J. OPERATOR THEORY
6(1981), 39–50

DILATATIONS ISOMÉTRIQUES D'OPÉRATEURS ET LE PROBLÈME DES SOUS-ESPACES INVARIANTS

MICHEL ROME

INTRODUCTION

En nous inspirant d'un procédé usuel en théorie des groupes, l'induction des représentations des groupes que M. A. Rieffel [2] a étendue au cas des algèbres de Banach, on fait correspondre à toute contraction T sur un espace de Banach E, une isométrie surjective S sur un espace ${}^{\mathbf{Z}}E$; cette façon de faire n'est pas sans rapport avec la dilatation unitarie d'une contraction sur un espace de Hilbert. Nous montrons que lorsque E est hilbertien, notre objet ${}^{\mathbf{Z}}E$ n'est autre que la partie $*$-résiduelle de la dilatation unitaire minimale. Notre travail donne peut-être un accès plus facile à cette notion et la prolonge au cas banachique. Elle permet de rendre plus algèbriques les résultats récents de B. Beauzamy [1] sur le problème des sous-espaces invariants.

Je remercie Bernard Beauzamy pour m'avoir proposé ce travail dont l'intérêt lui avait été signalé par C. Foiaş.

§ 1. DÉFINITION DE ${}^{\mathbf{Z}}E$ LE Z-MODULE INDUIT ASSOCIÉ À UN N-MODULE DE BANACH E

1.1. N ET Z-MODULES.

Dans la suite nous appellerons N-module de Banach, un couple formé d'un espace de Banach E et d'un opérateur linéaire borné $T: E \to E$ dont les puissances sont uniformément bornées. Un Z-module est un N-module tel que, T soit inversible et toutes les puissances, positives ou négatives, uniformément bornées.

Désignons par $\ell^1(\mathbf{N})$ [resp. $\ell^1(\mathbf{Z})$] l'espace de Banach des suites scalaires absolument sommables et par (e_n), $n \in \mathbf{N}$ [resp. $n \in \mathbf{Z}$] sa base canonique. Aussi bien $\ell^1(\mathbf{N})$ que $\ell^1(\mathbf{Z})$, avec la convolution comme deuxième loi, sont des algèbres de Banach admettant e_0 comme unité.

Sur un N-module de Banach (E, T), on peut définir une structure de module sur l'anneau $\ell^1(\mathbf{N})$ en posant pour chaque $\lambda = (\lambda_n) \in \ell^1(\mathbf{N})$ et $x \in E$: $\lambda * x = \sum_{n \geq 0} \lambda_n T^n x$.

Il est clair que cette série est absolument convergente dans E, que $\|\lambda * x\| \leqslant \leqslant A\|\lambda\| \cdot \|x\|$, que l'application $(\lambda, x) \to \lambda * x$ est bilinéaire, et que $e_0 * x = x$. Réciproquement une structure de $\ell^1(\mathbf{N})$-module sur E provient par le procédé précédent du seul opérateur T: $x \to e_1 * x$ dont les puissances $T^n: x \to e_n * x$ sont bornées.

Pour un $\mathbf{Z}$-module, on peut faire de même en remplaçant $\ell^1(\mathbf{N})$ par $\ell^1(\mathbf{Z})$. On dira qu'un $\mathbf{N}$-module est isométrique si T est une contraction (i.e. $\|T\| \leqslant 1$) et qu'un $\mathbf{Z}$-module est isométrique si T est une isométrie surjective. Il est à remarquer que l'on peut toujours remplacer la norme de E par une norme équivalente de façon que le module devienne isométrique.

1.2. Sous-module, module quotient, opérateur d'entrelacement.

Soient (E, T) et (F, S) deux $\mathbf{N}$ (ou $\mathbf{Z}$)-modules, on désigne par opérateur d'entrelacement entre T et S une application linéaire et continue $u: E \to F$ telle que $u \circ T = S \circ u$. L'ensemble $L_e(E, F)$ des entrelacements est un sous-espace vectoriel fermé de $L(E, F)$; et on a le résultat évident suivant:

1.2.1. Lemme. *Si $u: E \to F$ est un entrelacement et $\lambda \in \ell^1(\mathbf{N})$ (ou $\in \ell^1(\mathbf{Z})$) alors* $u(\lambda * x) = \lambda * u(x)$.

1.2.2. Soit E_1 un sous-espace fermé de E invariant par T (i.e. $T(E_1) \subset E_1$). On peut alors considérer T_1 la restriction de T à E_1 et T_1': $E/E_1 \to E/E_1$ l'opérateur quotient defini par $T_1'(x+E_1) = T(x)+E_1$. Par définition (E_1, T_1) est un sous-$\mathbf{N}$-module de E et $(E/E_1, T_1')$ le $\mathbf{N}$-module quotient associé. Lorsque E est un $\mathbf{Z}$-module et E_1 invariant à la fois par T et T^{-1}, alors (E_1, T_1) et $(E/E_1, T_1')$ sont aussi des $\mathbf{Z}$-modules.

