J. OPERATOR THEORY
72:1(2014), 241–256
doi: 10.7900/jot.2012dec19.1987

CLASSE DE DIXMIER D'OPÉRATEURS DE HANKEL

ROMARIC TYTGAT

Communicated by Nikolai K. Nikolski

RÉSUMÉ. Soit s une suite de moments de Stieljes ne s'annulant pas et soit μ la mesure qui la représente. On note μ_1 la mesure image sur $\mathbb{C}$ de $\mu \otimes \sigma$ par l'application $(t, \xi) \mapsto \sqrt{t}\xi$, où σ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité et nous nous intéressons aux opérateurs de Hankel, de symbole anti-holomorphe, associés. Nous caractérisons les espaces de Dixmier et nous donnons une formule de la trace de Dixmier pour $\mathrm{d}\mu = \mathrm{e}^{-\Psi(x)}\mathrm{d}x$. Enfin, nous regardons les exemples $\Psi(x) = \mathrm{e}^{x^j}$, $j > 0$ ou $\Psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$.

ABSTRACT. Let s be a non-vanishing Stieltjes moment sequence and let μ be a representing measure of it. We denote by μ_1 the image measure in $\mathbb{C}$ of $\mu \otimes \sigma$ under the map $(t, \xi) \mapsto \sqrt{t}\xi$, when σ is the rotation invariant probability measure on the unit sphere and we study Hankel operator with anti-holomorphic symbol. We characterize the Dixmier space and compute the Dixmier trace for $\mathrm{d}\mu = \mathrm{e}^{-\Psi(x)}\mathrm{d}x$. We study the examples $\Psi(x) = \mathrm{e}^{x^j}$, $j > 0$ or $\Psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$.

KEYWORDS: *Dixmier trace, Hankel operators.*

MSC (2010): Primary 47B35 ; Secondary 30H20, 47B10.

1. INTRODUCTION

Les propriétés spectrale des opérateurs de Hankel sont traités dans [1] et [2] pour les espaces de Bergman et dans l'ouvrage de [12] pour l'espace de Hardy. On pourra aussi consulter le livre de Zhu [16] et les références qu'il contient. Les auteurs de [15] s'intéressent eux au cas de certains espaces de Fock. L'étude de leur trace de Dixmier est plus récente, même si le premier résultat dans ce sens se trouve dans [1], où il est montré que l'espace de Besov $\mathcal{B}^1$ est inclus dans l'espace de Dixmier $\mathcal{D}^1$. C'est une dizaine d'années plus tard que l'espace de Dixmier a été caractérisé par Li et Russo [10] dans le cas du petit opérateur de Hankel. Il a encore fallu attentre plus de dix ans pour connaître l'expression de la trace de Dixmier du grand opérateur de Hankel sur l'espace de Bergman de la boule unité de $\mathbb{C}^d, d > 1$. Ce dernier résultat a été obtenu par Englis, Guo et Zhang [7].

Le cas $d = 1$ a dû être traité de façon différente, c'est dans les travaux de Englis et Rochberg [8] que l'espace et la trace de Dixmier ont été exhibés. Les auteurs arrivent à se ramener, par une transformation unitaire, à un opérateur pseudo-différentiel, et utilisent le résultat de Wodzicki. Notre approche est différente et rejoint celle de [10].

Nous rappelons qu'une suite $s = (s_d), d \in \mathbb{N}$, est une suite de moments de Stieljes si elle est de la forme

$$s_d = \int_0^{+\infty} t^d \mathrm{d}\mu(t)$$

où μ est une mesure positive sur $[0; +\infty[$. On dit que μ représente s. Notons D_s le disque de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon $R_s := \lim\limits_{d \to +\infty} \sqrt{\frac{s_{d+1}}{s_d}} = \lim\limits_{d \to +\infty} \sqrt{s_d^{1/d}}$. Quand $R_s < +\infty$, on dit que la suite s est exponentiellement bornée. Soit $\mathcal{A}^2(s)$ l'espace de Hilbert de fonctions $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ holomorphes sur D_s vérifiant

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n |a_n|^2 < +\infty$$

équipé du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n a_n \bar{b}_n$$

si $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $g(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ sont deux éléments de $\mathcal{A}^2(s)$. Soit μ_1 la mesure image sur $\mathbb{C}$ de $\mu \otimes \sigma$ par l'application $(t, \xi) \mapsto \sqrt{t}\xi$, ou σ est la mesure de Lebesgue normalisée sur cercle unité. Les auteurs de [4] ont montré que $\mathcal{A}^2(s)$ coïncide avec l'adhérence des polynômes holomorphes de $L^2(\mu_1)$ et a comme noyau reproduisant

$$K_s(z, w) = \sum_{d \in \mathbb{N}} \frac{\langle z, w \rangle^d}{s_d} \quad z, w \in D_s.$$

On considère la projection orthogonale P_s associée à $\mathcal{A}^2(s)$ donnée pour $g \in L^2(\mu_1)$ par

$$(P_s g)(z) = \int_{\overline{D}_s} K_s(z, w) g(w) \mathrm{d}\mu_1 \quad z \in D_s.$$

On peut l'étendre de façon naturelle aux fonctions g qui satisfont $K_s(z, \cdot) g \in L^1(\mu_1)$ pour tout $z \in D_s$. Cette extension permet de définir les opérateurs de Hankel. Notons $\tau(s)$ la classe des fonctions f de $\mathcal{A}^2(s)$ vérifiant pour tout polynôme holomorphe φ et tout $z \in D_s$:

$$f \varphi K_s(z, \cdot) \in L^1(\mu_1) \quad \text{et} \quad z \mapsto \int_{\overline{D}_s} K_s(z, w) \varphi(w) [\overline{f}(z) - \overline{f}(w)] \mathrm{d}\mu_1(w) \in L^2(\mu_1).$$

On pose alors pour $f \in \tau(s)$

$$H_{\overline{f}}(\varphi)(z) := \int_{D_s} K_s(z,w)\varphi(w)[\overline{f}(z) - \overline{f}(w)]\mathrm{d}\mu_1(w) \quad z \in D_s.$$

Cet opérateur est défini sur un sous espace dense de $\mathcal{A}^2(s)$ à valeurs dans $L^2(\mu_1)$, il est appelé opérateur de Hankel $H_{\overline{f}}$ de symbole $\overline{f}$. Il peut être écrit sous la forme

$$H_{\overline{f}}(\varphi) = (I - P_s)(\overline{f}\varphi)$$

pour tout polynôme holomorphe φ et tout $f \in \tau(s)$.

