J. OPERATOR THEORY
6(1981), 155–191

О ФУНКЦИЯХ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

М. Г. КРЕЙН, В. А. ЯВРЯН

ВВЕДЕНИЕ

В дальнейшем через $\mathfrak{H}$ обозначается бесконечномерное гильбертово пространство. Вообще говоря, мы будем придерживаться обозначений книги [5]. Однако банахову алгебру ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, будем обозначать через $[\mathfrak{H}]$; через $\mathfrak{S}_1$, как и в [5], будем обозначать идеал ядерных операторов из $[\mathfrak{H}]$, замкнутый по ядерной норме $|\cdot|_1$.

Если $A \in \mathfrak{S}_1$, то имеет смысл определить $\det(I+A)$. В дальнейшем используется тот факт, что если $A, B \in [\mathfrak{H}]$ и $AB \in \mathfrak{S}_1$, $BA \in \mathfrak{S}_1$, то,

$$\det(I+AB) = \det(I+BA). \tag{0.1}$$

Пусть H_1 и H_2 — самосопряженные операторы, действующие в $\mathfrak{H}$, а $\mathrm{R}_z(H_k) = (H_k - zI)^{-1}\,(z \in \rho(H_k))$ их резольвенты. Если хотя бы при одном $z \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2)$ разность $\mathrm{R}_z(H_2) - \mathrm{R}_z(H_1) \in \mathfrak{S}_1$, то это имеет место при любом таком z. В этом случае операторы H_1 и H_2 называются *резольвентно сравнимыми*. Для такой пары всегда существует измеримая функция $\xi(\lambda)\,(-\infty < \lambda < \infty)$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda < \infty \tag{0.2}$$

и

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{R}_z(H_2) - \mathrm{R}_z(H_1)) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2}\,\mathrm{d}\lambda \qquad \forall z \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2). \tag{0.3}$$

Соотношениями (0.2) и (0.3) функция ξ в существенном определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Если $\overline{H_2 - H_1} \in \mathfrak{S}_1$, то функция ξ можно единственным образом так нормировать, чтобы $\xi \in L^1(-\infty, \infty)$, и тогда,

$$\mathrm{Sp}(H_2 - H_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) \mathrm{d}\lambda .$$

В этом случае имеет смысл определитель возмущения

$$\Delta_{H_2/H_1}(z) = \det(I + (H_2 - H_1) \mathrm{R}_z(H_1)) \qquad \forall z \in \rho(H_1),$$

и при соответствующем определении $\ln\Delta$:

$$\ln\Delta_{H_2/H_1}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{\lambda - z} \mathrm{d}\lambda \qquad \text{при } \mathrm{Im} z > 0. \tag{0.4}$$

Соотношение (0.3) следует из соотношения (0.4) в силу общей формулы

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{R}_z(H_2) - \mathrm{R}_z(H_1)) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln\Delta_{H_2/H_1}(z). \tag{0.5}$$

Из (0.4) вытекает формула для определения функции ξ:

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \arg\Delta_{H_2/H_1}(\lambda + \mathrm{i}0) \tag{0.6}$$

почти для всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Заметим еще, что, если ядерный оператор $V = \overline{H_2 - H_1}$ неотрицателен, то почти всюду $\xi(\lambda) \geqslant 0$ и, следовательно,

$$\arg\Delta_{H_2/H_1}(z) > 0 \qquad \text{при } \mathrm{Im} z > 0. \tag{0.7}$$

Функция $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; H_1, H_2)$ называется функцией спектрального сдвига для упорядоченной пары самосопряженных операторов H_1, H_2. Она однозначно определяется условием $\xi \in L^1(-\infty, \infty)$ в случае, когда $\overline{H_2 - H_1} \in \mathfrak{S}_1$, а также в случае резольвентно сравнимых полуограниченных снизу операторов H_1, H_2, если потребовать, чтобы $\xi(\lambda; H_1, H_2) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $-\infty$; в последнем случае $\xi(\lambda; H_1, H_2) = 0$ при $\lambda < \min(\sigma(H_1), \sigma(H_2))$.

Кроме того, если спектры полуограниченных операторов H_1 и H_2 дискретны при $\lambda < \alpha$, то

$$\xi(\lambda + 0; H_1, H_2) = n(\lambda; H_1) - n(\lambda; H_2) \qquad (\lambda < \alpha), \tag{0.8}$$

где $n(\lambda; H_k)$ — число собственных значений оператора H_k в интервале $(-\infty, \lambda]$.

Нам в дальнейшем понадобится также следующее свойство определителя возмущения; если $\overline{B-A}\in\mathfrak{S}_1, \overline{B-C}\in\mathfrak{S}_1$, то

$$\Delta_{B/A}(z)=\Delta_{B/C}(z)\Delta_{C/A}(z) \qquad \forall z\in\rho(A)\cap\rho(C). \tag{0.9}$$

Изложенные факты теории функций ξ заимствованы из работ [8], [9], [10], толчком к которым послужила статья физика-теоретика И. М. Лифшица [16].

Теория функций спектрального сдвига ξ играет важную роль в различных вопросах теории возмущений. Так, например, она помогла показать [1], что для резольвентно сравнимых самосопряженных операторов H_1 и H_2 существует матрица рассеяния $\mathscr{S}(\lambda)$, такая, что почти всюду разность $I-\mathscr{S}(\lambda)$ ядерна и $\det\mathscr{S}(\lambda)=\exp(2\pi i\,\xi(\lambda))$ (при соответствующей нормировке функции ξ).

Оказывается, что в теории возмущений неотрицательных операторов H могут быть получены некоторые новые характеристики для функции $\xi(\lambda; H, \tilde{H})$, где $\tilde{H}=H-V$ получается из H с помощью оператора V достаточно общего типа. В основном мы рассматриваем тот случай, когда возмущение $V=H^{1/2}TH^{1/2}$, где T—ядерный оператор. Формально выражение $H^{1/2}TH^{1/2}$ может не иметь смысла, так как, вообще говоря, $\mathfrak{R}(TH^{1/2})\not\subset\mathfrak{D}(H^{1/2})$. Кроме того, если даже оператор V определяется написанным выше равенством, то может случиться, что $\mathfrak{D}(V)\cap\mathfrak{D}(H)=\{0\}$. Всем этим объясняется, что вместо равенства $\tilde{H}=H+V$, мы пишем $\tilde{H}=H\underset{\smile}{+}V$, понимая под этим, что имеется определенная процедура, позволяющая получить самосопряженный оператор $\tilde{H}$ по операторам H и T. В § 1 дается описание этой процедуры. Затем устанавливаются две общие теоремы о поведении функции $\xi(\lambda; H, \tilde{H})$.

В качестве следствия теоремы 1.1 получается абстрактное обобщение с одновременным уточнением известной теоремы Левинсона о связи значения предельной фазы $\delta(k)$ в точке $k=0$ с числом связанных состояний для радиального уравнения Шредингера.

В § 2 детализируются полученные предложения для случая, когда операторы H и $\tilde{H}$ вполне непрерывны. На этом пути устанавливаются некоторые новые асимптотические соотношения, связывающие собственные числа операторов H и $\tilde{H}$.

Некоторое представление о содержании § 3 и § 4 дают их названия.

Название последнего параграфа (§ 5) навеяно названием замечательного доклада Марка Каца [23]. Однако мы должны сразу оговориться, что в то время как в этом докладе изложены сложные проблемы, в своем большинстве нерешенные и по настоящее время, поставленная в § 5 задача решается просто. Вместе с тем, эта задача достаточно занимательна, и она сыграла определенную роль — например, стимулировала исследования § 2.

§ 1. ДВЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

1. Пусть $H(\geqslant 0)$ — самосопряженный оператор. Обозначим через $\mathfrak{B}(H)$ банахово пространство, состоящее из элементов $\mathfrak{D}(H^{1/2})$ и снабженное нормой

$$|f|_{\mathfrak{B}} = |(H+I)^{1/2}f| \qquad \forall f \in \mathfrak{D}(H^{1/2}).$$

Элементы (антилинейные функционалы) сопряженного пространства $\mathfrak{B}^*(H)$ мы будем называть обобщенными элементами порядка $1/2$ по отношению к оператору H. Для $\chi \in \mathfrak{B}^*(H)$ условимся писать

$$\chi(f) = (\chi, f) = \overline{(f, \chi)} \qquad \forall f \in \mathfrak{D}(H^{1/2}).$$

Пусть $B \in [\mathfrak{H}]$ и $B\mathfrak{H} \subset \mathfrak{D}(H^{1/2})$. Тогда из теоремы о замкнутом графике следует, что для любого $\chi \in \mathfrak{B}^*(H)$ существует такой элемент $g(:= B^*\chi) \in \mathfrak{H}$, что $(\chi, Bf) = (g, f)$ $\forall f \in \mathfrak{H}$.

Поскольку

$$\mathfrak{R}((H-\bar{z}I)^{-1/2}) = \mathfrak{R}((H+I)^{-1/2}) \subset \mathfrak{D}(H^{1/2}) \qquad \forall z \in \rho(H),$$

имеем $(H-zI)^{-1/2}\chi \in \mathfrak{H}$ $\forall \chi \in \mathfrak{B}^*(H)$, $z \in \rho(H)$. В частности, всякому $\chi \in \mathfrak{B}^*(H)$ отвечает $g \in \mathfrak{H}$, такое, что $(H+I)^{-1/2}\chi = g$. Условимся это равенство записывать еще так: $\chi = (H+I)^{1/2} \cdot g$. По существу, оно означает, что $(\chi, f) = (g, (H+I)^{1/2}f)$. Легко видеть, что соответствие $\chi \to g$ является одно-однозначным отображением $\mathfrak{B}^*(H)$ на $\mathfrak{H}$. При этом мы можем рассматривать пространство $\mathfrak{H}$ как поэлементно вложенное в $\mathfrak{B}^*(H)$. В самом деле, каждому $h \in \mathfrak{H}$ отвечает $g = (H+I)^{1/2} h \in \mathfrak{H}$ и мы можем отождествить $\chi = (H+I)^{1/2} \cdot g$ с $(H+I)^{1/2} g = h$.