1.3. Définition de ${}^{\mathbf{Z}}E$.

Considérons $\ell^1(\mathbf{Z}; E)$, l'espace de Banach des suites absolument sommables de E, que l'on munit naturellement de la norme définie, pour $\bar{x} = (x_n) \in \ell^1(\mathbf{Z}, E)$, par $\|\bar{x}\| = \sum \|x_n\|$. Dans cet espace on note $e_n \otimes x$ la suite qui vaut x en n et 0 ailleurs. Pour chaque $\bar{x}$ la suite $e_n \otimes x_n$ d'éléments de $\ell^1(\mathbf{Z}, E)$ est sommable et de somme $\bar{x} = \sum e_n \otimes x_n$. Cette représentation de $\bar{x}$ est unique.

On peut placer sur $\ell^1(\mathbf{Z}, E)$ deux structures de module, une structure de $\mathbf{Z}$-module isométrique définie par le décalage à droite: $\bar{S}(\bar{x})_n = x_{n-1}$ ou encore avec d'autres notations

$$\bar{S}\left(\sum e_n \otimes x_n\right) = \sum e_{n+1} \otimes x_n .$$

On peut également considérer la structure de $\mathbf{N}$-module définie par $\bar{T}(\bar{x}) = (Tx_n)_n$ ce qui peut s'écrire encore:

$$\bar{T}\left(\sum e_n \otimes x_n\right) = \sum e_n \otimes Tx_n .$$

On veut identifier les deux structures de $\mathbf{N}$-module ainsi définies. Pour cela il faut établir dans $\ell^1(\mathbf{Z}, E)$ une relation d'équivalence telle que $\bar{S}(\bar{x}) = \bar{T}(\bar{x})$ pour tout $\bar{x}$. D'où les définitions qui suivent:

1.3.1. DÉFINITION. On appelle N_0, le sous-espace de $\ell^1(\mathbf{Z}, E)$ engendré par les suites:

$$e_{n+1} \otimes x - e_n \otimes Tx = (\ldots, 0, -Tx, x, 0, \ldots).$$

On note N l'espace vectoriel fermé engendré par les mêmes suites.

On a alors:

1.3.2. PROPOSITION. $N_0 = \{\sum e_{n+1} \otimes u_n - e_n \otimes Tu_n$: (u_n) *suite de* E *à support fini*$\} = \{\sum e_n \otimes (u_{n-1} - Tu_n)$: (u_n) *suite à support fini*$\}$.

1.3.3. PROPOSITION. N *est un sous*-$\mathbf{Z}$-*module de* $(\ell^1(\mathbf{Z}, E), \overline{S})$ *et un sous*-$\mathbf{N}$-*module de* $(\ell^1(\mathbf{Z}, E), \overline{T})$.

1.3.4. DÉFINITION. On désignera par $({}^{\mathbf{Z}}E, S)$ le $\mathbf{Z}$-module quotient de $(\ell^1(\mathbf{Z}, E), \overline{S})$ par N.

Dans la suite on désignera par $\{\overline{x}\}$ la classe de $\overline{x} \in \ell^1(\mathbf{Z}, E)$ modulo-N.

1.3.5. COMMENTAIRES. $({}^{\mathbf{Z}}E, S)$ a deux structures de $\mathbf{N}$-module déduites respectivement de $\overline{S}$ et $\overline{T}$, mais par construction elles coïncident. On a donc les formules suivantes:

$$S\{\overline{x}\} = \{\overline{S}(\overline{x})\} = \{\overline{T}(\overline{x})\} = \{\sum e_{n+1} \otimes x_n) = \{\sum e_n \otimes Tx_n\}.$$

Plus généralement:

$$S^p\{\overline{x}\} = \{\sum e_{n+p} \otimes x_n\} = \{\sum e_{n+q} \otimes T^{p-q}x_n\}.$$

§ 2. RRINCIPALES PROPRIÉTÉS DE ${}^{\mathbf{Z}}E$

2.1. EXPRESSION DE LA NORME DE ${}^{\mathbf{Z}}E$.

Soit (E, T) un $\mathbf{N}$-module et posons $A = \sup(\|T^n\|: n \geqslant 0)$. Soit $\overline{x} = (x_n)$ un élément de $\ell^1(\mathbf{Z}, E)$. On cherche à déterminer $\|\{\overline{x}\}\|$ (${}^{\mathbf{Z}}E$ est bien entendu muni de la norme quotient). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\overline{u} \in N_0$ vérifiant $\|\{\overline{x}\}\| \leqslant \leqslant \|\overline{x} + \overline{u}\| \leqslant \|\{\overline{x}\}\| + \varepsilon$. Si l'on exprime $\overline{u}$ sous la forme:

$$\overline{u} = \sum e_{k+1} \otimes u_k - e_k \otimes Tu_k$$

avec $u_k = 0$ si $|k| \geqslant m_0$. On aura pour $m \geqslant m_0$:

$$\|\overline{x} + \overline{u}\| = \sum \|x_n + u_{n-1} - Tu_n\| = \sum_{k<-m} \|x_k\| + \sum_{k\geqslant -m} \|x_k + u_{k-1} - Tu_k\|.$$

Mais d'autre part:

$$\|x_k + u_{k-1} - Tu_k\| \geqslant \frac{1}{A} \|T^{m+k}x_k + T^{m+k}u_{k-1} - T^{m+k+1}u_k\|.$$