Comme dans [15], le contexte est le suivant. Ψ est une fonction de classe C^3 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\Psi(x) \geqslant 0, \quad \Psi'(x) > 0, \quad \Psi''(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Psi'''(x) \geqslant 0 \tag{1.1}$$

et

$$\mathrm{d}\mu_1 = \mathrm{e}^{-\Psi(|z|^2)}\mathrm{d}z$$

où dz est la mesure de Lebesgue. Les moments sont de la forme

$$s_d = \int_0^\infty t^d \mathrm{e}^{-\Psi(t)}\mathrm{d}t$$

et comme il est dit dans [15], $R_s = +\infty$.

On note alors respectivement $\mathrm{d}\mu_\Psi$, $\mathcal{A}^2(\Psi)$ et K_Ψ plutôt que $\mathrm{d}\mu_1$, $\mathcal{A}^2(s)$ et K_s.

La fonction

$$\Phi(x) := x\Psi'(x)$$

prend une place importante dans notre étude. Comme dans [15], nous considérons la condition : il existe $\eta < \frac{1}{2}$ vérifiant

$$\Phi''(x) = O(x^{-1/2}\Phi'(x)^{1+\eta}) \quad x \to \infty. \tag{1.2}$$

Par exemple, si P est un monôme, $\Psi(x) = \mathrm{e}^{P(x)}$ vérifie (1.1) et (1.2).

Rappelons aussi que la transformation de Berezin d'un opérateur T sur $\mathcal{A}^2(\Psi)$ est la fonction $\widetilde{T}$ définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\widetilde{T}(z) = \frac{\langle TK_\Psi(\cdot,z), K_\Psi(\cdot,z)\rangle}{K_\Psi(z,z)}.$$

Si $T = M_f$ la multiplication par f, nous notons $\widetilde{T} = \widetilde{f}$. On pose alors

$$(MOf)(z) = \sqrt{\widetilde{|f|}^2(z) - |\widetilde{f}(z)|^2}.$$

L'espace de Besov $\mathcal{B}_m^p$, est l'ensemble des fonctions entières, vérifiant :

$$\|f\|_{\mathcal{B}_m^p} := \Big(\int_{\mathbb{C}} [MOf(z)]^p K_\Psi(z,z)\mathrm{d}\mu_\Psi\Big)^{1/p} < \infty.$$

Une autre façon de définir l'espace de Besov $\mathcal{B}_d^p$ est de demander

$$\|f\|_{\mathcal{B}_d^p} := \Big(\int_{\mathbb{C}} |f'(z)|_\beta^p K_\Psi(z,z) \mathrm{d}\mu_\Psi \Big)^{1/p} < \infty$$

où

$$|f'(z)|_\beta = \sup_{\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \frac{|\langle f'(z), \overline{\xi} \rangle|}{\beta(z,\xi)}$$

et β la métrique de Bergman associée à Ψ qui est définie comme suit :

$$\beta^2(z,\xi) := \frac{\partial^2 \Lambda_\Psi(z)}{\partial z \partial \overline{z}} \xi \overline{\xi}$$

avec $z \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{C}$ et $\Lambda_\Psi(z) = \log K_\Psi(z,z)$.

Ces deux définitions proviennent de [15] et par le théorème F de ce même papier nous savons que ces deux espaces coïncident dans notre contexte. Nous parlerons donc de l'espace de Besov et nous le noterons $\mathcal{B}^p$. Nous pouvons aussi remarquer que les normes $\|f\|_{\mathcal{B}_d^p}$, $\|f\|_{\mathcal{B}_m^p}$ et $\|H_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^p}$ sont uniformément équivalentes dans le sens où il existe une constante $c > 0$ vérfiant pour tout $p > 2$:

$$c^{-1}\|f\|_{\mathcal{B}_m^p} \leqslant \|H_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^p} \leqslant c\|f\|_{\mathcal{B}_m^p} \quad \text{et} \quad c^{-1}\|f\|_{\mathcal{B}_d^p} \leqslant \|H_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^p} \leqslant c\|f\|_{\mathcal{B}_d^p}.$$

En effet, reprennons la preuve de ce théorème F. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de l'inégalité de Hölder et ne pose pas de soucis, tandis que (ii) $\Rightarrow$ (iii) provient du lemme 2.1 de ce même papier, et là aussi ne pose pas de soucis. La dépendance en p dans les inégalités de (iii) $\Rightarrow$ (i) se contrôle de la même manière, il reste donc à s'intéresser au théorème E. Ce dernier est prouvé par interpolation avec les mêmes arguments. Il faut alors remarquer que la norme interpolée entre deux classes de Schatten n'est pas seulement équivalente à la norme usuelle des classes de Schatten mais égale. Ainsi, à chaque étape de la preuve les constantes dans les inégalités peuvent être controlées par une constante absolue indépendantes de p. A partir de là, on introduit la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^p}$ sur l'espace de Besov :

$$\|f\|_{\mathcal{B}^p} := \|H_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Rappelons enfin, que la p-ième classe de Schatten $\mathcal{S}^p$ pour $0 < p \leqslant \infty$ est le sous espace des opérateurs compacts T vérifiant $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N})$ où $(s_n(T))_n$ est la suite des valeurs singulières rangée par ordre décroissant. Voir par exemple [11].

On note $\mathcal{S}_1^+$ l'idéal des opérateurs compacts T vérifiant :

$$\sup_{N\geqslant 2} \Big\{ \frac{1}{\ln N} \sigma_N(T) \Big\} < \infty$$

où

$$\sigma_N(T) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k(T)$$

et pour $T \in \mathcal{S}_+^1$, on note $\mathrm{Tr}_\omega(T)$ sa trace de Dixmier.