Обозначим через $E(\Delta)$ разложение единицы оператора H. Так как $E(\Delta) \in [\mathfrak{H}]$ для любого конечного интервала $\Delta(\subset [0, \infty))$, то $E(\Delta)\chi \in [\mathfrak{H}]$. Однако, более того, $E(\Delta)\chi \in \mathfrak{D}(H)^{1/2}$, ибо в силу представления $\chi = (H+I)^{1/2} \cdot g$,

$$E(\Delta)\chi = \int (\lambda+1)^{1/2}\, \mathrm{d}E(\Delta)g, \qquad (E(\Delta)\chi, \chi) = \int_\Delta (\lambda+1)\, \mathrm{d}(E_\lambda g, g).$$

Предоставляем читателю подробное обоснование этих равенств как и нижеследующего

$$((H-zI)^{-1/2}\chi,\chi)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}(E_\lambda\chi,\chi)}{\lambda-z}\left(=\int_0^\infty \frac{\lambda+1}{\lambda-z}\mathrm{d}(E_\lambda g,g)\right)\quad (\forall z\in\rho(H)).$$

В дальнейшем нас будет интересовать некоторые возмущения специального типа данного самосопряженного оператора $H\,(\geqslant 0)$.

Пусть $V\colon \mathfrak{D}(H^{1/2})\to\mathfrak{B}^*(H)$ линейный оператор. Под суммой $\tilde{H}=H\underset{\smile}{+}V$ мы понимаем следующее. Ее область определения $\mathfrak{D}(\tilde{H})$ совпадает с множеством тех $g(\in\mathfrak{D}(H^{1/2}))$, для которых антилинейный функционал

$$F(f)=(H^{1/2}g,\ H^{1/2}f)+(Vg,\ f)\qquad \forall f\in\mathfrak{D}(H^{1/2})$$

расширяется до ограниченного функционала в $\mathfrak{H}$. На любом $g\in\mathfrak{D}(\tilde{H})$ оператор $\tilde{H}$ определяется с помощью равенства

$$(\tilde{H}g,f)=(H^{1/2}g,H^{1/2}f)+(Vg,f)\qquad \forall\ f\in\mathfrak{D}(H^{1/2}).$$

По сути дела мы вместо H рассматриваем его расширение $\tilde{H}$, $\hat{H}\colon\mathfrak{D}(H^{1/2})\to\mathfrak{B}^*(H)$, определенное соотношением $(\hat{H}g,f)=(H^{1/2}g,\ H^{1/2}f)$ $\forall f,g\in\mathfrak{D}(H^{1/2})$. После этого $\tilde{H}$ определяется как сужение $\hat{H}+V$ на множестве тех $g\in\mathfrak{D}(H^{1/2})$, для которых $\hat{H}g+Vg\in\mathfrak{H}$.

Очевидно, если V — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$, то это определение суммы $H=H\underset{\smile}{+}V$ совпадает с обычным.

В дальнейшем мы будем рассматривать возмущение вида

$$V=H^{1/2}TH^{1/2},\qquad \text{где } T=T^*\in\mathfrak{S}_1, \tag{1.1}$$

которое трактуется как оператор из $\mathfrak{D}(H^{1/2})$ в $\mathfrak{B}^*(H)$, а именно, для любого $g\in\mathfrak{D}(H^{1/2})$:

$$(Vg,\ f)=(TH^{1/2}g,\ H^{1/2}f)\qquad \forall f\in\mathfrak{D}(H^{1/2}).$$

Такого рода возмущения среди прочих изучал С.Т. Курода [24], однако наша трактовка понятия суммы $H\underset{\smile}{+}V$ несколько отличается от его трактовки.

Из очевидного равенства

$$((H\underset{\smile}{+}V)g,f)=(H^{1/2}g,\ H^{1/2}f)+(TH^{1/2}g,H^{1/2}f)=((I+T)H^{1/2}g,H^{1/2}f)$$

следует, что

$$\tilde{H}=H\underset{\smile}{+}V=H^{1/2}(I+T)H^{1/2}. \tag{1.2}$$

Легко также проверить, что

(1.3) $$H - zI = (H - zI)^{1/2}(I + \mathrm{R}_z^{1/2}(H)V\mathrm{R}_z^{1/2}(H))(H - zI)^{1/2} \qquad \forall z \in \rho(H).$$

По аналогии с леммой 7.2 из [5] нетрудно доказать [18], что

$$\lim_{a\uparrow\infty} \mathrm{R}_{-a}^{1/2}(H)V\mathrm{R}_{-a}^{1/2}(H) = 0$$

по норме (даже по ядерной норме). Поэтому для достаточно больших значений $a > 0$ оператор $(I + \mathrm{R}_{-a}^{1/2}(H)V\mathrm{R}_{-a}^{1/2}(H))^{-1}$ существует и, следовательно, существует также $(\tilde{H} + aI)^{-1}$, т. е. $\tilde{H}$ — самосопряженный оператор. При этом оператор $\tilde{H}$ может иметь лишь конечное число отрицательных собственных значений. Действительно, пусть

$$T = \sum_j \lambda_j(T)(\cdot,\ \varphi_j)\varphi_j.$$

Тогда

$$\tilde{H} = H^{1/2}(I + \sum_{\lambda_j(T)\geqslant -1} \lambda_j(T)(\cdot,\ \varphi_j)\varphi_j)H^{1/2} + H^{1/2}\sum_{\lambda_j(T)<-1} \lambda_j(T)(\cdot,\ \varphi_j)\varphi_j H^{1/2}.$$

Первое слагаемое — неотрицательный оператор, а второе — конечномерный. При этом, если обозначить число отрицательных собственных значений оператора $\tilde{H}$ через m, то

(1.4) $$m \leqslant \sum_{\lambda_j(T)<-1} 1 \leqslant \sum_{\lambda_j(T)<-1} |\lambda_j(T)| \leqslant \sum_j |\lambda_j(T)| = |T|_1.$$

Из (1.3) следует, что

(1.5) $$\mathrm{R}_z(\tilde{H}) = \mathrm{R}_z^{1/2}(H)(I + \mathrm{R}_z^{1/2}(H)V\mathrm{R}_z^{1/2}(H))^{-1}\mathrm{R}_z^{1/2}(H) \qquad \forall\, z \in \rho(H) \cap \rho(\tilde{H}),$$

откуда $\mathrm{R}_z(\tilde{H}) - \mathrm{R}_z(H) \in \mathfrak{S}_1$, т.е. операторы H и $\tilde{H}$ резольвентно сравнимы.

2. Для самосопряженного оператора H мы пишем $H > 0$, если $(Hf, f) > 0$ $\forall f \in \mathfrak{D}(H)$, $f \neq 0$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $H(\geqslant 0)$—самосопряженный оператор, $\tilde{H} = H \dotplus V$, где $V = H^{1/2}TH^{1/2}$, $T = T^* \in \mathfrak{S}_1$. Тогда*

(1.6) $$\int^{\infty} \frac{|\xi(\lambda;\, H,\, \tilde{H})|}{\lambda}\, \mathrm{d}\lambda < \infty.$$

Если, кроме того, $H > 0$ и существует $(I + T)^{-1}$, то также

(1.7) $$\int_0 \frac{|\xi(\lambda;\, H,\, \tilde{H}) + m|}{\lambda}\, \mathrm{d}\lambda < \infty,$$

где m—число отрицательных собственных значений оператора $\tilde{H}$.

Сначала докажем лемму.

ЛЕММА 1.1. *Пусть* $H \geqslant 0$, $V = H^{1/2} T H^{1/2}$, $T = T^* \in \mathfrak{S}_1$. *Тогда существует последовательность таких конечномерных операторов* V_n, *действующих в* $\mathfrak{H}$, *что*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_z^{1/2}(H) V_n \mathrm{R}_z^{1/2}(H) = \mathrm{R}_z^{1/2}(H) V \mathrm{R}_z^{1/2}(H) \qquad \forall\ z \in \mathrm{Ext}[0,\infty) \tag{1.8}$$

в ядерной норме.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$H^{1/2}\,\mathrm{R}_z^{1/2}(H) = \mathrm{R}_z^{1/2}(H) H^{1/2} = \int_0^\infty \frac{\lambda^{1/2}}{(\lambda - z)^{1/2}}\, \mathrm{d}E_\lambda \qquad \forall\ z \in \mathrm{Ext}[0,\infty).$$

В лемме 1.1 мы предполагаем, что $\mathrm{R}_z^{1/2}(H)$ так выбрано, что под знаком интеграла $\lambda^{1/2} > 0$ и $\mathrm{Re}(\lambda - z)^{-1/2} > 0$. Мы видим, что оператор $Q_z :=$ $= H^{1/2}\mathrm{R}_z^{1/2}(H)$ ограничен, а $\mathrm{R}_z^{1/2}(H) V \mathrm{R}_z^{1/2}(H) = Q_z T Q_z$.

Пусть

$$T = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(T)(\cdot\,, \varphi_j)\varphi_j, \qquad (\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk} \qquad (N \leqslant \infty).$$

Очевидно, можно выбрать $\varphi_j^{(n)} \in \mathfrak{D}(H^{1/2})$ $(j = 1,2,\ldots,n;\ n = 1,2,\ldots)$ так, чтобы $|T_n - T|_1 \to 0$ при $n \to \infty$, где

$$T_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(T)\,(\cdot\,, \varphi_j^{(n)})\,\varphi_j^{(n)},$$

при этом, если $N < \infty$, мы полагаем: $\lambda_n(T) = 0$ при $n > N$. Соотношение (1.8) будет выполняться при

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(T)\,(\cdot\,, H^{1/2}\varphi_j^{(n)}) H^{1/2}\,\varphi_j^{(n)} \quad (n = 1,2,\ldots)$$

ибо в этом случае оно эквивалентно соотношению $|Q_z(T - T_n)\,Q_z\,|_1 \to 0$

Перейдем к *доказательству теоремы* 1.1.