L'usage de l'inégalité triangulaire permet d'arriver à:

$$\|\overline{x} + \overline{u}\| \geqslant \frac{1}{A} \|\sum_{-m\leqslant k} T^{m+k}x_k\| + \sum_{k<-m} \|x_k\|.$$

D'un autre côté; pour tous m et n:

$$\{\bar{x}\} = \{\sum_{k<-m} e_k \otimes x_k\} + \{e_{-m} \otimes \sum_{-m\leqslant k<n} T^{m+k}x_k\} + \{\sum_{n\leqslant k} e_k \otimes x_k\}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\sum_{n\leqslant k} \|x_k\| \to 0$ et la série $\sum_{-m\leqslant k} T^{m+k}x_k$ est absolument convergente donc:

$$\{\bar{x}\} = \{\sum_{k<-m} e_k \otimes x_k\} + \{e_{-m} \otimes \sum_{-m\leqslant k} T^{m+k}x_k\}$$

ainsi

$$\|\{\bar{x}\}\| \leqslant \sum_{k<-m} \|x_k\| + \|\sum_{-m\leqslant k} T^{m+k}x_k\|.$$

En regroupant les résultats on peut énoncer:

2.1.1. LEMME. *Pour tout $x = (x_n)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $m_0 \geqslant 0$ tel que $m > m_0$ entraîne:*

$$\|\{\bar{x}\}\| - \varepsilon \leqslant \|\sum_{-m\leqslant k} T^{m+k}x_k\| \leqslant A(\|\{\bar{x}\}\| + \varepsilon).$$

2.1.2. LEMME.

$$\|\{\bar{x}\}\| \leqslant \liminf_m \|\sum_{-m\leqslant k} T^{m+k}x_k\| \leqslant \limsup_m \|\sum_{-m\leqslant k} T^{m+k}x_k\| \leqslant A\|\{\bar{x}\}\|.$$

2.1.3. THÉORÈME. *Sont équivalentes les propositions suivantes:*

(i) $\bar{x} \in N$;

(ii) $\|\{\bar{x}\}\| = 0$;

(iii) $\lim\|\sum_{-m\leqslant k} T^{m+k}x_k\| = 0$.

2.1.4. THÉORÈME. *Si T est une contraction, pour tout $\bar{x} \in \ell^1(\mathbf{Z}, E)$,*

$$\|\{\bar{x}\}\| = \lim\|\sum_{-m\leqslant k} T^{m+k}x_k\|.$$

En effet dans ce cas $A = 1$.

2.1.5. REMARQUE. En posant $\|x\|' = \sup_n \|T^n x\|$ on définit sur E une norme équivalente à celle d'origine pour laquelle E devient isométrique. Dans cette transformation la norme peut perdre (ou gagner!) certaines propriétés.

2.1.6. THÉORÈME. *Si E est hilbertien et T une contraction, ${}^{\mathbf{Z}}E$ est aussi hilbertien. Le produit scalaire est donné par*

$$\langle\{\bar{x}\} \mid \{\bar{y}\}\rangle = \lim_m (\sum_{-m\leqslant k} T^{m+k}x_k, \sum_{-m\leqslant k} T^{m+k}y_k).$$

Démonstration. Il suffit de voir que ${}^{\mathbf{Z}}E$ vérifie la formule du parallélogramme ce qui provient de 2.1.4.

2.2. L'ENTRELACEMENT u ET ${}^{\mathbf{Z}}E$ COMME SOLUTION D'UN PROBLÈME UNIVERSEL.

Pour chaque $x \in E$ on pose $u(x) = \{e_0 \otimes x\}$. On définit ainsi une application linéaire et continue de E dans ${}^{\mathbf{Z}}E$. u est un entrelacement car:

$$u(Tx) = \{e_0 \otimes Tx\} = \{e_1 \otimes x\} = S(u(x)).$$

2.2.1. PROPOSITION. *Le noyau de u est formé des éléments $x \in E$ tels que* $\lim\limits_m T^m x = 0$.

Démonstration. Provient de 2.1.3.

2.2.2. $(u, {}^{\mathbf{Z}}E)$ est solution d'un problème universel au sens suivant:

PROPOSITION. *Pour tout entrelacement v de E dans un $\mathbf{Z}$-module (G, R) il existe un entrelacement $\tilde{v} : {}^{\mathbf{Z}}E \to G$ unique tel que $\tilde{v} \circ u = v$. Si de plus G est isométrique et $\|T\| \leqslant 1$, v et $\tilde{v}$ ont la même norme.*

Démonstration. Pour tout $\{\bar{x}\} \in {}^{\mathbf{Z}}E$, on peut écrire:

$$\{\bar{x}\} = \sum_n \{e_n \otimes x_n\} = \sum e_n * u(x_n).$$

Si $\tilde{v}$ existe d'après 1.2.1 on doit avoir:

$$\tilde{v}(\{\bar{x}\}) = \sum_n \tilde{v}(e_n * u(x_n)) = \sum_n e_n * v(x_n).$$