Moralement $\mathrm{Tr}_\omega(T) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\ln N}\sigma_N(T)$. Choisissons un forme linéaire positive ω sur $l^\infty(\mathbb{N})$ et notons sa valeur en $a = (a_0, a_1, \dots)$ par $\lim_\omega(a_n)$. On demande, lorsqu'elle existe, que $\lim_\omega(a_n) = \lim a_n$. On demande aussi que ω soit invariante par 2-dilatation, propriété technique fondamentale pour la théorie, mais qui ne nous concerne pas ici. Pour un opérateur positif T dans $\mathcal{S}^1_+$ on définit sa trace de Dixmier $\mathrm{Tr}_\omega(T)$ par

$$\lim_\omega \Big(\frac{\sigma_N(T)}{\ln(N)}\Big).$$

$\mathrm{Tr}_\omega(\cdot)$ s'étend à $\mathcal{S}^1_+$ par linéarité. La définition de la trace de Dixmier dépend de ω et nous dirons que T est mesurable si $\mathrm{Tr}_\omega(T)$ est indépendant de ω. Nous en verrons des exemples. On renvoie à [5], [6] et [13] pour plus de détails. La trace de Dixmier est une forme linéaire continue si nous équipons $\mathcal{S}^1_+$ de la norme complète :

$$\|T\|_{\mathcal{S}_1^+} = \sup_{N\geqslant 2} \frac{1}{\ln N}\sum_{k=0}^{N-1} s_k(T).$$

On définit alors les espaces de Dixmier $\mathcal{D}^p$ comme ceci :

$$\mathcal{D}^p = \{f \in \tau(s) : |H_{\overline{f}}|^p \in \mathcal{S}_1^+\}$$

avec

$$\|f\|_{\mathcal{D}^p} = \||H_{\overline{f}}|^p\|^{1/p}_{\mathcal{S}_1^+}.$$

De façon équivalente,

$$f \in \mathcal{D}^p \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{N} s_n(H_{\overline{f}})^p = O(\ln(N)).$$

Supposons que l'on soit dans l'un des deux cas suivant :

$$R_s < +\infty; \quad R_s = +\infty \quad \text{et} \quad \forall P \in \mathcal{P}, z \in \mathbb{C} \quad \|H_{\overline{P}}K_s(\cdot, z)\| < \infty.$$

Alors, si $p \geqslant 1$, $\mathcal{D}^p$ est un espace vectoriel complet pour la semie norme $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^p}$, tandis que si $0 < p < 1$, $\mathcal{D}^p$ est un espace vectoriel complet pour la quasi-semie norme $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^p}$.

THÉORÈME 1.1. *Soit Ψ vérifiant* (1.1) *et* (1.2).
Si $0 < p < 2$, $\mathcal{D}^p$ est trivial, sinon $\mathcal{D}^p$ l'ensemble des fonctions $f \in \tau(s)$ vérifiant :

$$\sup_{s\in]1;2[} \{(s-1)\|H_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^{ps}}\} < \infty$$

peut être décrit de la façon suivante :

$$\sup_{s\in]1;2[} \{(s-1)\|f\|_{\mathcal{B}^{ps}}\} < \infty$$

ou encore

$$\sup_{s\in]1;2[} \Big\{(s-1)\Big(\int_{\mathbb{C}} |f'(z)|^{ps}\Big(\Phi'(|z|^2)^{-1/2}\Big)^{ps} \mathrm{d}\lambda(z)\Big)^{1/ps}\Big\} < \infty$$

où $\mathrm{d}\lambda(z) = \Phi'(z)\mathrm{d}A(z)$.

De plus, lorsque la limite existe, on a :

$$\mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{f}}|^p) = \lim_{s\to 1^+}(s-1)\|f\|^{ps}_{\mathcal{B}^{ps}}.$$

Le cas $p = 2$ fournit donc le plus petit espace $\mathcal{D}^p$ non nul. On donne quelques résultats pour des poids particuliers.

THÉORÈME 1.2. (i) *Si* $\Psi(x) = \mathrm{e}^{x^j}$ *pour* $j > 0$, $\mathcal{D}^2$ *est l'ensemble* $\mathcal{P}_j$ *des polynômes de degré inférieur ou égal à* j.

De plus, $j \leqslant \mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{z}^j}|^2)$ *et* $\mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{P}}|^2) = \chi_{\{j\in\mathbb{N}\}}|a_j|^2\mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{z}^j}|^2)$.

(ii) *Si* $\Psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$, *l'ensemble des polyômes* $\mathcal{P}$ *est inclus dans* $\mathcal{D}^2$ *et* $\mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{P}}|^2) = 0$.

L'auteur voudrait signaler que l'on peut obtenir l'égalité $j = \mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{z}^j}|^2)$ avec le même type de calculs.

2. ETUDE DES MOMENTS

Les auteurs de [3] caractérisent les $\mathcal{S}^p$ en fonctions des moments

$$s_d = \int_{\mathbb{R}} t^d \mathrm{e}^{-\Psi(t)}\mathrm{d}t$$

et explicitent les valeurs et les vecteurs propres de $H^*_{\overline{z}^k}H_{\overline{z}^k}$ pour un entier k :

LEMME 2.1. *Chaque monôme* z^n, $n \in \mathbb{N}$ *est un vecteur propre de* $H^*_{\overline{z}^k}H_{\overline{z}^k}$ *associé à la valeur propre*

$$\lambda_n = \frac{s_{n+k}}{s_n} - \frac{s_n}{s_{n-k}}$$

si $n \geqslant k$

$$\lambda_n = \frac{s_{n+k}}{s_n}$$

sinon.

Dans toute cette partie, le poids sera supposé dans Λ l'ensemble des fonctions de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ ou e^{x^j}, $j > 0$ un réel. Si $f(d) = \frac{1}{d}\ln(s_d)$, on pose

$$V_1(d,k) = kf(d) + (d+k)(f(d+k) - f(d)), \quad V_2(d,k) = kf(d) + (d-k)(f(d) - f(d-k)),$$

alors

$$\frac{s_{N+k}}{s_N} = \mathrm{e}^{V_1(N,k)}, \quad \frac{s_N}{s_{N-k}} = \mathrm{e}^{V_2(N,k)}, \quad \text{et} \quad \frac{s_{N+k}}{s_N} - \frac{s_N}{s_{N-k}} = \mathrm{e}^{V_1(N,k)} - \mathrm{e}^{V_2(N,k)}.$$

Comme nous le verrons, la quantité $V_1(N,k) - V_2(N,k)$ tend vers 0 quand N part à l'infini, et donc

$$\frac{s_{N+k}}{s_N} - \frac{s_N}{s_{N-k}} \simeq \mathrm{e}^{V_1(N,k)}(V_1(N,k) - V_2(N,k)).$$