Пусть $H_n = H + V_n$, где операторы V_n выбраны так, как указано в лемме. Тогда из (0.1), непрерывности бесконечного определителя в ядерной норме и из леммы 1.1 будет следовать, что

$$\Delta_{H_n/H}(z) = \det(I + V_n \mathrm{R}_z(H)) = \det(I + \mathrm{R}_z^{1/2}(H) V_n\,\mathrm{R}_z^{1/2}(H)) \to$$
$$\to \det(I + \mathrm{R}_z^{1/2}(H) V\,\mathrm{R}_z^{1/2}(H)).$$

Последний определитель будем обозначать через $\tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z)$:

$$\tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z) := \det(I + R_z^{1/2}(H) V R_z^{1/2}(H)).$$

Поэтому

$$\mathrm{Sp}(R_z(H_n) - R_z(H)) = -\frac{d}{dz}\ln \Delta_{H_n/H}(z) \to -\frac{d}{dz}\ln \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z). \tag{1.9}$$

Из (1.5) и (1.8) легко выводится, что

$$R_z(H_n) - R_z(H) \to R_z(\tilde{H}) - R_z(H) \qquad (n \to \infty)$$

в ядерной норме. Отсюда следует:

$$\mathrm{Sp}(R_z(H_n) - R_z(H)) \to \mathrm{Sp}(R_z(\tilde{H}) - R_z(H)) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda; H, \tilde{H})}{(\lambda - z)^2}\, d\lambda,$$

что с учетом (1.9) дает

$$\ln \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) \xi(\lambda; H, \tilde{H})\, d\lambda + \mathrm{Const} \tag{1.10}$$

при $\mathrm{Im} z > 0$.

В дальнейшем мы используем интегральное представление функций класса $\mathscr{S}$ ($\mathscr{S}$-функций). Следуя монографии [15], будем говорить, что функция $F(z)$ является $\mathscr{S}$-функцией, если

1) $F(z)$ голоморфна в области $\mathrm{Ext}[0, \infty)$,

2) $\mathrm{Im} F(z) \geqslant 0$ при $\mathrm{Im} z > 0$,

3) $F(z) \geqslant 0$ при всех $z \in (-\infty, 0)$.

Как известно ([15], Приложение), для того, чтобы функция $F(z)$ ($z \in \mathrm{Ext}[0, \infty)$) была $\mathscr{S}$-функцией, необходимо и достаточно, чтобы она допускала интегральное представление

$$F(z) = \gamma + \int_0^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z} \qquad (z \in \mathrm{Ext}[0, \infty)), \tag{1.11}$$

где $\gamma \geqslant 0$, $\sigma(t)$ — неубывающая функция и $\int_0^{\infty} (1 + t)^{-1} d\sigma(t) < \infty$.

Возвращаясь к доказательству теоремы, предположим, что $T \geqslant 0$. Тогда из леммы 1.1 и (0.7) следует, что $\arg \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z) \geqslant 0$ при $\mathrm{Im} z > 0$ и $\tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(x) > 1$ при $x < 0$. Поэтому $F(z) = \ln \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z)$ есть $\mathscr{S}$-функция и, следовательно, из (1.10) и (1.11) следует, что $\xi(\lambda; \tilde{H}, H) \geqslant 0$, $(1 + \lambda)^{-1}\xi(\lambda; H, \tilde{H}) \in L^1(0, \infty)$, и

$$\ln \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z) = \int_0^{\infty} \frac{\xi(\lambda; H, \tilde{H})}{\lambda - z}\, d\lambda \qquad \text{при } \mathrm{Im} z > 0. \tag{1.12}$$

Пусть теперь $T \leqslant 0$. Тогда $\arg \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z) \leqslant 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и, так как оператор $\tilde{H}$ полуограничен снизу, то существует такое $a > 0$, что $0 < \arg \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(x) < 1$ при $x < -a$. Поэтому функция $-\ln \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z+a)$ есть $\mathcal{S}$-функция и из (1.10) получаем, что $\xi(\lambda;\, H,\, \tilde{H}) \leqslant 0$, $\xi(\lambda;\, H,\, \tilde{H}) / (1 + a + \lambda) \in L^1(0, \infty)$ и

$$\ln \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z) = \int_a^\infty \frac{\xi(\lambda;\, H,\, \tilde{H})}{\lambda - z}\, d\lambda \quad \text{при } \operatorname{Im} z > 0. \tag{1.13}$$

В общем случае оператор T представим в виде

$$T = T_+ - T_-, \quad T_\pm \geqslant 0, \quad T_+ T_- = 0.$$

Пусть $H_1 = H + H^{1/2} T_+ H^{1/2}$.

Сначала предположим, что $H > 0$. Так как $H_1 \geqslant H > 0$, то из леммы 5 ([11], стр. 461) следует, что

$$|H_1^{-1/2} f| \leqslant |H^{-1/2} f| \qquad \forall f \in \mathfrak{D}(H^{-1/2}).$$

Поэтому оператор $H_1^{-1/2} H^{1/2}$ ограничен и

$$H^{1/2} T_- H^{1/2} = H_1^{1/2} T_1 H_1^{1/2},$$

где

$$T_1 = H_1^{-1/2} H^{1/2} T_- H^{1/2} H_1^{-1/2},$$

причем замыкание T_1 есть ядерный оператор. Таким образом,

$$\tilde{H} = H_1 - H_1^{1/2} T_1 H_1^{1/2}, \qquad \text{где} \quad T_1 \geqslant 0,\ T_1 \in \mathfrak{S}_1.$$

Поэтому имеют смысл определители возмущения $\tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H_1}(z)$ и $\tilde{\Delta}_{H_1/H}(z)$ и из (0.9) и леммы 1.1 следует, что

$$\tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z) = \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H_1}(z) \tilde{\Delta}_{H_1/H}(z). \tag{1.14}$$

Применяя формулы (1.12) и (1.13) к парам операторов H, H_1 и $H_1, \tilde{H}$ соответственно, и учитывая соотношение (1.14), получаем, что

$$\ln \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\xi(\lambda;\, H,\, \tilde{H})}{\lambda - z}\, d\lambda \qquad (\operatorname{Im} z > 0), \tag{1.15}$$

причем

$$\xi(\lambda;\, H,\, \tilde{H}) = \xi(\lambda;\, H,\, H_1) + \xi(\lambda;\, H_1,\, \tilde{H}).$$

Покажем, что предположение о существовании H^{-1} несущественно. Действительно, пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \ominus \mathrm{Ker} H$. Тогда, очевидно, что

$$\tilde{H}|_{\mathfrak{L}} = H|_{\mathfrak{L}} + (H|_{\mathfrak{L}})^{1/2} T_2 (H|_{\mathfrak{L}})^{1/2},$$

где $T_2 = PT|_{\mathfrak{L}}$ а P—ортопроектор, отображающий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{L}$. Учитывая, что $\xi(\lambda; H, \tilde{H}) = \xi(\lambda; H|_{\mathfrak{L}}, \tilde{H}|_{\mathfrak{L}})$ и $(H|_{\mathfrak{L}})^{-1}$ существует, приходим к уже рассмотренному случаю.

Таким образом, неравенство (1.6) доказано.

Для доказательства (1.7) заметим, что из (1.2) следует:

$$\tilde{H}^{-1} = H^{-1/2}(I+T)^{-1}H^{-1/2} = H^{-1/2}(I+T')H^{-1/2},$$

где $T' = (I+T)^{-1} - I \in \mathfrak{S}_1$.

Поэтому из уже доказанного неравенства (1.6) вытекает, что

$$\int^{\infty} \frac{|\xi(\lambda; H^{-1}, \tilde{H}^{-1})|}{\lambda} d\lambda < \infty.$$

Это вместе с легко проверяемым соотношением

$$\xi(\lambda; H, \tilde{H}) = -\xi(\lambda^{-1}; H^{-1}, \tilde{H}^{-1}) - m$$

дает неравенство (1.7).

Отметим, что неравенство (1.6) следует также из более общего утверждения — теоремы 2 из [20].

СЛЕДСТВИЕ. *Если функция* $\xi(\lambda; H, \tilde{H})$ *из теоремы* 1.1 *непрерывна справа в точке* $\lambda = 0$, *то* $\xi(+0; H, \tilde{H}) = -m$ *и, стало быть,*

$$\int_0 \frac{|\xi(\lambda; H, \tilde{H}) - \xi(+0; H, \tilde{H})|}{\lambda} d\lambda < \infty\cdot$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть* $\tilde{H} = H + H^{1/2}TH^{1/2}$, *где* $H \geqslant 0$ — *самосопряженный оператор*, $T = T^* \in \mathfrak{S}_1$ и $I + T \geqslant 0$. *Тогда*

$$\ln\det(I + PTP) = \int_0^{\infty} \frac{\xi(\lambda; H, \tilde{H})}{\lambda} d\lambda \tag{1.16}$$

где P — *ортопроектор, отображающий* $\mathfrak{H}$ *на* $\mathfrak{H} \ominus \mathrm{Ker} H$.

Доказательство. Так как $\tilde{H} = H^{1/2}(I+T)H^{1/2} \geqslant 0$, то $\xi(\lambda; H, \tilde{H}) = 0$ при $\lambda < 0$, и из (1.15) следует, что

$$\ln \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(-x) = \int_0^\infty \frac{\xi(\lambda; H, \tilde{H})}{\lambda + x}\, d\lambda \qquad (x > 0), \tag{1.17}$$

где

$$\tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(-x) = \det(I + W_x), \; W_x = (H + xI)^{-1/2} H^{1/2} T H^{1/2} (H + xI)^{-1/2}.$$

Легко видеть, что $\operatorname{s-lim}_{x \downarrow 0} H^{1/2}(H + xI)^{-1/2} = P$, и поэтому $W_x \to PTP$ $(x \downarrow 0)$ в ядерной норме. Таким образом, из равенства (1.17) получаем

$$\ln\det(I + PTP) = \lim_{x \downarrow 0} \int_0^\infty \frac{\xi(\lambda; H, \tilde{H})}{\lambda + x}\, d\lambda.$$

Если T имеет определенный знак, то такой же знак имеет и $\xi(\lambda; H, \tilde{H})$, и в этом случае можно утверждать, что

$$\lim_{x \downarrow 0} \int_0^\infty \frac{\xi(\lambda; H, \tilde{H})}{\lambda + x}\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{\xi(\lambda; H, \tilde{H})}{\lambda}\, d\lambda.$$

Итак, утверждение теоремы доказано, при знакоопределенном T. При рассмотрении общего случая, как и при доказательстве теоремы 1.1 воспользуемся каноническим разложением оператора T: $T = T_+ - T_-$. Тогда из уже сказанного в обозначениях доказательства теоремы 1.1 будет следовать, что

$$\ln\det(I + PT_+P) = \int_0^\infty \frac{\xi(\lambda; H, H_1)}{\lambda}\, d\lambda,$$

$$\ln\det(I - PT_1P) = \int_0^\infty \frac{\xi(\lambda; H_1, \tilde{H})}{\lambda}\, d\lambda,$$

где P — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H} \ominus \operatorname{Ker} H$. Так как $\tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H}(-x) = \tilde{\Delta}_{\tilde{H}/H_1}(-x)\, \tilde{\Delta}_{H_1/H}(-x)$, то после предельного перехода при $x \downarrow 0$ получаем, что $\det(I + PTP) = \det(I - PT_1P)\det(I + PT_+P)$.