Posons $\tilde{v}(\{\bar{x}\}) = \sum\limits_n R^n(v(x_n))$. Montrons que cette formule definit bien $\tilde{v}$. Pour tout m

$$\sum_n R^n(v(x_n)) = \sum_{k<-m} R^k(v(x_k)) + R^{-m} \circ v(\sum_{-m \leqslant k} T^{m+k} x_k).$$

D'où:

$$\|\sum R^n(v(x_n))\| \leqslant A \cdot B \cdot \|v\| \cdot \|\{\bar{x}\}\| \quad (A = \sup\|T^n\|, \quad B = \sup\|R^n\|).$$

Ainsi $\tilde{v}$ est bien défini puisque $\{\bar{x}\} = 0$ entraîne $\sum R^n v(x_n) = 0$. $\tilde{v}$ est continu car $\|\tilde{v}\| \leqslant A \cdot B \cdot \|v\|$. La dernière assertion en découle si l'on remarque que $\|v\| = \|\tilde{v} \circ u\| \leqslant \|\tilde{v}\| \cdot \|u\|$.

2.2.3. COROLLAIRE. *L'application $v \to \tilde{v}$ établit un homéomorphisme linéaire entre $L_e(E, G)$ et $L_e({}^{\mathbf{Z}}E, G)$ qui est une isométrie lorsque E et G sont isométriques.*

2.2.4. COROLLAIRE. *A chaque entrelacement $\varphi : E \to F$, il correspond un entrelacement ${}^{\mathbf{Z}}\varphi : {}^{\mathbf{Z}}E \to {}^{\mathbf{Z}}F$ tel que $u_F \circ \varphi = {}^{\mathbf{Z}}\varphi \circ u_E$.*

2.2.5. PROPOSITION. *$u(E)$ engendre ${}^{\mathbf{Z}}E$ comme $\mathbf{Z}$-module.*

Démonstration. L'énoncé signifie que tout sous-$\mathbf{Z}$-module de ${}^{\mathbf{Z}}E$ contenant $u(E)$ est égal à ${}^{\mathbf{Z}}E$. Soit $F \subset {}^{\mathbf{Z}}E$ un tel Z-module et $\{\bar{x}\} \in {}^{\mathbf{Z}}E$. Alors

$$\{\bar{x}\} = \sum \{e_n \otimes x_n\} = \sum S^n u(x_n).$$

Par conséquent $\{x\} \in F$.

2.2.6. Rappelons une classification des contractions due à Sz.-Nagy et Foiaş.

DÉFINITION. On dira d'une contraction qu'elle est de classe
$C_{1\cdot}$: si pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, $T^m x$ ne converge pas vers 0;
$C_{0\cdot}$: si pour tout $x \in E$, $\lim_m T^m x = 0$.

2.2.7. PROPOSITION. *Lorsque T est une contraction u est injectif si et seulement si T est de classe $C_{1\cdot}$; ${}^{\mathbf{Z}}E \neq (0)$ si et seulement si T n'est pas de classe $C_{0\cdot}$.*

Démonstration. $u = 0$ entraîne d'après 2.2.5 que ${}^{\mathbf{Z}}E = 0$. La réciproque provient de 2.2.1.

Donnons encore un théorème d'approximation utile dans la suite.

2.2.8. DÉFINITION. Pour chaque $m \in \mathbf{Z}$ *et* $\bar{x} \in \ell^1(\mathbf{Z}, E)$ on pose

$$\psi_m(\bar{x}) = \sum_{-m \leqslant k} T^{m+k} x_k;$$

cette définition étend celle de la suite d'opérateurs $\psi_m(f)$ pour $f \in A(\mathbf{T})$ introduite par B. Beauzamy [1].

2.2.9. PROPOSITION. *Chaque ψ_m est linéaire de norme $\leqslant 1$, de $\ell^1(\mathbf{Z}, E)$ dans E et pour chaque $\bar{x} \in \ell^1(\mathbf{Z}, E)$:*

$$\{\bar{x}\} = \lim_m S^{-m}(u(\psi_m(\bar{x}))) = \lim_m \{e_{-m} \otimes \psi_m(\bar{x})\}.$$

Démonstration. Pour $-m < n$ on a:

$$\{\bar{x}\} = \sum_{k < -m} \{e_k \otimes x_k\} + \sum_{n < k} \{e_k \otimes x_k\} + \{e_{-m} \otimes \sum_{-m \leqslant k} T^{m+k} x_k\}.$$

Il suffit de faire tendre $-m$ et n vers ∞ pour conclure.

REMARQUE. Pour $x \in E$ cette formule devient:

$$u(x) = \lim_m S^{-m} u(T^m x)$$

qu'il faut rapprocher de celle de Sz.-Nagy et Foiaş [3: Ch. I, 3.1]. Ceci deviendra plus clair au § 3.

§ 3. RAPPORT ENTRE ${}^{\mathbf{Z}}H$ ET LA DILATATION UNITAIRE DE T, LORSQUE H EST UN ESPACE DE HILBERT ET T UNE CONTRACTION

3.1. RAPPELS SUR LES DILATATIONS UNITAIRES.

Nous ne faisons que les rappels les plus nécessaires, on peut trouver dans [3] les détails.