Mais, on peut voir que :

$$V_1(d,k) = kf(d) + (d+k)\int_d^{d+k} f'(t)\mathrm{d}t \quad \text{et}$$

$$V_1(d,k) - V_2(d,k) = k\int_{d-k}^{d+k} f'(t)\mathrm{d}t + d\int_d^{d+k}\int_{t-k}^{t} f''(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Ainsi, il faut étudier les fonctions f, f' et f''. Pour cela on introduit x_t le maximum de la fonction $x \mapsto x^t\mathrm{e}^{-\Psi(x)}$ c'est à dire la solution de $\frac{t}{x} = \Psi'(x)$. Comme l'on considère $\Psi(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, x_t vérifie $t = x_t u'(x_t)\mathrm{e}^{u(x_t)}$ et alors $x_t = \Phi^{-1}(t)$. Comme Φ est croissante, on déduit que x_t part à l'infini avec t. Soit encore

$$h_t(x) = -t\ln(x) + \Psi(x) - (-t\ln(x_t) + \Psi(x_t)) \quad \text{et} \quad I(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-h_t(x)}\mathrm{d}x.$$

On a alors

$$f(t) = \ln(x_t) - \frac{1}{t}\Psi(x_t) + \frac{1}{t}\ln(I(t)), \quad f'(t) = \frac{1}{t^2}\Psi(x_t) - \frac{1}{t^2}\ln(I(t)) + \frac{1}{t}\frac{I'(t)}{I(t)},$$

$$f''(t) = -\frac{2}{t^3}\Psi(x_t) + \frac{1}{t^2}\frac{1}{\Phi(x_t)}\Psi'(x_t) + \frac{2}{t^3}\ln(I(t)) - \frac{2}{t}\frac{I'(t)}{I(t)} + \frac{1}{t}\frac{I(t)I''(t) - I'(t)^2}{I^2(t)},$$

où

$$I'(t) = \int_0^\infty \ln\Big(\frac{x}{x_t}\Big)\mathrm{e}^{-h_t(x)}\mathrm{d}x, \quad I''(t) = \int_0^\infty \Big(-\frac{1}{x_t\Phi'(x_t)} + \ln\Big(\frac{x}{x_t}\Big)^2\Big)\mathrm{e}^{-h_t(x)}\mathrm{d}x.$$

LEMME 2.2. *On a :*

$$I(t) \simeq \frac{x_t}{u'(x_t)}\frac{1}{\sqrt{t}}, \quad I'(t) = O\Big(\Big[\sqrt{x_t u'(x_t)t}\Big]^{-1} I(t)\Big), \quad I''(t) = O\Big(\Big[x_t u'(x_t)t\Big]^{-1} I(t)\Big).$$

Démonstration. Comme $\Psi \in \Lambda$, il est clair que

$$\frac{\Psi''}{\Psi'} \simeq u'.$$

Ainsi

$$\Phi'(x_t) = \Psi'(x_t) + x_t\Psi''(x_t) = x_t\Psi'(x_t)\Big(\frac{1}{x_t} + \frac{\Psi''(x_t)}{\Psi'(x_t)}\Big) \simeq tu'(x_t).$$

Les résultats découlent alors immédiatement du lemme 3.3 de [15] :

$$I(t) = (2\pi + o(1))\Big[\frac{x_t}{\Phi'(x_t)}\Big]^{1/2}$$

et du lemme 3.4 de [15] :

$$I'(t) = O\Big(\Big[\sqrt{x_t\Phi'(x_t)}\Big]^{-1} I(t)\Big), \quad I''(t) = O([x_t\Phi'(x_t)]^{-1} I(t)). \quad \blacksquare$$

Avant de passer aux estimations des fonctions f, f' et f'', il nous faut un équivalent de x_t.

LEMME 2.3. *Soit $j > 0$ et $\Psi(x) = \mathrm{e}^{x^j}$. Alors,*

$$x_t^j \sim \ln(t).$$

Soit $\Psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$. Alors,

$$x_t \sim \ln(\ln(t)).$$

Démonstration. Dans le premier cas x_t vérifie :

$$\frac{t}{x_t} = jx_t^{j-1}\mathrm{e}^{x_t^j}$$

et donc

$$\ln(t) - \ln(x_t) = \ln(j) + \ln(x_t^{j-1}) + x_t^j$$

ce qui montre le résultat puisque $x_t \to +\infty$.

Et dans le second, x_t vérifie :

$$\frac{t}{x_t} = \mathrm{e}^{x_t}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x_t}}$$

d'où

$$\ln(\ln(t)) + \ln\left(1 - \frac{\ln(x_t) + x_t}{\ln(t)}\right) = x_t.$$

En divisant par x_t, on a l'équivalent. ∎

LEMME 2.4. *On a :*

$$f(t) = \ln(x_t) + o(1), \quad f'(t) = \frac{o(1)}{t}, \quad f''(t) = \frac{o(1)}{t^2}.$$

Démonstration. On rappelle que $f(t) = \ln(x_t) - \frac{1}{t}\Psi(x_t) + \frac{1}{t}\ln(I(t))$.

Grâce aux deux derniers lemmes, on a :

$$0 \leqslant -\ln(I(t)) \lesssim \ln(t).$$

Ainsi

$$\frac{\ln(I(t))}{t} = o(1).$$

Comme $\Psi \in \Lambda$, il est clair que

$$\frac{\Psi}{\Psi'} \simeq \frac{1}{u'}, \quad \frac{1}{t}\Psi(x_t) = \frac{\Psi'(x_t)}{t}\frac{\Psi(x_t)}{\Psi'(x_t)} = \frac{1}{x_t}\frac{1}{u'(x_t)} = o(1).$$

On obtient le résultat voulu.

D'autre part, on a vu que $f'(t) = \frac{1}{t^2}\Psi(x_t) - \frac{1}{t^2}\ln(I(t)) + \frac{1}{t}\frac{I'(t)}{I(t)}$. Comme ci dessus on a :

$$\frac{1}{t^2}\Psi(x_t) = \frac{1}{t}\frac{1}{x_t u'(x_t)} \quad \text{et} \quad \frac{\ln(I(t))}{t^2} = \frac{o(1)}{t^{3/2}}.$$

Enfin, par le lemme 2.2

$$\left|\frac{1}{t}\frac{I'(t)}{I(t)}\right| \lesssim \left|\frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{tu'(x_t)x_t}}\right| = \frac{o(1)}{t}$$

on somme pour conclure.