Это соотношение вместе с равенством $\xi(\lambda; H, \tilde{H}) = \xi(\lambda; H, H_1) + \xi(\lambda; H_1, \tilde{H})$ дает (1.16). Теорема доказана.

3. Теорема 1.1 позволяет уточнить известную теорему Н. Левинсона.

Рассмотрим радиальное уравнение Шредингера

$$-\,d^2\psi \mid dr^2 + \mathscr{V}(r)\psi = k^2\psi \qquad (0 < r < \infty), \tag{1.18}$$

где потенциал $\mathscr{V}(r)$ удовлетворяет условию $r\mathscr{V}(r) \in L^1(0, \infty)$. Тогда, как известно (см., например, [18]), найдутся единственные решения $\psi(r, k)$ и $f(r, k)$ уравнения (1.18), удовлетворяющие соответственно условиям:

$$\psi(0, k) = 0, \quad \psi(r, k) = \sin(kr - \delta(k)) + 0(1) \quad (r \to \infty,\ \mathrm{Im} k = 0) \tag{1.19}$$

$$f(r, k) = e^{ikr}(1 + 0(1)) \quad (r \to \infty, \quad \mathrm{Im} k \geqslant 0).$$

Как показано в работе [3] (см. также [21]),

$$\xi(\lambda;\ H,\ \tilde{H}) = \frac{1}{\pi}\,\delta(\sqrt{\lambda}) \qquad (0 < \lambda < \infty) \tag{1.20}$$

$$\tilde{\Delta}_{\tilde{H}|H}(z) = f(0, \sqrt{z}) \quad \text{при } \mathrm{Im}\sqrt{z} \geqslant 0, \tag{1.21}$$

где H и $\tilde{H}$ — самосопряженные операторы в $L^2(0, \infty)$, порождаемые соответственно дифференциальными операциями

$$-\frac{d^2}{dr^2}, \quad -\frac{d^2}{dr^2} + \mathscr{V}(r)$$

и «начальным» условием из (1.19).

Отметим, что из $r\mathscr{V}(r) \in L^1(0, \infty)$ легко получить, что $T := H^{-1/2}VH^{-1/2} \in \mathfrak{S}_1$, причем

$$|T|_1 \leqslant \int_0^\infty \mathscr{V}(r)|\, dr. \tag{1.22}$$

Из соотношения (1.21) с учетом непрерывности $f(0, k)$ при $\mathrm{Im} k \geqslant 0$ следует, что $\det(I + T) = f(0, 0)$, и поэтому согласно (1.20) и теореме 1.1 имеет место

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть $r\mathscr{V}(r) \in L^1(0, \infty)$ и $f(0, 0) \neq 0$ (т.е. в точке $\lambda = 0$ отсутствует виртуальный уровень). Тогда*

$$\int_0 \frac{|\,\delta(k) + m\pi\,|}{k}\, dk < \infty,$$

где m — число отрицательных собственных значений оператора $\tilde{H}$.

Из этой теоремы, поскольку $\delta(k)$ непрерывна в точке $k = 0$, получается известное соотношение Н. Левинсона: $\delta(+0) = -m\pi$.

Отметим, между прочим, что из (1.4) и (1.22) вытекает хорошо известное неравенство:

$$m \leqslant \int_0^\infty r\,|\mathscr{V}(r)|\,\mathrm{d}r.$$

Если у оператора $\tilde{H}$ нет отрицательных собственных чисел, в частности, если $\mathscr{V}(r) \geqslant 0$ $(0 < r < \infty)$, то согласно теореме 1.2

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\delta(k)}{k}\,\mathrm{d}k = \ln f(0,0).$$

§ 2. СЛУЧАЙ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть* $G(>0)$ *— вполне непрерывный оператор и* $\tilde{G} = G^{1/2}(I+T)\,G^{1/2}$, *где* $TT^* \in \mathfrak{S}_1$. *Тогда, если существует* $(I+T)^{-1}$, *то сходится бесконечное произведение*

$$\prod_{j=1}^{\infty} (\lambda_j(\tilde{G})/\lambda_j(G)),$$

где $\{\lambda_j(\tilde{G})\}_1^\infty$ *и* $\{\lambda_j(G)\}_1^\infty$ *суть последовательности собственных чисел операторов* $\tilde{G}$ *и* G, *расположенных с учетом их кратности в порядке невозрастания их модулей.*

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

ЛЕММА 2.1. *Пусть* A *и* B *— полуограниченные снизу самосопряженные операторы с дискретным спектром,* $\overline{B - A} \in \mathfrak{S}_1$ *и пусть* $\{\lambda_j(A)\}_1^\infty$ *и* $\{\lambda_j(B)\}_1^\infty$ *соответственно их спектры собственных чисел, расположенных в порядке неубывания с учетом их кратности.*

Тогда при $-a < \gamma$, *где* $\gamma = \gamma_{A,B} = \min(\lambda_1(A),\ \lambda_1(B))$:

$$\int_\gamma^{\lambda_n(A)} \frac{\xi(\lambda;\ A,\ B)}{\lambda + a}\,\mathrm{d}\lambda \leqslant \sum_{j=1}^{n} \ln\frac{\lambda_j(B) + a}{\lambda_j(A) + a} \leqslant \int_\gamma^{\lambda_n(B)} \frac{\xi(\lambda;\ A,\ B)}{\lambda + a}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{2.1}$$

Доказательство. Имеем: $\xi(\lambda;\ A, B) = n(\lambda;\ A) - n(\lambda;\ B)$, где $n(\lambda;\ \cdot)$ — число собственных значений оператора $\cdot$, меньших λ. Поэтому

$$\int_\gamma^{\lambda} \frac{\xi(t;\ A,\ B)}{t + a}\,\mathrm{d}t = -\sum_{j=1}^{n} \ln(\lambda_j + a) + \sum_{j=1}^{m} \ln(\mu_j + a) + (n - m)\ln(\lambda + a), \tag{2.2}$$

где $\lambda_j = \lambda_j(A)$, $\mu_j = \lambda_j(B)$, $n = n(\lambda;\ A)$, $m = n(\lambda;\ B)$.

Если $\lambda_n < \mu_n$ т. е. $m \leqslant n$, то левое неравенство в (2.1) следует из (2.2) при $\lambda = \lambda_n(A)$, а правое — при $\lambda = \lambda_n(B)$. Если же $\lambda_n > \mu_n$, то для получения (2.1) следует поменять ролями A и B и учесть, что $\xi(\lambda;\ A,\ B) = -\xi(\lambda;\ B,\ A)$.

Может быть, стоит заметить, что справедливо более общее утверждение.

Пусть $f(t) \geqslant 0$ — локально интегрируемая функция. Тогда

$$\int_{\gamma}^{\lambda_n(A)} f(t)\ \xi(t;\ A,\ B)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{n} (\Phi(\lambda_j(B)) - \Phi(\lambda_j(A))) \leqslant \int_{\gamma}^{\lambda_n(B)} f(t)\ \xi(t;\ A,\ B)\,\mathrm{d}t,$$

где $\Phi(t)$ — первообразная для $f(t)$.

Доказательство теоремы. Применим лемму 2.1 к операторам $H = G^{-1}$ и $\widetilde{H} = \widetilde{G}^{-1}$ и в полученных неравенствах перейдем к пределу при $n \to \infty$. Тогда найдем, что

$$\ln \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(\tilde{H}) + a}{\lambda_j(H) + a} = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\xi(t;\, H, \tilde{H})}{t + a}\,\mathrm{d}t \qquad (\gamma = \gamma_{H,\tilde{H}},\ \ -a < \gamma).$$

Существенно, что в этом равенстве в силу теоремы 1.1 правая часть абсолютно сходится. Условия теоремы 1.1 здесь выполняются в силу соображений, изложенных при доказательстве неравенства (1.7). Так как среди собственных значений оператора $\tilde{G}$ могут быть и отрицательные, а собственные числа $\lambda_n(\tilde{G})$ пронумерованы в порядке возрастания, то может оказаться, что $\lambda_n(\widetilde{H}) \neq \lambda_n^{-1}(\widetilde{G})$ для некоторых n. Однако, так как число отрицательных собственных значений оператора $\tilde{G}$ конечно, то, начиная с некоторого номера, $\lambda_n(\widetilde{H}) = \lambda_n^{-1}(\widetilde{G})$, и поэтому

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(G)}{\lambda_n(\widetilde{G})}\ \frac{1 + a\lambda_n(\widetilde{G})}{1 + a\lambda_n(G)} = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\xi(\lambda;\ H,\ \widetilde{H})}{\lambda + a}\,\mathrm{d}\lambda \qquad (-a < \lambda).$$

Покажем, что бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + a\,\lambda_n(G)}{1 + a\lambda_n(\widetilde{G})} \tag{2.3}$$

сходится. Для этого достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ \lambda_n(\widetilde{G}) - \lambda_n(G)|. \tag{2.4}$$

Пусть m — число отрицательных собственных значений оператора $\widetilde{H}$. Тогда существует такое n_0, что

$$\lambda_n(\widetilde{G}) = \lambda_{n-m}^{+}(\widetilde{G}) \qquad \text{при } n - m \geqslant n_0,$$

где $\lambda_1^+(\widetilde{G}) \geqslant \lambda_2^+(\widetilde{G}) > \cdots$ — последовательность всех положительных собственных значений оператора $\widetilde{H}$. Поэтому

$$\sum_{n-m\geqslant n_0} |\lambda_n(\widetilde{G}) - \lambda_n(G)| = \sum_{n-m\geqslant n_0} |\lambda_{n-m}^{+}(\widetilde{G}) - \lambda_n(G)|.$$

Из очевидного неравенства

$$|\lambda_{n-m}^{+}(\widetilde{G}) - \lambda_n(G)| \leqslant |\lambda_{n-m}^{+}(\widetilde{G}) - \lambda_{n-m}(G)| + |\lambda_{n-m}(G) - \lambda_{n-m+1}(G)| + \ldots + |\lambda_{n-1}(G) - \lambda_n(G)|$$

следует, что

$$\sum_{n-m\geqslant n_0} |\lambda_n(\widetilde{G}) - \lambda_n(G)| \leqslant \sum_{n-m\geqslant n_0} |\lambda_{n-m}^{+}(\widetilde{G}) - \lambda_{n-m}(G)| + m\,|\lambda_{n_0}(G)|.$$

Теперь применим следующее неравенство, доказанное в работе А. С. Маркуса [17]: если $A, B \in \mathfrak{S}_\infty$, $A - B \in \mathfrak{S}_1$, то

$$\sum_n |\lambda_n^{-}(A) - \lambda_n^{-}(B)| + \sum_n |\lambda_n^{+}(A) - \lambda_n^{+}(B)| \leqslant |A - B|_1.$$

Получаем:

$$\sum_{n-m\geqslant n_0} |\lambda_n(\widetilde{G}) - \lambda_n(G)| \leqslant |\widetilde{G} - G|_1 + m\lambda_{n_0}(G) = |G^{1/2}TG^{1/2}|_1 + m\lambda_{n_0}(G).$$

Таким образом, ряд (2.4), а вместе с ним и бесконечное произведение (2.3), сходится. Теорема доказана.