THÉORÈME. *Pour toute contraction T sur un espace de Hilbert H, on peut trouver un sur-espace de Hilbert K de H et U un opérateur unitaire de K tels que: $n \in \mathbf{N}$, $x \in H$, $y \in H$, entraîne $(U^n x, y) = (T^n x, y)$.*

Une dilatation unitaire est *minimale* si $\{U^n x: x \in H,\ n \in \mathbf{N}\}$ est total dans K. Deux dilatations unitaires minimales sont unitairement équivalentes.

3.2. CONSTRUCTION D'UNE DILATATION UNITAIRE MINIMALE.

Il existe plusieurs façons de construire une dilatation unitaire minimale. Les outils mis en place au paragraphe précédent nous mènent naturellement à celle qui est esquissée par Sz.-Nagy et Foiaş au n° 10, Ch. I, [3].

On pose $T(n) = T^n$ si $n \geqslant 0$ et $T(n) = (T^*)^{-n}$ si $n \leqslant 0$. On définit sur $\ell^1(\mathbf{Z}, H)$ une forme sesquilinéaire en posant:

$$\langle \bar{x} \mid \bar{y} \rangle = \sum_{n,m} (T(n-m)x_n, y_m) \quad \text{pour } \bar{x} \text{ et } \bar{y} \in \ell^1(\mathbf{Z}, H).$$

La somme est absolument convergente car:

$$|\langle \bar{x} \mid \bar{y} \rangle| \leqslant \sum |(T(n-m)x_n, y_m)| \leqslant \sum_{n,m} \|x_n\| \cdot \|y_m\| = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|.$$

3.2.1. LEMME. *Pour chaque* $\bar{x} \in \ell^1(\mathbf{Z}, E)$ *on a:*

$$(1)\ \langle \bar{x} \mid \bar{y} \rangle = \sum (T(n-m)x_n, x_m) = \lim_m |\psi_m(\bar{x})|^2 + \sum_m ((I - T^*T)\psi_m(\bar{x}), \psi_m(\bar{x})),$$

les ψ_m *étant ceux définies en* 2.2.9.

Démonstration. Pour tout k on montre, en distinguant $n < m$ ou $m \leqslant n$ que l'on a:

$$\sum_{\substack{-k \leqslant n,\\ -k \leqslant m}} (T(n-m)x_n, x_m) = \|\psi_k(\bar{x})\|^2 + \sum_{m \leqslant k} ((I - T^*T)\psi_m(\bar{x}), \psi_m(\bar{x})).$$

Il ne reste plus qu'à passer à la limite.

NOTE. On trouve une formule analogue pour $\bar{x} = e_0 \otimes x$ dans [3].

COROLLAIRE. $\langle \bar{x} \mid \bar{x} \rangle \geqslant 0$ *pour tout* $\bar{x}$.

3.2.2. Reprenons les notations de [3].

$$D_T = (I - T^*T)^{1/2}, \quad \mathscr{D}_T = \overline{D_T H}.$$

Formons les espaces de Hilbert $K_1 = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathscr{D}_T$, puis $K = K_1 \oplus {}^{\mathbf{Z}}H$.

Considérons les applications:

$$\varphi: \ell^1(\mathbf{Z}, H) \to K \qquad \varphi(\bar{x}) = (D_T \psi_n(\bar{x}))_n \oplus \{\bar{x}\},$$

$$\varphi: H \to K \qquad \varphi(x) = \varphi(e_0 \otimes x).$$

Avec d'autres notations:

$$\varphi(x) = (\ldots, 0, D_T x, D_T T x, \ldots, D_T T^n x, \ldots) \oplus u(x).$$

φ est une isométrie qui permet de considérer K comme un sur-espace de H. Définissons encore l'opérateur $U: K \to K$ comme étant le produit direct du décalage à gauche sur K_1 par $S: {}^{\mathbf{Z}}H \to {}^{\mathbf{Z}}H$ l'unitaire du paragraphe 1.

3.2.3. PROPOSITION. *K, φ, U définissent une dilatation unitaire minimale de T.*

Démonstration. Vérifions que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \in H$, $y \in H$ on ait:

$$(U^n \varphi(x), \varphi(y)) = (T^n x, y).$$

Mais:

$$(U^n \varphi(x), \varphi(y)) = \sum_{k \geqslant 0} (D_T T^{n+k} x, D_T T^k y) + (u(x), u(y)) =$$

$$= \sum_{k \geqslant 0} ((T^{n+k} x, T^k y) - (T^{n+k+1} x, T^{1+k} y)) + (u(x), u(y)) = (T^n x, y).$$

Montrons maintenant que la dilatation est minimale. Il faut montrer que l'espace $V = \overline{ev}\{U^n(H): n \in \mathbf{Z}\}$ est égal à K.

Pour chaque $x \in H$, $\varphi(x) - U^{-1}\varphi(Tx) = e_0 \otimes D_T x \in K_1$. Ceci entraîne que pour chaque n:

$$U^{-n}(\varphi(x) - U^{-1}\varphi(Tx)) = e_{-n} \otimes D_T x$$

et donc $K_1 \subset V$.