Enfin, on a rappelle que

$$f''(t) = -\frac{2}{t^3}\Psi(x_t) + \frac{1}{t^2}\frac{1}{\Phi(x_t)}\Psi'(x_t) + \frac{2}{t^3}\ln(I(t)) - \frac{2}{t}\frac{I'(t)}{I(t)} + \frac{1}{t}\frac{I(t)I''(t) - I'(t)^2}{I^2(t)}.$$

Les premier, troisième et quatrième termes s'estiment de la même façon avec la même précision.

Pour le second :

$$\left|\frac{1}{t^2}\frac{\Psi'(x_t)}{\Phi(x_t)}\right| \simeq \left|\frac{1}{t^2}\frac{\Psi'(x_t)}{u'(x_t)t}\right| \simeq \left|\frac{1}{t^2}\frac{1}{u'(x_t)x_t}\right| \simeq \frac{o(1)}{t^2}.$$

Pour le dernier terme, on estime en deux fois. D'un coté, comme pour f' :

$$\left|\frac{I'(t)}{I(t)}\right|^2 \lesssim \frac{1}{t}\frac{1}{u'(x_t)x_t}$$

tandis que par le lemme 2.2

$$\left|\frac{I''(t)}{I(t)}\right| \lesssim \frac{1}{t}\frac{1}{u'(x_t)x_t}$$

et donc

$$\frac{1}{t}\frac{I(t)I''(t) - I'(t)^2}{I^2(t)} \lesssim \frac{1}{t^2}\frac{1}{u'(x_t)x_t} = \frac{o(1)}{t^2}. \quad \blacksquare$$

En examinant la preuve précédente, on peut voir que :

COROLLAIRE 2.5. *On as :*

$$f'(t) = \frac{o(1)}{t}, \quad f''(t) = \frac{o(1)}{t^2},$$

avec dans les deux cas

$$|o(1)| \lesssim \frac{1}{u'(x_t)x_t}.$$

On peut à présent énoncer :

LEMME 2.6. *Soit N un entier positif assez grand devant k*

$$\frac{s_{N+k}}{s_N} \simeq x_N^k, \quad \frac{s_{N+k}}{s_N} - \frac{s_N}{s_{N-k}} \lesssim x_N^k \frac{1}{N}\frac{1}{x_{N-k}u'(x_{N-k})}.$$

Démonstration. On rappelle que

$$\frac{s_{N+k}}{s_N} = \mathrm{e}^{V_1(N,k)} = \mathrm{e}^{kf(N)+(N+k)\int_N^{N+k} f'(t)\mathrm{d}t}$$

et

$$\frac{s_{N+k}}{s_N} - \frac{s_N}{s_{N-k}} = \mathrm{e}^{V_1(N,k)} - \mathrm{e}^{V_2(N,k)} \simeq \mathrm{e}^{V_1(N,k)}(V_1(N,k) - V_2(N,k))$$

$$= \mathrm{e}^{kf(N)+(N+k)\int_N^{N+k} f'(t)\mathrm{d}t} * \Big(k\int_{N-k}^{N+k} f'(t)\mathrm{d}t + N\int_N^{N+k}\int_{t-k}^{t} f''(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big).$$

On conclut grâce au corollaire 2.5. ∎

3. PREUVES

Commençons par montrer les résultats sur les espaces de Dixmier.

LEMME 3.1. *Soit T un opérateur positif et r un réel positif. On a :*

$$\|T^r\| = \|T\|^r.$$

Démonstration. Par le théorème 12.24, p. 309 de Rudin [14], on a :

$$\|T^r\| = \|(T^*T)^{r/2}\| = \sup\Big\{\frac{|\lambda|^{r/2}}{\lambda} \in \sigma(T^*T) \subset \mathbb{R}^+\Big\}$$

$$= \Big(\sup\Big\{\frac{|\lambda|^{1/2}}{\lambda} \in \sigma(T^*T) \subset \mathbb{R}^+\Big\}\Big)^r = \|(T^*T)^{1/2}\|^r = \|T\|^r. \quad ∎$$

PROPOSITION 3.2. *Si R_s est fini où si $R_s = +\infty$ et $\forall P \in \mathcal{P}, z \in \mathbb{C}$*

$$\|H_{\overline{P}}K_s(\cdot, z)\| < +\infty$$

alors $\mathcal{D}^p$ est un espace de Banach pour $p \geqslant 1$ et un quasi Banach pour $0 < p < 1$.

Démonstration. Pour $p \geqslant 1$ commençons par montrer que $\mathcal{D}^p$ est un espace vectoriel. C'est un sous espace de $\tau(s)$, il suffit de vérifier la stabilité par additivité. Soient donc f et g deux éléments de $\mathcal{D}^p$. En reprenant la preuve du corollaire 16.34, p. 170 de R. Meise et D. Vogt [11] pour les opérateurs compacts $A = H_{\overline{f}}$ et $B = H_{\overline{g}}$ on obtient, pour tout $N > 1$:

$$\Big(\sum_{k=0}^N s_k(A+B)^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{k=0}^N s_k(A)^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=0}^N s_k(B)^p\Big)^{1/p}.$$

Ainsi,

$$\Big(\frac{1}{\ln N}\sum_{k=0}^N s_k(|A+B|^p)\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\frac{1}{\ln N}\sum_{k=0}^N s_k(|A|^p)\Big)^{1/p} + \Big(\frac{1}{\ln N}\sum_{k=0}^N s_k(|B|^p)\Big)^{1/p}.$$

On déduit :

$$\||A+B|^p\|_{\mathcal{S}_1^+}^{1/p} \leqslant \||A|^p\|_{\mathcal{S}_1^+}^{1/p} + \||B|^p\|_{\mathcal{S}_1^+}^{1/p}.$$

Comme $H_{\overline{f+g}} = H_{\overline{f}} + H_{\overline{g}}$, on a $f+g \in \mathcal{D}^p$. On déduit immédiatement que $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^p}$ est une norme puisque l'inégalité triangulaire, seul point délicat à vérifier, résulte du calcul précédent.

