cdots + P_m\sqrt{\mathcal{C}_j^i}.$$

Alors on peut énoncer le théorème suivant

THÉORÈME 6.2. *Soient m polynômes $P_1,\ldots,P_m$, (continus, à coefficients réels) définissant un ensemble de type semi-algébrique F. Soit P un polynôme défini et continu (à coefficients réels) sur $\mathcal{H}$ de degré arbitraire. Si P est strictement positif sur F et s'il existe des fonctions, associées à P, $P_1,\ldots,P_m$, $Q'_{P,j}, Q'_{P_1,j},\ldots,Q'_{P_m,j}$ (à coefficients réels) vérifiant la condition suivante*

$$Q'_{P,j}(t) > 0, \quad \forall t \in \Big(\bigcap_k Q'^{-1}_{P_k,j}(\mathbb{R}^+)\Big)\bigcap\big(\overline{Y^{(j)}(\mathcal{H})}\setminus\{Y^{(j)}(\mathcal{H});0\}\big),$$

alors le polynôme P est dans le cône $\sqrt{\mathcal{G}_j^i}$ pour un entier i.

REMARQUES 6.3. (i) Si on se place dans le cadre d'un nombre fini de variables $x_1,\ldots,x_m$ et si on pose $j=1$, on retrouve des résultats analogues aux théorèmes 4.2 et 4.5 de M. Putinar et F.-H. Vasilescu [16].

(ii) Sans aucune difficulté, on peut énoncer l'analogue de la proposition 5.2 dans ce cadre. De plus, il est facile de donner des exemples simples où ces résultats s'appliquent, en procédant comme dans 5.3. Grâce à une perturbation des polynômes positifs par des éléments de la forme $\|x\|_j^{\deg(P)+1}$ ou $(1+\|x\|_j^{2j})^{(\deg(P)+1)/2j}$ on peut même obtenir la densité du cône $\bigcup_i\sqrt{\mathcal{G}_j^i}$ dans l'ensemble des polynômes positifs sur l'ensemble de type semi-algébrique F.

(iii) Bien évidemment ce qui est valable pour un fermé de type semi-algébrique reste valable pour un fermé quelconque à la condition de prendre une famille dénombrable de polynômes plutôt que d'en prendre une famille finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.-G. AMBROZIE, F.-H. VASILESCU, Operator theoretic Positivstellensätze, *Z. Anal. Anwendungen* **22**(2003), 299–314.

[2] E. ARTIN, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, *Hamb. Abh.* **5**(1927), 100–115.

[3] V. BARBU, TH. PRECUPANU, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, D. Reidel Publ. Comp. (KAP), Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest, Dordrecht-Boston-Lancaster 1986.

[4] J. BOCHNAK, M. COSTE, M.-F. ROY, *Géométrie algébrique réelle*, Springer-Verlag, New York 1987.

[5] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, Herrmann, Paris 1967.

[6] G. CASSIER, Problème des moments sur un compact de $\mathbb{R}^n$ et décomposition de polynômes à plusieurs variables, *J. Funct. Anal.* **58**(1984), 254–266.

[7] O. DEMANZE, Moments and positivity, *J. Math. Anal. Appl.* **247**(2000), 570–587.

[8] M.A. DRITSCHEL, On factorization of trigonometric polynomials, *Integral Equations Operator Theory*, to appear.

[9] N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ, *Linear Operators, Part* II, Interscience, New York-London-Sydney 1963.

[10] B. FUGLEDE, The multidimensional moment problem, *Exposition. Math.* **1**(1983), 47–65.

[11] I.M. GELFAND, M.A. NAIMARK, On imbedding of a normed ring into the ring of operators in a Hilbert space [Russian], *Mat. Sb.* **12**(54)(1943), 197–213.

[12] T.S. MOTZKIN, The real solution set of a system of algebraic inequalities is the projection of a hypersurface in one more dimension, dans *Inequalities*. II, Academic Press, New York 1970, pp. 251–254.

[13] M. PUTINAR, Positive polynomials on compact semi-algebraic sets, *Indiana Math. J.* **42**(1993), 969–984.

[14] M. PUTINAR, F.-H. VASILESCU, Problème de moments sur les compacts semi-algèbriques, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323**(1996), 787–791.

[15] M. PUTINAR, F.-H. VASILESCU, Positive polynomials on semi-algebraic sets, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328**(1999), 585–589.

[16] M. PUTINAR, F.-H. VASILESCU, Solving moment problems by dimensional extension, *Ann. of Math.* **149**(1999), 1087–1107.

[17] J.P. RAMIS, *Sous-ensembles analytiques d'une variété analytique Banachique*, Springer Verlag, Berlin-New-York 1970.

[18] W. RUDIN, *Analyse fonctionnelle*, 2ème édition, Ediscience International, Paris 1965.

[19] R.M. ROBINSON, Some definite polynomials which are not sums of squares of real polynomials, in *Selected Questions of Algebra and Logic (Collection dedicated to the memory of A.I. Mal'cev)* [Russian], Izdat. "Nauka" Sibirsk. Otdel., Novosibirsk 1973, pp. 264–282.

[20] K. SCHMÜDGEN, An example of a positive polynomial which is not a sum of squares of polynomials. A positive, but not strongly positive functional, *Math. Nachr.* **88**(1979), 385–390.

[21] K. SCHMÜDGEN, The K-moment problem for semi-algebraic sets, *Math. Ann.* **289**(1991), 203–205.

[22] F.-H. VASILESCU, Moment Problems for multi-sequences of operators, *J. Math. Anal. Appl.* **219**(1998), 246–259.

O. DEMANZE, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES, UMR 8524, UNIVERSITÉ LILLE 1, VILLENEUVE D'ASCQ, 59650, FRANCE
E-mail address: Olivier.Demanze@math.univ-lille1.fr

A. MOUZE, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES, UMR 8524, ÉCOLE CENTRALE DE LILLE, VILLENEUVE D'ASCQ, 59650, FRANCE
E-mail address: Augustin.Mouze@math.univ-lille1.fr

Received December 3, 2004.