Il reste à montrer que ${}^{\mathbf{Z}}H \subset V$. Pour cela on peut écrire:

$$U^{-n}\varphi(\psi_n(\bar{x})) = k_n \oplus \{e_{-n} \otimes \psi_n\} \quad \text{avec } k_n \in K_1.$$

Alors:

$$\|U^{-n}\varphi(\psi_n(\bar{x}))\|^2 = \|\psi_n(\bar{x})\|^2 = \|k_n\|^2 + \|\{e_{-n} \otimes \psi_n(\bar{x})\}\|^2.$$

Mais nous savons que $\lim\|\psi_n(\bar{x})\| = \|\{\bar{x}\}\|$ et $\lim\{e_{-n} \otimes \psi_n(\bar{x})\} = \{\bar{x}\}$ donc $k_n \to 0$ dans K_1. Et donc:

$$\{\bar{x}\} = \lim_n U^{-n}\varphi(\psi_n(\bar{x})) \in V. \tag{2}$$

3.3. IDENTIFICATION DE $({}^{\mathbf{Z}}H, S)$ AVEC LA PARTIE $*$-RÉSIDUELLE DE LA DILATATION UNITAIRE $(R_*, \mathscr{R}_*)$.

Posons en suivant toujours Sz.-Nagy et Foiaş et en identifiant H et $\varphi(H)$ au moyen de φ:

$$L = \overline{(U - T)H}, \quad M(L) = \overline{ev}\{U^n L: n \in \mathbf{Z}\}, \quad \mathscr{R}_* = K \ominus M(L).$$

3.3.1. THÉORÈME. *Avec la dilatation unitaire donnée ci-dessus, L s'identifie à $e_{-1} \otimes \mathscr{D}_T$ c'est-à-dire à l'ensemble des vecteurs de K_1 de la forme: $(\ldots, 0, x, 0, \ldots)$ avec $x \in \mathscr{D}_T$. On a aussi:*

$$M(L) = K_1 \quad \text{et} \quad \mathscr{R}_* = {}^{\mathbf{Z}}H.$$

REMARQUE. Soit P la projection de K sur ${}^{\mathbf{Z}}H$. La formule (2) de 3.2.3 donne pour $x \in H$

$$P(x) = \lim U^{-n}T^n x = \{e_0 \otimes x\}$$

qui est la formule [3; I-3.1].

§ 4. USAGE DE ${}^{\mathbf{Z}}E$ POUR LE PROBLÈME DES SOUS-ESPACES INVARIANTS

Dans la suite E est de nouveau un espace de Banach.

4.1. B. Beauzamy [1] a introduit une sorte de calcul fonctionnel asymptotique, qu'il a utilisé pour trouver des sous-espaces invariants par certains opérateurs. Nous montrons que ce calcul se déduit d'un vrai calcul fonctionnel considéré sur ${}^{\mathbf{Z}}E$. Le résultat suivant, intéressant en soi-même, montre aussi que l'utilisation d'un opérateur auxiliaire n'augmente pas la généralité du calcul asymptotique envisagé dans [1].

4.1.1. PROPOSITION. *Si T et U sont des opérateurs sur un espace de Banach E tel que pour tout $x \in E$, $U^n x - T^n x$ tend vers 0, et si T est une contraction C_1. alors $U = T$.*

4.1.2. LEMME. *U est à puissances bornées, i.e., il existe $A > 0$, $\|U^n\| \leqslant A$.*

Ainsi U définit une structure de N-module sur E. On distinguera donc N_U de N_T et ${}^{\mathbf{Z}}E_U$ de ${}^{\mathbf{Z}}E_T$.

4.1.3. LEMME. *Pour tout $\bar{x} \in \ell^1(\mathbf{Z}, E)$, $\bar{x} = (x_n)$*

$$\lim_m \Big(\sum_{-m \leqslant k} T^{m+k} x_k - \sum_{-m \leqslant k} U^{m+k} x_k \Big) = 0.$$

Démonstration. Posons $\psi_m(\bar{x}) = \sum_{-m \leqslant k} T^{m+k} x_k$ et $\psi'_m(\bar{x}) = \sum_{-m \leqslant k} U^{m+k} x_k$ ψ_m et ψ'_m sont linéaires de norme $\leqslant 1$ de $\ell^1(\mathbf{Z}, E)$ dans E et, par hypothèse, quelque soit $x \in E$ et $k \in \mathbf{Z}$ $\psi_m(e_k \otimes x) - \psi'_m(e_k \otimes x)$ tend vers 0. D'où la conclusion puisque $\{e_k \otimes x : k \in \mathbf{Z},\ x \in E\}$ est total dans $\ell^1(\mathbf{Z}, E)$.

4.1.4. LEMME. *On a: $\lim_m \psi_m(\bar{x}) = \lim_m \psi'_m(\bar{x})$ et donc $N_U = N_T$.*

Démonstration. D'après 2.1.4, 4.1.3 et 2.1.3.

Démonstration de 4.1.1. Pour tout $x \in E$, $\bar{y} = e_1 \otimes x - e_0 \otimes Ux$ appartient à N_U donc aussi à N_T. D'après 1.3.5 $\{\bar{y}\}_T = \{e_0 \otimes Tx - Ux\}_T = u_T(Tx - Ux)$. La conclusion provient de 2.2.7.