Il nous reste à montrer la complétude. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{D}^p$. Par le lemme 3.1, on a :

$$\| |H_{\overline{f}_n} - H_{\overline{f}_m}|^p \|_{\mathcal{S}_1^+}^{1/p} \geqslant \| |H_{\overline{f}_n} - H_{\overline{f}_m}|^p \|^{1/p} = \| \, |H_{\overline{f}_n} - H_{\overline{f}_m}| \, \| \geqslant \|H_{\overline{f}_n} - H_{\overline{f}_m}\|.$$

Ainsi, $(H_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}^2(s), L^2(\mu_n))$ donc converge vers un opérateur T. L'hypothèse dans le cas $R_S = +\infty$ permet d'affirmer que pour tout polynôme P et tout $z \in \mathbb{C}$ la fonction $w \mapsto P(w)K(w,z)$ est dans $L^2(\mu_1)$. On peut ainsi reprendre la preuve du lemme 2.14, p. 18 de [4] et on montre que T est un opérateur borné et compact de la forme $H_{\overline{f}}$ avec $f \in \tau(s)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et N_0 donné par la suite de Cauchy $(H_{\overline{f}_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Fixons $k > N_0$:

$$\begin{aligned}
\|H_{\overline{f}} - H_{\overline{f}_k}\|_{\mathcal{D}^p}^p &= \Big\| \lim_{m\to+\infty} H_{\overline{f}_m} - H_{\overline{f}_k} \Big\|_{\mathcal{D}^p}^p = \sup_N \frac{1}{\ln N} \sum_{n=0}^{N} s_n\Big(\Big(\lim_{m\to+\infty} H_{\overline{f}_m} - H_{\overline{f}_k} \Big)^p \Big) \\
&= \sup_N \frac{1}{\ln N} \liminf_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} s_n(H_{\overline{f}_m} - H_{\overline{f}_k})^p \\
&\leqslant \liminf_{m\to+\infty} \sup_N \frac{1}{\ln N} \sum_{n=0}^{N} s_n(H_{\overline{f}_m} - H_{\overline{f}_k})^p
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est justifiée par ([11], p. 171) :

$$|s_n(A) - s_n(B)| \leqslant \|A - B\|.$$

On a ainsi obtenu :

$$\|H_{\overline{f}} - H_{\overline{f}_k}\|_{\mathcal{D}^p}^p \leqslant \liminf_{m\to+\infty} \|H_{\overline{f}_m} - H_{\overline{f}_k}\|_{\mathcal{D}^p}^p.$$

On déduit donc que $f \in \mathcal{D}^p$ et que f_n converge vers f dans $\mathcal{D}^p$.

Pour $0 < p < 1$, on montre simplement que $\mathcal{D}^p$ est un espace vectoriel, le reste se fait comme ci dessus.

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{D}^p$ et P un projecteur orthogonal. On a pour tout entier n :

$$s_n(AP + BP) = s_n(|(A+B)P|) = s_n(|\,|A+B|P|) = s_n(|A+B|P).$$

Si l'on considère P, le projecteur de rang $N+1$ associé aux $N+1$ premières valeurs propres de $|A+B|$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{n=0}^{\infty} s_n(AP+BP)^p \Big)^{1/p} &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} s_n(|A+B|P)^p \Big)^{1/p} = \Big(\sum_{n=0}^{N} s_n(|A+B|)^p \Big)^{1/p} \\
&= \Big(\sum_{n=0}^{N} s_n(A+B)^p \Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{S}^p$ est un quasi Banach, il existe une constante $C > 1$ telle que :

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} s_n(AP+BP)^p\Big)^{1/p} \leqslant C\Big[\Big(\sum_{n=0}^{\infty} s_n(AP)^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} s_n(BP)^p\Big)^{1/p}\Big]$$

et donc, P étant de rang $N+1$:

$$\Big(\sum_{n=0}^{N} s_n(A+B)^p\Big)^{1/p} \leqslant C\Big[\Big(\sum_{n=0}^{N} s_n(AP)^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=0}^{N} s_n(BP)^p\Big)^{1/p}\Big].$$

Comme $\|P\| \leqslant 1$, on a :

$$\Big(\sum_{n=0}^{N} s_n(A+B)^p\Big)^{1/p} \leqslant C\Big[\Big(\sum_{n=0}^{N} s_n(A)^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=0}^{N} s_n(B)^p\Big)^{1/p}\Big]. \quad ∎$$

REMARQUE 3.3. L'hypothèse $\forall P \in \mathcal{P}, z \in \mathbb{C} \quad \|H_{\overline{P}} K_s(\cdot, z)\| < +\infty$ n'est pas trop restrictive. En effet, pour les poids super polynômiaux les opérateurs de Hankel de symboles polynômiaux sont bornés (cf. [15]) et donc conviennent. Pour des poids simplement polynômiaux, le théorème A de [15] ainsi que les remarques qui le suivent, permettent d'affirmer que $\mathcal{D}^p$ est de dimension finie.

Preuve du théorème 1.1. Soit $0 < p < 2$ et supposons par l'absurde que $|H_{\overline{f}}|^p$ n'est pas dans $\mathcal{S}^1_+$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|H_{\overline{f}}|^p \in \mathcal{S}^{1+\varepsilon}$ et donc $|H_{\overline{f}}| \in \mathcal{S}^{p+\varepsilon p}$. Comme $p < 2$ on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $|H_{\overline{f}}| \in \mathcal{S}^2$. Ceci contredit le théorème C de [4] puisque comme il est dit dans [15], notre poids n'est pas exponentiellement borné.

Supposons $p \geqslant 2$. Pour un opérateur compact T, on définit pour $s > 1$, $\zeta_T(s) := \sum_{n=0}^{\infty} s_n(T)^s$. Si T est de plus positif, alors $\zeta_T(s) = \mathrm{Tr}(T^s)$. Comme les auteurs de [10] nous utiliserons le critère suivant :

LEMME 3.4. *Soit T un opérateur compact, on a alors :*

$$T \in \mathcal{S}_1^+ \Leftrightarrow \sup_{s \in]1;2[} \{(s-1)\zeta_T(s)\} < \infty.$$

Comme $\mathrm{Tr}([|H_{\overline{f}}|^p]^s) = \mathrm{Tr}(|H_{\overline{f}}|^{ps}) = \|f\|^{ps}_{\mathcal{B}_{ps}}$, le lemme précédent permet de conclure. Il est important de noter que c'est à cet endroit que l'on utilise l'indépendance évoquée en introduction. Enfin, la dernière caractérisation résulte du Théorème B et du lemme 3.1 de [15] ainsi que de la définition de $\mathcal{B}^p_2$. Là encore, il n'y a pas de dépendance en p. De la même façon, le calcul de la trace résulte de la proposition 4 p. 306 de [5] :

LEMME 3.5. *Soit T un opérateur compact positif dans $\mathcal{S}_1^+$. Les conditions suivant sont équivalentes :*

$$(s-1)\zeta_T(s) \to L \quad \textit{quand } s \to 1^+, \quad (\ln(N))^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} s_n(T) \to L \quad \textit{quand } N \to +\infty.$$

Dans ce cas, on a $\mathrm{Tr}_\omega(T) = L$. ∎

Preuve du théorème 1.2. On démontre le résultat pour $\Psi(x) = \mathrm{e}^{x^j}$ pour $j > 0$, le second cas se fait de façon analogue. Dans notre contexte, être dans la classe de Dixmier ou non, ne dépend pas de l'ordre dans lequel nous formons les sommes partielles de valeurs singulières. Nous allons sommer les valeurs propres de $|H_{\overline{z}^k}|^2$ comme elles sont présentées dans la proposition 2.1 afin qu'elles se téléscopent.