В частности, из нее следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\widetilde{G})}{\lambda_n(G)} = 1.$$

Однако это более грубое соотношение, как показано в [5] (стр. 346, теорема 11.3), имеет место и при следующих предположениях, а именно: операторы $G\,(> 0)$ и $T = T^*$ вполне непрерывны и выполняется хотя бы одно из двух следующих условий:

1) существует $(I + T)^{-1}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} [\lambda_{n+1}(G)/\lambda_n(G)] = 1.$

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть* $G\,(\geqslant 0)$ — *вполне непрерывный оператор и*

$$\tilde{G} = G^{1/2}(I+T)G^{1/2}, \quad \text{где } T \in \mathfrak{S}_1.$$

Тогда, если $I+T \geqslant 0$, *то*

$$\prod_{n=1}^{N} (\lambda_n(\tilde{G})/\lambda_n(G)) = \det(I+PTP) \geqslant 0, \tag{2.5}$$

где P — *ортопроектор, отображающий* $\mathfrak{H}$ *на подпространство* $\mathfrak{H} \ominus \mathrm{Ker}G$, *а* $N\,(\leqslant \infty)$ — *размерность этого подпространства.*

Доказательство. Без ограничения общности можно полагать, что $G>0$, т.е. $P=I$. Действительно, пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \ominus \mathrm{Ker}G$. Тогда

$$\tilde{G}|_{\mathfrak{L}} = G|_{\mathfrak{L}} + (G|_{\mathfrak{L}})^{1/2}\, PT|_{\mathfrak{L}}\, (G|_{\mathfrak{L}})^{1/2},$$

где $G|_{\mathfrak{L}} > 0$. Так как, очевидно,

$$\lambda_n(G|_{\mathfrak{L}}) = \lambda_n(\tilde{G}), \qquad \lambda_n(\tilde{G}|_{\mathfrak{L}}) = \lambda_n(G),$$

$$\det(I+PTP) = \det((I|_{\mathfrak{L}} + PT|_{\mathfrak{L}}) \oplus I|_{\mathfrak{L}^\perp}) = \det(I|_{\mathfrak{L}} + PT|_{\mathfrak{L}}),$$

то, применяя (2.5) к операторам $G|_{\mathfrak{L}} > 0$ и $\tilde{G}|_{\mathfrak{L}}$, получим:

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n(\tilde{G})}{\lambda_n(G)} = \det(I|_{\mathfrak{L}} + PT|_{\mathfrak{L}}) = \det(I+PTP).$$

Итак, будем считать, что $G>0$. Дополнительно предположим, что $I+T>0$. Тогда существуют операторы $H=G^{-1}$ и $\tilde{H}=\tilde{G}^{-1}$ и к ним можно применить лемму 2.1 при $\alpha = 0\,(<\gamma = \min(\lambda_1(H), \lambda_1(\tilde{H}))$. Получаем:

$$\int_{\gamma}^{\lambda_n(H)} \frac{\xi(\lambda;\, H, \tilde{H})}{\lambda}\, d\lambda \leqslant \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{\lambda_j(\tilde{H})}{\lambda_j(H)} \leqslant \int_{\gamma}^{\lambda_n(\tilde{H})} \frac{\xi(\lambda;\, H, \tilde{H})}{\lambda}\, d\lambda.$$

Теперь учтем, что $\xi(\lambda;\, G, \tilde{G}) = -\,\xi(\lambda^{-1};\, H, \tilde{H})$ при $\lambda>0$. Будем иметь:

$$\int_{\lambda_n(G)}^{1/\gamma} \frac{\xi(\lambda;\, G, \tilde{G})}{\lambda}\, d\lambda \leqslant \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{\lambda_j(\tilde{G})}{\lambda_j(G)} \leqslant \int_{\lambda_n(\tilde{G})}^{1/\gamma} \frac{\xi(\lambda;\, G, \tilde{G})}{\lambda}\, d\lambda$$

или же

$$\exp\left(\int_{\lambda_n(G)}^{1/\gamma} \frac{\xi(\lambda;\, G, \tilde{G})}{\lambda}\, d\lambda\right) \leqslant \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j(\tilde{G})}{\lambda_j(G)} \leqslant \exp\left(\int_{\lambda_n(\tilde{G})}^{1/\gamma} \frac{\xi(\lambda;\, G, \tilde{G})}{\lambda}\, d\lambda\right).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и, учитывая теорему 1.2 $\left(\text{а также то, что } \xi(\lambda; G, \tilde{G}) = 0 \text{ при } \lambda > \frac{1}{\gamma}\right)$, придем к требуемому соотношению (2.5).

Остается рассмотреть случай, когда оператор $I + T (\geqslant 0)$ необратим. В этом случае $\det(I + T) = 0$ и мы должны показать, что левая часть (2.5) тоже обращается в 0.

Пусть $T \leqslant 0$ и $G_\varepsilon = G^{1/2}(I + \varepsilon T)G^{1/2}$, где $\varepsilon < 1$.

Очевидно, что $I + \varepsilon T > 0$ и $\lambda_n(\tilde{G}) \leqslant \lambda_n(G)$ и, так как бесконечный определитель непрерывен в ядерной норме, то

$$0 \leqslant \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(\tilde{G})}{\lambda_n(G)} \leqslant \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(G_\varepsilon)}{\lambda_n(G)} = \det(I + \varepsilon T) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \uparrow 1,$$

т. е.

$$\prod_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\tilde{G})/\lambda_n(G)) = 0.$$

В общем случае, когда оператор T не сохраняет определенный знак, мы, как и прежде, воспользуемся каноническим разложением: $T = T_+ - T_-$. Тогда будем иметь:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(G_1)/\lambda_n(G)) = \det(I + T_+), \tag{2.6}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\tilde{G})/\lambda_n(G_1)) = \det(I - T_1), \tag{2.7}$$

где

$$G_1 = G + G^{1/2} T_+ G^{1/2}, \quad \tilde{G} = G_1 - G^{1/2} T_- G^{1/2} = G_1 - G_1^{1/2} T_1 G_1^{1/2}.$$

Теперь заметим, что (см. доказательство теоремы 1.2)

$$\det(I + T) = \det(I + T_+) \det(I - T_1).$$

Это соотношение вместе с (2.6) и (2.7) показывает, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\tilde{G})/\lambda_n(G)) = \det(I + T) = 0.$$

Теорема 2.2 доказана.

§ 3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА В СЛУЧАЕ ОДНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Условимся говорить, что упорядоченная пара самосопряженных операторов (H_1, H_2), действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, унитарно эквивалентна паре самосопряженных операторов (H_1', H_2'), действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}'$, если существует оператор U, унитарно отображающий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$ так, что:

$$U\mathfrak{D}(H_k) = \mathfrak{D}(H_k'), \quad H_k'Uf = UH_kf \qquad \forall f \in \mathfrak{D}(H_k) \quad (k = 1,2).$$

Пару самосопряженных операторов (H_1, H_2) будем называть взаимно простой, если не существует такого нетривиального подпространства, которое приводит оба оператора H_1 и H_2 и в котором они совпадают.

До сих пор мы рассматривали возмущения V вида $V = H^{1/2}\, TH^{1/2}$, $T \in \mathfrak{S}_1$, т. е. такие V, для которых $H^{-1/2}\, VH^{-1/2} \in \mathfrak{S}_1$. Теперь подробнее изучим случай, когда T — одномерный оператор, причем вместо последнего условия накладывается несколько более слабое условие: $\mathrm{R}_{-a}^{1/2}(H) V \mathrm{R}_{-a}^{1/2}(H) \in \mathfrak{S}_1$ при некотором $a > 0$.

Легко видеть, что это условие инвариантно относительно выбора числа $a > 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для того, чтобы измеримая функция $\xi(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda < \infty)$ была функцией спектрального сдвига: $\xi(\lambda) = \xi(\lambda;\, H, \tilde{H})$ $(0 < \lambda < \infty)$ для самосопряженных операторов $H(\geqslant 0)$ и $\tilde{H} = H \dotplus (\cdot, \chi)\chi$, где $\chi \in \mathfrak{B}^*(H)$, $\chi \bar{\in} \mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$(3.1) \qquad 1)\ 0 \leqslant \xi(\lambda) \leqslant 1, \qquad 2)\ \int^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}\, \mathrm{d}\lambda < \infty, \qquad 3)\ \int^{\infty} \xi(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \infty.$$

При выполнении этих условий операторы H и $\tilde{H}$ указанного типа могут быть выбраны так, чтобы они были взаимно просты. Взаимно простая пара операторов H и $\tilde{H}$ определяется функцией ξ с точностью до унитарной эквивалентности.