4.2. CALCUL FONCTIONNEL POUR LES FONCTIONS DE $A(\mathbf{T})$.

Considérons pour chaque $\lambda = (\lambda_n) \in \ell^1(\mathbf{Z})$ la fonction définie sur $T = \{z : z \in \mathbf{C} \text{ et } |z| = 1\}$ par

$$\mathscr{F}_\lambda(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \lambda_n z^n.$$

L'application $\lambda \to \mathscr{F}_\lambda$ de $\ell^1(\mathbf{Z})$ dans $C(\mathbf{T})$ est linéaire et injective, puisque λ_n n'est autre que le n-ième coefficient de Fourier de $\mathscr{F}_\lambda$. On désigne par $A(\mathbf{T})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{T}$ dont la suite des coefficients de Fourier est dans $\ell^1(\mathbf{Z})$. $A(\mathbf{T})$ est l'image de $\mathscr{F} : \lambda \to \mathscr{F}_\lambda$. On place sur $A(\mathbf{T})$ la norme transportée. Ainsi $\ell^1(\mathbf{Z})$ est isométrique à $A(\mathbf{T})$. Dans cette identification l'opération de convolution sur $\ell^1(\mathbf{Z})$ devient la multiplication ordinaire des fonctions sur $\mathbf{T}$.

4.2.1. Soit (E, S) un $\mathbf{Z}$-module. Dans le paragraphe 1 nous avons dit comment considérer E comme un $\ell^1(\mathbf{Z})$-module. Avec l'identification de $\ell^1(\mathbf{Z})$ et $A(\mathbf{T})$, E devient $A(\mathbf{T})$-module. Ce point de vue fournit un calcul fonctionnel pour S en posant pour $f \in A(\mathbf{T})$:

$$f(S)(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) S^n x = \hat{f} * x$$

$\hat{f}(n)$ désigne le n-ième coefficient de Fourier de f.

4.2.2. PROPOSITION. *$f \to f(S)$ est continu sur $A(\mathbf{T})$ pour la topologie forte de $L(E)$.*

Il est évident que, pour chaque $f \in A(\mathbf{T})$, le sous-espace $\operatorname{Ker} f(S)$ est invariant non seulement par S mais par tout opérateur commutant avec S.

4.2.3. PROPOSITION. (Proposition 1 de [1]) *Soient $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite vérifiant*

(i) *Pour tout n, m, $\rho_{n+m} \leqslant \rho_n \cdot \rho_m$, $\rho_n \leqslant 1$;*

(ii) $\displaystyle\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{\log \rho_n}{1 + n^2} < +\infty$

et un point $x_0 \neq 0$, $x_0 \in E$ non vecteur propre de S. On peut trouver deux fonctions f et $g \in A(\mathbf{T})$ à supports disjoints telles que $f(S)(x_0) \neq 0$, $g(S)(x_0) \neq 0$, g vérifiant de plus $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{g}(n) \rho_{|n|} < \infty$.

Démonstration. Nous reprenons rapidement la démonstration de [1]. On sait que les conditions portant sur la suite (ρ_n) permettent de trouver pour tout recouvrement fini de $\mathbf{T}$ une partition de l'unité qui lui est subordonnée, formée de fonctions $g \in A(\mathbf{T})$ vérifiant $\sum |\hat{g}(n)| \rho_{|n|} < \infty$.

Pour chaque N recouvrons $\mathbf{T}$ avec des intervalles de longueur $\leqslant \dfrac{2\pi}{N}$ et soit $(g_{N,j})$ une partition subordonnée. On a $\sum g_{N,j} = 1$, le calcul fonctionnel donne, $\sum g_{N,j}(S) x_0 = x_0$.

Par conséquent il existe j tel que $g_{N,j}(S) x_0 \neq 0$. Notons simplement g_N une telle fonction et a_N le centre de l'intervalle correspondant. Soit a un point adhérent à la suite (a_N).

Considérons maintenant $f_0(z) = z - a$, $f_0 \in A(\mathbf{T})$ et s'annule en a. La théorème de Ditkin-Wiener permet de trouver une suite $f_k \in A(\mathbf{T})$ tendant vers f_0, chaque f_k étant nulle dans un voisinage de a. Le calcul fonctionnel donne:

$$f_k(S)(x_0) \to f_0(S)(x_0) = Tx_0 - ax_0$$

non nul par hypothèse. Par conséquent, il existe $f_k(S)(x_0) \neq 0$. f_k s'annule dans une boule $B(a, \varepsilon)$. En prenant N assez grand on peut supposer que suppg_N est contenu dans $B(a, \varepsilon)$. Il suffit de prendre $g_N = g$ et $f_k = f$.

4.2.4. Revenons maintenant au cas d'un N-module (E, T) et considérons $({}^{\mathbf{Z}}E, S)$ ainsi que $u\colon E \to {}^{\mathbf{Z}}E$, le Z-module et l'entrelacement canonique qui lui sont associés.