Pour k un entier, et N assez grand, on a :

$$\widetilde{\sigma}_{N+1}(|H_{\overline{z}^k}|^2) := \sum_{d=0}^{N} \lambda_d(|H_{\overline{z}^k}|^2) = \frac{s_{N+1}}{s_{N+1-k}} + \cdots + \frac{s_{N+k}}{s_N}.$$

Par les lemmes 2.3 et 2.6, on peut estimer $\widetilde{\sigma}_N$

$$\begin{aligned}
\frac{s_{N+1}}{s_{N+1-k}} + \cdots + \frac{s_{N+k}}{s_N} &= x_{N+1-k}^k \mathrm{e}^{o(1)} + \cdots + x_N^k \mathrm{e}^{o(1)} \\
&= x_{N+1-k}^{k-j} x_{N+1-k}^j \mathrm{e}^{o(1)} + \cdots + x_N^j x_N^{k-j} \mathrm{e}^{o(1)} \\
&= \ln(N) \sum_{d=1-k}^{0} x_{N+d}^{k-j} \mathrm{e}^{o(1)} + \sum_{d=1-k}^{0} o(\ln(N+d)) x_{N+d}^{k-j} \mathrm{e}^{o(1)} \\
&\quad + \sum_{d=1-k}^{-1} (\ln(N+d) - \ln N) \mathrm{e}^{o(1)} x_{N+d}^{k-j}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Comme $x_t \to +\infty$ et que les deux derniers termes de la somme précédente sont négligeables devant le premier, on a :

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\widetilde{\sigma}_{N+1}(|H_{\overline{z}^k}|^2)}{\ln(N+1)} \right\} < \infty \Leftrightarrow k \leqslant j.$$

On ne peut pas utiliser le même argument pour le calcul de la trace, puisque la façon dont nous sommons est primordiale comme le montre l'exemple standard de la série harmonique. Dans un premier temps, on évalue $\mathrm{Tr}(|H_{\overline{z}^k}|^{2s})$. Soit N_0 assez grand devant k :

$$\begin{aligned}
\sum_{N\in\mathbb{N}} \lambda_N(|H_{\overline{z}^k}|^{2s}) &\simeq \sum_{N\geqslant N_0} \left(\frac{s_{N+k}}{s_N} - \frac{s_N}{s_{N-k}} \right)^s \lesssim \sum_{N\geqslant N_0} \left(x_N^k \frac{1}{N} \frac{1}{x_{N-k} u'(x_{N-k})} \right)^s \\
&\simeq \sum_{N\geqslant N_0} \left(x_N^k \frac{1}{N} \frac{1}{x_{N-k}^j} \right)^s \simeq \sum_{N\geqslant N_0} \left(x_N^{k-j} \frac{1}{N} \right)^s.
\end{aligned}$$

Comme $x_N \to \infty$ avec N, on obtient immédiatement pour $k < j$ par le lemme 3.5

$$\mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{z}^k}|^2) = \lim_{s\to 1} (s-1) \mathrm{Tr}(|H_{\overline{z}^k}|^{2s}) = 0.$$

Traitons le cas $k = j$. Si λ_n est la suite des valeurs propres d'un opérateur compact positif et λ_n^* la même suite rangée par ordre décroissant, il est clair que

$$\frac{1}{\ln(N+1)} \sum_{k=0}^{N} \lambda_n \leqslant \frac{1}{\ln(N+1)} \sum_{k=0}^{N} \lambda_n^*.$$

Cette remarque associée à (3.1) montre que

$$j \leqslant \mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{z}^j}|^2). \tag{3.2}$$

Passons aux symboles quelconques, supposons $|H_{\overline{f}}|^2 \in \mathcal{S}_1^+$, pour $f(z) = \sum a_k z^k \in \tau(s)$. Par le lemme 2.12(3) de [4], on a :

$$|H_{\overline{a_k z^k}}|^2 = |a_k|^2 |H_{\overline{z}^k}|^2 \in \mathcal{S}_1^+ \quad \text{pour } a_k \neq 0.$$

Ainsi, par ce que l'on vient juste de prouver, on a : $k \leqslant j$. Réciproquement, soit $P = \sum_{k=0}^{j} a_k z^k$. Encore par ce qui vient d'être prouvé on sait que chaque $|H_{\overline{a_k z^k}}|^2$ est dans $\mathcal{S}_1^+$, on conclut par linéarité.

Pour la trace de Dixmier :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{P}}|^2) &= \mathrm{Tr}_\omega\Big(\sum_{k=0}^{j} |a_k|^2 |H_{\overline{z}^k}|^2\Big) + \mathrm{Tr}_\omega\Big(\sum_{k\neq l, k,l>0}^{j} a_k \overline{a}_l H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^l}\Big) \\ &= |a_j|^2 \mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{z}^j}|^2) + \sum_{k\neq l, k,l>0}^{j} a_k \overline{a}_l \mathrm{Tr}_\omega(H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^l}).\end{aligned}$$

Or, pour $k \neq l$

$$\mathrm{Tr}_\omega(H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^l}) = 0.$$

En effet, pour $\xi \in \mathbf{T}$, considérons l'opérateur unitaire U_ξ, défini par :

$$U_\xi f(z) := f(\xi z).$$

On a alors, lemme 2.10 de [4] :

$$U_{\overline{\xi}} H_{\overline{z}^k} U_\xi = \xi^k H_{\overline{z}^k}$$

et par invariance de la trace de Dixmier :

$$\mathrm{Tr}_\omega(H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^l}) = \mathrm{Tr}_\omega(U_{\overline{\xi}} H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^l} U_\xi) = \xi^{l-k} \mathrm{Tr}_\omega(H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^l})$$

ce qui permet de conclure. ∎

REMARQUE 3.6. Toujours avec (3.1) l'étude de la trace serait plus simple et plus précise, si la suite des valeurs singulières, telle que nous la sommons, était décroissante. On pourrait par exemple obtenir l'égalité dans (3.2).