Доказательство. Необходимость. Из формулы (1.5) с учетом легко проверяемого равенства

$$(I + (\cdot, \mathrm{R}_{\bar{z}}^{1/2}(H)\,\chi)\, \mathrm{R}_z^{1/2}(H)\,\chi)^{-1} = I - \frac{(\cdot, (\mathrm{R}_z^{1/2}(H))^*\chi)}{1 + (\mathrm{R}_z(H)\chi, \chi)}\, \mathrm{R}_z^{1/2}(H)\,\chi$$

следует

$$(3.2) \qquad R_z(\tilde{H}) - R_z(H) = -\, \frac{(\cdot, R_{\bar{z}}(H)\,\chi)}{1 + (R_z(H)\,\chi, \chi)}\, R_z(H)\chi.$$

Поэтому

$$\operatorname{Sp}(R_z(\tilde H) - R_z(H)) = -\frac{(R_z^2(H)\chi, \chi)}{1 + (R_z(H)\chi, \chi)} = -\frac{d}{dz} \ln \tilde\Delta_{\tilde H/H}(z),$$

где

$$\tilde\Delta_{\tilde H/H}(z) = 1 + (R_z(H)\chi, \chi) = 1 + \int_0^\infty \frac{d(E_\lambda \chi, \chi)}{\lambda - z}.$$

Это соотношение вместе с (0.3) дает

$$\ln\left(1 + \int_0^\infty \frac{d(E_\lambda\chi, \chi)}{\lambda - z}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) \xi(\lambda; H, \tilde H)\, d\lambda + C.$$

Теперь заметим, что $\ln \tilde\Delta_{\tilde H/H}(z)$ есть $\mathscr{S}$-функция, причем $\ln \tilde\Delta_{\tilde H/H}(-x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Поэтому из интегрального представления $\mathscr{S}$-функцией получаем, что $(1+\lambda)^{-1}\xi(\lambda;\ H,\ \tilde H) \in L^1(0, \infty)$ и

$$\ln\left(1 + \int_0^\infty \frac{d(E_\lambda \chi, \chi)}{\lambda - z}\right) = \int_0^\infty \frac{\xi(\lambda; H, \tilde H)}{\lambda - z}\, d\lambda. \tag{3.3}$$

Из $0 \leqslant \arg \tilde\Delta_{\tilde H/H}(z) \leqslant \pi$ при $\operatorname{Im} z > 0$ следует, что $0 \leqslant \xi(\lambda;\ H,\ \tilde H) \leqslant 1$. Так как $\chi \in \mathfrak{H}$, то $x\int_0^\infty \frac{d(E_\lambda\chi, \chi)}{\lambda + x} \to \infty$ при $x \to +\infty$ и поэтому из (3.3) следует, что $x\int_0^\infty \frac{\xi(\lambda; H, \tilde H)}{\lambda + x}\, d\lambda \to \infty$ при $x \to +\infty$, т.е. $\xi(\lambda; H, \tilde H) \in L^1(0, \infty)$.

Достаточность. Пусть функция $\xi(\lambda)$ удовлетворяет условиям (3.1). Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \exp\left(\int_0^\infty \frac{\xi(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda\right) \quad (z \in \operatorname{Ext}[0, \infty)).$$

Из $0 \leqslant \xi(\lambda) \leqslant 1$ следует, что $\operatorname{Im}\Phi(z)/\operatorname{Im} z > 0$. Кроме того, $\Phi(-x) > 1$ при $x > 0$ и $\Phi(-x) \to 1$ при $x \to \infty$. Поэтому $\Phi \in \mathscr{S}$ и

$$\Phi(z) = 1 + \int_0^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}.$$

Таким образом, получаем

$$\ln\left(1 + \int_0^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}\right) = \int_0^\infty \frac{\xi(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda. \tag{3.4}$$

Так как $\xi \in L^1(0, \infty)$, то отсюда легко получить, что $1 \in L^2_\sigma(0, \infty)$. В пространстве $\mathfrak{H} := L^2_\sigma(0, \infty)$ рассмотрим оператор умножения на λ.

Обозначим его через H. Из $(1+\lambda)^{-1/2} \in L^2_\sigma(0,\infty)$ следует, что $1 \in \mathfrak{B}^*(H)$. Теперь заметим, что соотношение (3.4) вместе с $\sigma(\lambda) = (E_\lambda 1, 1)$ и (3.3) дает $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; H, \tilde{H})$, где $\tilde{H} = H \underset{\smile}{+} (\cdot\,, 1)1$.

Для доказательства последнего утверждения теоремы сначала покажем, что если операторы $H(\geqslant 0)$ и $\tilde{H} = H \underset{\smile}{+} (\cdot, \chi)\chi$, $\chi \in \mathfrak{B}^*(H)$ взаимно просты, то их можно реализовать в пространстве $L^2_\sigma(0,\infty)$, $\sigma(\lambda) = (E_\lambda \chi, \chi)$ как, соответственно, оператор A умножения на λ и $\tilde{A} = A \underset{\smile}{+} (\cdot, 1)1$, $1 \in \mathfrak{B}^*(A)$.

Очевидно, что $E(\Delta)\chi \in \mathfrak{H}$ для любого $\Delta \subset (-\infty, \infty)$. Из взаимной простоты операторов H и $\tilde{H}$ следует, что замыкание линейной оболочки $\{E(\Delta)\chi;\, \Delta \subset (-\infty, \infty\}$ совпадает с $\mathfrak{H}$. Определим на этой линейной оболочке оператор W, полагая $WE(\Delta)\chi = \chi_\Delta(\lambda)$ $(\Delta \subset (-\infty,\infty))$, где $\chi_\Delta(\lambda)$ — характеристическая функция интервала Δ. После замыкания W станет изометрическим оператором, переводящим $\mathfrak{H}$ на $L^2_\sigma(0, \infty)$. При этом оператор H перейдет в оператор A умножения на λ: $H = W^{-1}AW$. Покажем, что также $\tilde{H} = W^{-1}\tilde{A}W$ для чего достаточно проверить, что $R_z(\tilde{H}) = W^{-1}R_z(\tilde{A})W$. Заметим, что $W(R_z(H)\chi) = R_z(A)1$ и $(R_z(H)\chi, \chi) = (R_z(A)1, 1)$. Отсюда и из формулы (3.2) следует, что

$$R_z(\tilde{H}) = R_z(H) - \frac{(\cdot, W^{-1}R_z(A)1)}{1 + (R_z(A)\,1, 1)} W^{-1}R_z(A)1 = W^{-1}R_z(\tilde{A})\,W.$$

Пусть теперь $\xi(\lambda; H, \tilde{H}) = \xi(\lambda; H_1, \tilde{H}_1)$. Тогда из (3.3) будет следовать, что $(E_\lambda(H)\chi, \chi) = (E_\lambda(H_1)\chi_1, \chi_1) = \sigma(\lambda)$, и поэтому операторы H и H_1 с помощью унитарных операторов W и W_1 соответственно переходят в оператор A умножения на λ в пространстве $L^2_\sigma(0, \infty)$, а $\tilde{H}$ и $\tilde{H}_1$ — в оператор $\tilde{A} = A \underset{\smile}{+} (\cdot\,, 1)1$. Таким образом, $H_1 = UHU^{-1}$, $\tilde{H}_1 = U\tilde{H}U^{-1}$, где $U = W_1 W$, что и требовалось доказать.

Отметим, что в рассуждениях статьи [8] по существу уже содержалось следующее утверждение.

Пусть $\xi \in L^1(-\infty, \infty)$ и $0 \leqslant \xi(\lambda) \leqslant 1$. В этом и только этом случае существует взаимно простая пара самосопряженных операторов H и $\tilde{H} = H + (\cdot\,, \varphi)\,\varphi$, действующих в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ $(\varphi \in \mathfrak{H})$, такая, что $\xi(\lambda; H, \tilde{H}) = \xi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Пара $(H, \tilde{H})$ определяется функцией ξ с точностью до унитарной эквивалентности.

ЗАМЕЧАНИЕ. В общей теории возмущений операторов упорядоченной паре „близких" самосопряженных операторов H и $\tilde{H}$ сопоставляется так называемая $\mathcal{S}$-матрица рассеяния. При определенных условиях, в частности, при одномерном возмущении она оказываетса скалярной, равной $\mathcal{S}(\lambda) = \exp(2\pi i\, \xi(\lambda))$.

В случае, когда оператор T конечномерен и ранга > 1, совершенно очевидно, что пара $(H, \tilde{H})$ не восстанавливается единственным образом с точностью до унитарной эквивалентности по функции ξ и подавно по функции $\mathscr{S}$. Тем не менее, как известно [12], [18], пара H и $\tilde{H}$, рассмотренная в § 1, п. 3, восстанавливается по функции $\mathscr{S}$ (т.е. восстанавливается потенциал). Этот «парадокс» объясняется тем, что в этом случае оператор H наперед фиксирован, а от возмущения V требуется, чтобы оно было локального типа.

§4. ФУНКЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА ДЛЯ ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЙ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ ЭРМИТОВА ОПЕРАТОРА

1. Пусть H_0 — некоторый положительный эрмитов оператор с плотной областью определения, имеющий положительно дефектное число. Тогда по известной теореме Фридрихса у него всегда существует неотрицательное самосопряженное расширение. Если такое расширение неединственно, то найдутся [11] два крайних расширения H_M и H_μ, называемые соответственно мягким и жестким расширением (или расширением по Фридрихсу) оператора H_0, характеризуемые тем, что любое самосопряженное расширение $\tilde{H}$ оператора H_0 будет неотрицательным тогда и только тогда, когда

$$(H_\mu + aI)^{-1} \leqslant (\tilde{H} + aI)^{-1} \leqslant (H_M + aI)^{-1}.$$

Здесь a — произвольное положительное число.

Если положительный эрмитов оператор H_0 имеет единственное неотрицательное самосопряженное расширение H, то условимся полагать

$$H_M = H_\mu = H.$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть H_0 — простой положительный плотно определенный эрмитов оператор с дефектным числом, равным 1, с $H_\mu \neq H_M$ и пусть $H(\geqslant 0)$ — его фиксированное расширение, отличное от H_μ. Тогда с точностью до скалярного множителя ($\neq 0$) найдется единственный элемент $\chi \in \mathfrak{B}^*(H) \setminus \mathfrak{H}$, такой, что множество всех самосопряженных расширений $\tilde{H}$ оператора H_0, отличных от жесткого, будет описываться формулой*

$$\tilde{H} = H \underset{\smile}{+} \gamma(\cdot\,,\ \chi)\chi, \qquad -\infty < \gamma < \infty. \tag{4.1}$$

Если $H = H_M$, то в формуле (4.1) *положительным расширением $\tilde{H}(\neq H_\mu)$ и только им будет отвечать неотрицательные γ.*

Доказательство. Пусть φ ($|\varphi| = 1$) — дефектный элемент оператора H_0: $\varphi \perp (H_0 + iI)\mathfrak{D}(H_0)$. Тогда, как известно [11], $\varphi \in \mathfrak{D}(H^{1/2})$ и, следовательно, $\chi := (H - iI)\varphi \in \mathfrak{B}^*(H)$. Кроме того в силу определения: $\chi \neq 0$ и $(\chi, f) = 0$ $\forall f \in \mathfrak{D}(H_0)$, поэтому $\chi \overline{\in} \mathfrak{H}$.