PROPOSITION. *Pour tout sous-espace F de ${}^{\mathbf{Z}}E$, invariant par S (ou hyperinvariant) $u^{-1}(F)$ est invariant (ou hyperinvariant) pour T.*

REMARQUE. Nous ne disons pas que les sous-espaces invariants de cette proposition ne sont pas triviaux.

4.2.5. DÉFINITION. [1] Un sous-espace de E de la forme $u^{-1}(\mathrm{Ker} f(S)) = \{x \in E\colon \{\hat{f} * x\} = 0\}$ est appelé *sous-espace invariant fonctionnel* de T. Ce sous-espace est en fait hyperinvariant.

4.2.6. THÉORÈME. (Th. 1 de [1]). *Soit E un espace de Banach et T un opérateur de E dans E non de classe $C_{0\cdot}$. On suppose qu'il existe une suite croissante $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifiant:*

$$\begin{cases} \rho_n \geqslant 1, \ \rho_{n+m} \leqslant \rho_n \cdot \rho_m & \text{pour tout } n \text{ et } m \in \mathbf{N} \\ \sum\limits_{n>0} \dfrac{\log \rho_n}{1+n^2} < \infty \end{cases}$$

et une suite de points $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$ telle que: $Ty_k = y_{k-1}$, $k \geqslant 1$, $\|y_0\| = 1$, $\|y_k\| \leqslant \rho_k$ et y_0 non vecteur propre de T. Alors $\{x\colon x \in E$ et $\{\hat{f} * x) = 0\}$ est un sous-espace invariant fonctionnel non trivial.

Démonstration. On peut supposer T de classe $C_{1\cdot}$. On considère $({}^{\mathbf{Z}}E, S)$ le Z-module associé. $u(y_0) = \{e_0 \otimes y_0\}$ n'est pas un vecteur propre de S. En appliquant la proposition 4.2.3 au point $u(y_0)$ on trouve g et f.

4.2.7. LEMME. *Posons $y_{-k} = T^k y_0$ $z_0 = \sum_{k \in \mathbf{N}} \hat{g}(k) y_{-k}$. Alors:*

$$\{\hat{g} \otimes y_0\} = \{e_0 \otimes z_0\} \ \text{et} \ z_0 \neq 0.$$

Démonstration.

$$\{\hat{g} \otimes y_0\} = \sum \{e_k \otimes \hat{g}(k) y_0\} = \{\sum_{\substack{k<-m \\ k>n}} e_k \otimes \hat{g}(k) y_0\} + \{\sum_{-m \leqslant k \leqslant n} e_k \otimes \hat{g}(k) y_0\}.$$

La norme du premier terme est majorée par $\sum_{\substack{k<-m\\k>n}} |\hat{g}(k)| \, \|y_0\|$ et le deuxième vaut $\{e_0 \otimes \sum_{-m \leqslant k \leqslant n} \hat{g}(k) y_{-k}\}$. En passant à la limite en m et n il vient:

$$\{\hat{g} \otimes y_0\} = g(S)u(y_0) = \{e_0 \otimes z_0\} = u(z_0).$$

4.2.8. *Fin de la démonstration du théorème.* Le sous-espace

$$\{x : x \in E, \ \{\hat{f} \otimes x\} = 0\} = u^{-1}(\operatorname{Ker} f(S))$$

est non trivial car $y_0 \neq 0$ ne lui appartient pas et $z_0 \neq 0$ lui appartient puisque

$$\{\hat{f} \otimes z_0\} = \hat{f} * \{e_0 \otimes z_0\} = \hat{f} * \{\hat{g} \otimes y_0\} = \{\widehat{fg} \otimes y_0\} = 0.$$

4.2.9. COROLLAIRE. Lorsque $E = H$ est un espace de Hilbert, la formule de 4.2.7 peut se traduire en terme de dilatation unitaire. Notons $P_{\mathscr{R}_*} : K \to \mathscr{R}_*$ la projection orthogonale sur la partie $*$-résiduelle.

Lorsque l'on identifie $(\mathscr{R}_*, R_*)$ avec $({}^{\mathbf{Z}}H, S)$, et H avec $\varphi(H)$ comme au § 3, on a pour tout $x \in H$, $(P^{\mathscr{R}_*}x) = \{e_0 \otimes x\}$.

La formule 4.2.7 peut encore s'écrire:

$$g(R_*)P_{\mathscr{R}_*} y_0 = P_{\mathscr{R}_*} z_0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

1. BEAUZAMY, B., Sous-espaces invariants de type fonctionnel dans les espaces de Banach, *Acta Math.*, **144** (à paraître).
2. RIEFFEL, M. A., Induced Banach représentations of Banach algebras and locally compact groups, *J. Functional Analysis*, **1**(1967), 443–491.
3. SZ.-NAGY, B.; FOIAŞ, C., *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Masson et Akadémiai Kiado, Paris et Budapest, 1967.

MICHEL ROME
Département de Mathématiques,
Université Claude Bernard (Lyon I),
F-69622 Villeurbanne, Cédex,
France.

Received June 30, 1980.

September 1981. Comme on me l'a fait remarquer de divers endroits (C. Foiaş, B. Maurey, ...) la proposition 4.1.1 est immédiate et sa démonstration ne necessite pas l'introduction des lemmes.