THÉORÈME 3.7. *Pour tout poids $\Psi \in \Lambda$, tout $2p > 2$, et tout P polynôme, $|H_{\overline{P}}|^{2p} \in \mathcal{S}_+^1$ et $\mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{P}}|^{2p}) = 0$.*

Démonstration. On rappelle que par l'étude des moments, on a pour N assez grand :

$$\frac{s_{N+k}}{s_N} - \frac{s_N}{s_{N-k}} \simeq x_N^k \frac{1}{N} \frac{1}{x_{N-k} u'(x_{N-k})}.$$

Comme les poids sont dans Λ, x_N^k est au plus une puissance de $\ln(N)$, ainsi

$$\sup_N \frac{1}{\ln(N+1)} \sum_{d=0}^{N} \Big(\frac{s_{d+|k|}}{s_d} - \frac{s_d}{s_{d-|k|}}\Big)^p < \infty.$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|H_{\bar{z}^k}|^{2p} \in \mathcal{S}^1_+$, on conclut par linéarité.

Par des arguments similaires, en regardant la limite de $(s-1)\mathrm{Tr}(|H_{\bar{z}^k}|^{2ps})$, on obtient le résultat sur la trace. Des inégalités

$$\mathrm{Tr}(|A+B|^s)^{1/s} = \|A+B\|_{\mathcal{S}^s} \leqslant \|A\|_{\mathcal{S}^s} + \|B\|_{\mathcal{S}^s} = \mathrm{Tr}(|A|^s)^{1/s} + \mathrm{Tr}(|B|^s)^{1/s}$$

on déduit que pour $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k z^k$

$$(s-1)\mathrm{Tr}(|H_{\overline{P}}|^{2ps})^{1/2ps} \leqslant (s-1) \sum_{k=0}^{m} \mathrm{Tr}(|H_{\overline{a_k z^k}}|^{2ps})^{1/2ps}.$$

Comme $(s-1)\mathrm{Tr}(|H_{\bar{z}^k}|^{2ps})$ tend vers 0, le terme de droite ci dessus à une limite nulle et donc

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\mathrm{Tr}(|H_{\overline{P}}|^{2ps}) = 0.$$

Comme toujours, on conclut par la proposition 3.5. ∎

4. REMARQUES

Il est dit dans [15] que $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes est inclus dans $\mathcal{B}_p$ si et seulement si $p > 2$. On a ainsi :

$$\mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{P}}|^p) = 0.$$

C'est exactement ce que l'on vient de prouver "à la main" dans le dernier théorème et en fait, pour $p > 2$, $|H_{\overline{P}}|^p \in \mathcal{S}^1$. Les exemples du théorème 1.2 montrent que pour $p = 2$ la situation est différente. Avec le poids $\Psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$, non exponentiellement borné, les $|H_{\overline{P}}|^2$ donnent des exemples d'opérateurs de trace de Dixmier nulle sans être dans $\mathcal{S}^1$.

Notons d'ailleurs $\mathcal{D}^p_0$ le sous espace de $\mathcal{D}^p$ dont tous les éléments ont une trace de Dixmier nulle. On alors pour $2 \leqslant p$ les inclusions $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{D}^p_0 \subset \mathcal{D}^p$.

Remerciements. Je tiens à remercier le référé pour ses nombreuses remarques ainsi que pour la suggestion de la preuve de l'égalité

$$\mathrm{Tr}_\omega(H^*_{\bar{z}^k} H_{\bar{z}^l}) = 0.$$

Je tiens également à remercier E.H. Youssfi pour ses nombreux conseils et remarques.

RÉFÉRENCES

[1] J. ARAZY, S.D. FISHER, J. PEETRE, Hankel operators on weighted Bergman spaces, *Amer. J. Math.* **110**(1988), 989–1053.

[2] S. AXLER, The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators, *Duke Math. J.* **53**(1986), 315–332.

[3] H. BOMMIER-HATO, E.H. YOUSSFI, Hankel operators on weighted Fock spaces, *Integral Equations Operator Theory* **59**(2007), 1–17.

[4] H. BOMMIER-HATO, E.H. YOUSSFI, Hankel operators and the Stieltjes moment problem, *J. Funct. Anal.* **258**(2010), 978–998.

[5] A. CONNES, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, CA 1994.

[6] A. CONNES, H. MOSCOVICI, The local index formula in noncommutative geometry, *Geom. Funct. Anal.* **5**(1995), 174–243.

[7] M. ENGLIS, K. GUO, G. ZHANG, Toeplitz and Hankel operators and Dixmier traces on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137**(2009), 3669–3678.

[8] M. ENGLIS, R. ROCHBERG, The Dixmier trace of Hankel operators on the Bergman space, *J. Funct. Anal.* **257**(2009), 1445–1479.

[9] I. GOHBERG, M.G. KREIN, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*, Transl. Math. Monographs, vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1969.

[10] S.Y. LI, B. RUSSO, Hankel operators in the Dixmier class, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **325**(1997), 21–26.

[11] R. MEISE, D. VOGT, *Introduction to Functional Analysis*, Oxford Graduate Texts in Math., vol. 2, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York 1997.

[12] V. PELLER, *Hankel Operators and their Applications*, Springer-Verlag, New-York 2003.

[13] R. PONGE, Mémoire de DEA : Trace de Dixmier.

[14] W. RUDIN, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Inc., New York 1991.

[15] K. SEIP, E.H. YOUSSFI, Hankel operators on Fock spaces and related Bergman kernel estimates, *J. Geom. Anal.* **23**(2011), 170–201.

[16] K. ZHU, *Operator Theory in Function Spaces*, Marcel Dekker, New York 1990.

ROMARIC TYTGAT, LATP, U.M.R. C.N.R.S. 7353, CMI, UNIVERSITÉ DE PROVENCE, 39 RUE F-JOLIOT-CURIE, 13453 MARSEILLE CEDEX 13, FRANCE
E-mail address: tytgat@cmi.univ-mrs.fr

Received December 19, 2012; posted on July 30, 2014.