Множество $\mathbf{M}(H_0)$ всех самосопряженных расширений $\tilde{H}$ оператора H_0 можно поставить в одно-однозначное соответствие с множеством всех точек $\exp(i\theta)$ единичной окружности так, что

$$\tilde{U} = U(I + \tau(\cdot\ , \varphi)\varphi), \qquad \tau = e^{i\theta} - 1, \tag{4.2}$$

где U и $\tilde{U}$ — преобразования Кэли операторов H и $\tilde{H}$:

$$U = (iI - H)(iI + H)^{-1}, \qquad \tilde{U} = (iI - \tilde{H})(iI + \tilde{H})^{-1}.$$

Из (4.2) следует:

$$(\tilde{H} + iI)^{-1} = (H + iI)^{-1} + \frac{\tau}{2i}(\cdot\ , \varphi)\, U\varphi. \tag{4.3}$$

Положим для любого $\gamma \in (-\infty, \infty)$

$$H_\gamma := H \dotplus \gamma(\cdot, \chi)\chi \quad (\chi := (H - iI)\varphi \in \mathfrak{B}^*(H)); \tag{4.4}$$

тогда (см. вывод (3.2))

$$R_z(H_\gamma) = R_z(H) - \frac{\gamma(\cdot, R_{\bar{z}}(H)\chi)}{1 + \gamma(R_z(H)\chi, \chi)} R_z(H)\chi. \tag{4.5}$$

Отсюда при $z = -i$ получаем

$$(H_\gamma + iI)^{-1} = (H + iI)^{-1} + \frac{\gamma(\cdot, \varphi)U\varphi}{1 + \gamma((H - iI)\varphi, \varphi)}.$$

Сопоставление этой формулы с формулой (4.3) показывает, что оператор H_γ является самосопряженным расширением $\tilde{H}$ оператора H_0, которому отвечает преобразование Кэли $\tilde{U}$ с

$$\tau = 2i\gamma/(1 + \gamma((H - iI)\varphi, \varphi)).$$

Когда γ пробегает интервал $(-\infty, \infty)$, точка $e^{i\theta}$ пробегает всю единичную окружность с выключенной точкой $\exp(i\theta_\mu) = 1 + \tau_\mu$, где $\tau_\mu = 2i/((H - iI)\varphi, \varphi)$. Таким образом, множество операторов $\{H_\gamma; -\infty <$

$< \gamma < \infty\}$ совпадает с множеством $\mathbf{M}(H_0)$, из которого исключен один единственный оператор; он, очевидно, получается по формуле (4.3) при значении $\tau = \tau_\mu$, соответствующему $\gamma = \infty$. Поэтому этот оператор естественно обозначить H_∞. Покажем, что $H_\infty = H_\mu$.

Из равенства (4.3) при $\tau = \tau_\mu$ легко выводится соотношение

$$\text{(4.6)} \qquad \mathrm{R}_z(H_\infty) = \mathrm{R}_z(H) - \frac{(\cdot, \mathrm{R}_{\bar z}(H)\chi)}{(\mathrm{R}_z(H)\chi, \chi)} \mathrm{R}_z(H)\chi.$$

Оно также получается путем формального в предельного перехода (4.5) при $\gamma \to \infty$; впрочем, этот естественный предельный переход допускает простое обоснование.

Если при некотором γ оператор H_γ не является неотрицательным оператором, то его отрицательный спектр состоит из одного простого собственного числа $\lambda = -a(< 0)$. Согласно (4.5) число $\lambda = -a\,(<0)$ будет собственным числом оператора H_γ в том и только в том случае, когда

$$0 = 1 + \gamma(\mathrm{R}_{-a}(H)\chi, \chi) \ \left(= 1 + \gamma\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}(E_\lambda\chi, \chi)}{\lambda + a}\right).$$

Таким образом, оператор H_γ не будет неотрицательным в том и только том случае, когда

$$-J < \frac{1}{\gamma} < 0, \quad \text{где } J := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}(E_\lambda\chi, \chi)}{\lambda} \quad (\leqslant \infty),$$

и, следовательно, он будет неотрицателен тогда и только тогда, когда либо 1) $1/\gamma \geqslant 0$, либо 2) $1/\gamma + J \leqslant 0$. В первом случае при любом $z = -a < 0$ из (4.5) и (4.6) непосредственно следует, что

$$(H_\infty + aI)^{-1} \leqslant (H_\gamma + aI)^{-1} \quad (\leqslant (H + aI)^{-1}).$$

Во втором случае в силу неравенства $(\mathrm{R}_{-a}(H)\,\chi, \chi) < J$:

$$\gamma/(1 + \gamma(\mathrm{R}_{-a}(H)\chi, \chi)) = 1/\left(\frac{1}{\gamma} + (\mathrm{R}_{-a}(H)\chi, \chi)\right) < 1/\left(\frac{1}{\gamma} + J\right) < \infty.$$

Поэтому из (4.5) и (4.6) снова будет следовать, что

$$(H_\infty + aI)^{-1} \leqslant (H_\gamma + aI)^{-1} \quad (\geqslant (H + aI)^{-1}).$$

Итак, $(H_\infty + aI)^{-1} \leqslant (\tilde H + aI)^{-1}$ для всех положительных расширений $\tilde H \in \mathbf{M}(H_0)$, откуда $H_\infty = H_\mu$. Таким образом, представление (4.1) требуемого типа получено. Если в нем положить $\chi = c\chi'$ $(c \neq 0)$, то оно перейдет в представление того же типа $\tilde H = H \underset{\smile}{+} \gamma'(\cdot, \chi')\chi'$, где $\gamma' = |c|^2\gamma \in (-\infty, \infty)$.

Обратно, если $\{\tilde{H};\ \tilde{H} = H \dotplus \gamma'(\cdot\,, \chi')\,\chi'\}$ есть множество $\mathbf{M}(H_0)\diagdown\{H_\mu\}$, то оно, в частности, будет содержать элемент $H_1 = H\dotplus(\cdot\,,\ \chi)\chi$, т.е. при некотором $\gamma' = \gamma_0'$ будем иметь $H\dotplus(\cdot,\ \chi)\chi = H\dotplus\gamma_0'(\cdot,\ \chi')\chi'$, откуда $(\cdot, \chi)\chi = \gamma_0'(\cdot,\ \chi')\chi'$. Так как всегда найдется такое $f \in \mathfrak{D}(H^{1/2})$, что $(f, \chi) \neq 0$, то отсюда следует, что $\chi = c\chi'$ $(c \neq 0)$.

Нам осталось доказать последнее утверждение теоремы. По существу мы попутно уже его доказали и даже с тем добавлением, что $H = H_M$ в том и только том случае, когда $J = \infty$, т.е.,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}(E_\lambda\chi,\ \chi)}{\lambda} = \infty. \tag{4.7}$$

В самом деле, в этом и только этом случае, как было выяснено, множество операторов $\{H_\gamma;\ 0 \leqslant \gamma \leqslant \infty\}$ совпадает с множеством всех положительных операторов из $\mathbf{M}(H_0)$, и из неравенства

$$(H + aI)^{-1} \leqslant (H_\gamma + aI)^{-1} \quad (0 \leqslant \gamma \leqslant \infty),$$

следует, что $H = H_M$.

СЛЕДСТВИЕ. *Множество $\mathbf{M}_+(H_0)$ всех неотрицательных расширений оператора H_0 из теоремы 4.1 образует вполне упорядоченный сегмент, если для $H_1, H_2 \in \mathbf{M}_+(H_0)$ условиться писать $H_1 \prec H_2$, когда $H_1 \neq H_2$ и $(H_2 + aI)^{-1} \leqslant (H_1 + aI)^{-1}$ при каком-либо фиксированном $a > 0$.*

В самом деле, по теореме 4.1 множество $\mathbf{M}_+(H_0)$ совпадает с множеством всех $H_\gamma = H_M + \gamma(\cdot, \chi)\chi$. Легко видеть, что соотношение $H_{\gamma_1} \prec H_{\gamma_2}$ $(0 \leqslant \gamma_1,\ \gamma_2 < \infty)$ означает не что иное, как то, что $\gamma_1 < \gamma_2$. Очевидно, крайними точками сегмента $\mathbf{M}_+(H_0)$ являются $H_0 = H_M$ и $H_\infty = H_\mu$.

Теорема 4.1 допускает обобщение (несколько более сложно формулируемое) на случай, когда простой положительный плотно определенный оператор H_0 имеет любое дефектное число $< \infty$, на этом, однако, мы не будем останавливаться.

ТЕОРЕМА 4.2. *Для того, чтобы некоторая измеримая функция $\xi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ была функцией спектрального сдвига: $\xi(\cdot) = \xi(\cdot, H, \tilde{H})$ для двух неотрицательных расширений $H \prec \tilde{H}$ некоторого простого эрмитова оператора H_0 с дефектным числом, равным 1, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\quad \xi(\lambda) = 0 \quad \forall\, \lambda < 0, \quad 0 \leqslant \xi(\lambda) \leqslant 1 \quad \forall \lambda \geqslant 0$

и, кроме того, выполнялись либо условия

2) $$\int^\infty \xi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \infty, \qquad \int^\infty \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda < \infty,$$

либо условия

2′) $$\int^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \infty, \quad \int^{\infty} \frac{1-\xi(\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \infty.$$

При выполнении группы условий 1) *и* 2), *или группы* 1) *и* 2′) *пара операторов* H *и* $\tilde{H}$ (*а с ними и оператор* H_0) *будут определяться функцией* ξ *с точностью до унитарной эквивалентности. При этом, в случае выполнения условий* 1) *и* 2) (*условий* 1) *и* 2′)) *будем иметь* $\tilde{H} \prec H_\mu$ $(\tilde{H} = H_\mu)$.

В том и другом случае равенство $H = H_M$ *будет иметь место точно тогда, когда*

(4.8) $$\int_0 \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \infty.$$

Доказательство. a) Необходимость условий 1) и 2) для случая, когда $\tilde{H} \prec H_\mu$, вытекает из теорем 3.1 и 4.1.

b) Рассмотрим случай, когда $\xi(\cdot) = \xi(\cdot\,; H, \tilde{H})$ и $\tilde{H} = H_\mu$. Согласно теореме 4.1 найдется элемент $\chi \in \mathfrak{B}^*(H)\diagdown\mathfrak{G}$, позволяющий дать описание множества $\mathbf{M}(H_0)\diagdown\{H_\mu\}$ с помощью формулы (4.1). Для нас существенно, что он позволяет получить для резольвенты $\mathrm{R}_z(H_\mu)$ представление (4.6). В силу этого представления

(4.9) $$\mathrm{Sp}(\mathrm{R}_z(H_\mu) - \mathrm{R}_z(H)) = -\frac{(\mathrm{R}_z^2(H)\chi, \chi)}{(\mathrm{R}_z(H)\chi, \chi)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(\mathrm{R}_z(H)\chi, \chi).$$

Из этого соотношения, формулы (0.3) и того, что $\mathrm{Im}(\mathrm{R}_z(H)\chi, \chi) > 0$ при $\mathrm{Im}z > 0$, а $(\mathrm{R}_{-x}(H)\chi, \chi) > 0$ при $x > 0$, выводим:

(4.10) $$\ln(\mathrm{R}_z(H)\chi, \chi) = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\xi(\lambda; H, H_\mu)\,\mathrm{d}\lambda + C.$$

Стоящая в левой части ветвь $\ln(\mathrm{R}_z(H)\chi, \chi)$ выбирается так, чтобы $0 \leqslant \mathrm{Im}\ln(\mathrm{R}_z(H)\chi, \chi) \leqslant \pi$, а тогда C будет вещественно константой. Появление константы C объясняется тем, что обобщенный элемент χ определяется операторами H и H_μ с точностью до скалярного множителя: последним можно так распорядиться, чтобы $C = 0$. Из (4.10), в частности, следует, что функция $\xi(\cdot\,; H, H_\mu)$ удовлетворяет условию 1).

С другой стороны, так как $\chi \in \mathfrak{B}^*(H)\diagdown\mathfrak{H}$, то

(4.11) $$(\mathrm{R}_{-x}(H)\chi, \chi) = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}(E_\lambda\chi, \chi)}{\lambda + x} \to 0$$

(4.12) $$x(\mathrm{R}_x(H)\chi, \chi) = x\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}(E_\lambda\chi, \chi)}{\lambda + x} \to \infty.$$

Из последнего соотношения вытекает, что

$$\ln x + \ln(\mathrm{R}_{-x}(H)\chi, \chi) \to \infty \quad (x \to +\infty),$$

а, если учесть (4.10) и равенство

$$\ln x = -\int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda + x} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) \mathrm{d}\lambda \quad (0 < x < \infty),$$

то также вытекает, что

$$\int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{1}{\lambda + x}\right)(1 - \xi(\lambda;\, H,\, H_\mu))\, \mathrm{d}\lambda \to \infty \quad (x \to +\infty).$$

Так как по доказанному $1 - \xi(\lambda) \geqslant 0 \quad \forall\, \lambda \geqslant 0$, а $1/(\lambda + x) \downarrow 0$ при $x \uparrow \infty$ при любом фиксированном $\lambda \geqslant 0$ и

$$\frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{1}{\lambda + x} = \frac{\lambda x - 1}{(\lambda + x)(1+\lambda^2)} \quad \text{при } \lambda,\ x > 1,$$

то полученное предельное соотношение эквивалентно тому, что

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{1+\lambda^2}(1 - \xi(\lambda; H, H_\mu))\mathrm{d}\lambda = \infty.$$

Это равенство, в свою очередь, очевидным образом эквивалентно второму из условий 2').

Необходимость первого из условий 2') получается еще проще. Из (4.10) и (4.11) следует, что

$$\int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{1}{\lambda + x}\right)\xi(\lambda;\, H,\, H_\mu)\, \mathrm{d}\lambda \to +\infty \quad (x \to +\infty).$$

Рассуждая как и выше, найдем, что

$$\int_0^\infty \frac{\lambda\xi(\lambda;\, H,\, H_\mu)}{1+\lambda^2}\, \mathrm{d}\lambda = \infty.$$

Итак, необходимость условий 1) и 2) при $\tilde{H} \prec H_\mu$ и условий 1) и 2') при $\tilde{H} = H_\mu$ доказана.

c) Докажем достаточность каждой из групп условий 1), 2) и 1), 2').

На основании теоремы 3.1 это совсем просто получается для группы условий 1) и 2). Если некоторая измеримая функция $\xi(\lambda)$ им удовлетворяет, то по теореме 3.1 найдутся два взаимно простых самосопряженных оператора $H(\geqslant 0)$ и $\tilde{H} = H \underset{\smile}{+} (\cdot, \chi)\chi$, с $\chi \in \mathfrak{B}^*(H) \diagdown \mathfrak{H}$, такие, что $\xi(\cdot) = \xi(\cdot; H, \tilde{H})$. Обозначим через $\mathfrak{D}_0$ множество всех $f \in \mathfrak{D}(H)$ таких, что $(\chi, f) = 0$. Так как $\chi \bar{\in} \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{D}_0$ — линеал плотный в $\mathfrak{H}$. Легко видеть, что $H_0 := H|_{\mathfrak{D}_0} = \tilde{H}|_{\mathfrak{D}_0}$. Из взаимной простоты операторов H и $\tilde{H}$ следует простота эрмитова оператора $H_0(\geqslant 0)$. Очевидно, операторы H и $\tilde{H}$ суть расширения оператора H_0. Остается показать, что оператор H_0 имеет дефектное число, равное 1. Для этого достаточно показать, что $(H_0 + I)\mathfrak{D}_0$ подпространство коразмерности, равной 1. Так как $(H + I)^{-1}\mathfrak{H} \subset \mathfrak{D}(H^{1/2})$, то $g = (H + I)^{-1}\chi \in \mathfrak{H}$, но тогда для любого $f \in \mathfrak{D}_0(\subset \mathfrak{D}(H))$ имеем: $(g, (H_0 + I)f) = ((H + I)g, f) = (\chi, f) = 0$, т. е. $g \perp (H_0 + I)\mathfrak{D}_0$. С другой стороны, если некоторое $h \perp g$ $(h \in \mathfrak{H})$, т. е. $((H + I)^{-1}\chi, h) = 0$, то $(\chi, (H + I)^{-1}h) = 0$, откуда $f := (H+I)^{-1}h \in \mathfrak{D}_0$ и $h = (H + I)f \in (H_0 + I)\mathfrak{D}_0$. Итак, достаточность групы условий 1) и 2) доказана. Так как в силу теоремы 3.1 при выполнении этих условий взаимно простая пара операторов $H(\geqslant 0)$ и $\tilde{H} = H \underset{\smile}{+} (\cdot, \chi)\chi$ определяется с точностью до унитарного преобразования, то и в этой части теорема 4.1 доказана для условий 1) и 2).

d) Перейдем теперь к рассмотрению групп условий 1) и 2'). Пусть $\xi(\cdot)$ — некоторая измеримая функция, удовлетворяющая этим условиям. Как и при доказательстве теоремы 3.1 рассмотрим функцию

$$(4.13) \qquad F(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) \xi(\lambda)\, d\lambda \qquad z \in \operatorname{Ext}[0, \infty).$$

Из условий 2') следует, что

$$(4.14) \qquad F(-x) \to -\infty, \quad \ln x + F(-x) \to \infty \qquad (x \to +\infty).$$

Образуем функцию

$$(4.15) \qquad \Phi(z) = \exp F(z), \qquad z \in \operatorname{Ext}[0, \infty).$$

В силу условий 1): $0 \leqslant \operatorname{Im} F(z) < \pi$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и, следовательно, $\operatorname{Im}\Phi(z)/\operatorname{Im} z \geqslant 0$ при $z \in \operatorname{Ext}[0, \infty)$. Кроме того, $\Phi(-x) > 0$ при $x > 0$. Поэтому Φ есть $\mathcal{S}$-функция, и так как $\Phi(-x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то она допускает представление

$$\Phi(z) = \int_0^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} \qquad z \in \operatorname{Ext}[0, \infty).$$

Из второго соотношения (4.14) легко следует, что $1 \bar{\in} L^2_\sigma(0, \infty)$. Таким образом, существует неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ $(0 < \lambda < \infty)$ такая, что $1 \bar{\in} L^2_\sigma(0, \infty)$, $(1+\lambda)^{-1/2} \in L^2_\sigma(0, \infty)$ и

$$\ln\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\sigma(\lambda)}{\lambda - z}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\xi(\lambda)\mathrm{d}\lambda. \tag{4.16}$$

Пусть теперь H — оператор умножения на λ в пространстве $\mathfrak{H} := L^2_\sigma(0, \infty)$. Положим $\chi = 1$ и определим антилинейный функционал (χ, f) на $\mathfrak{D}(H^{1/2})$ естественным равенством:

$$(\chi, f) = \int_0^\infty \overline{f(\lambda)}\, \mathrm{d}\sigma(\lambda) \qquad \forall f \in \mathfrak{D}(H^{1/2}).$$

Для $f \in \mathfrak{D}(H^{1/2})$

$$|(\chi, f)| \leqslant \int_0^\infty |f(\lambda)|\, \mathrm{d}\sigma(\lambda) \leqslant \left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\sigma(\lambda)}{1+\lambda}\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty (1+\lambda)|f(\lambda)|^2\, \mathrm{d}\sigma(\lambda)\right)^{1/2} =$$

$$= \Phi(-1)^{1/2}\, |(I+H)^{1/2} f| < \infty.$$

Учитывая еще, что $1 \bar{\in} L^2_\sigma$, заключаем, что $\chi \in \mathfrak{B}^*(H) \diagdown \mathfrak{H}$.

Рассмотрим сужение H_0 оператора H на

$$\mathfrak{D}(H_0) = \{f;\ f \in \mathfrak{D}(H),\ (\chi, f) = 0\}.$$

Как было уже выяснено в c), оператор H будет положительным простым оператором с дефектным числом, равным единице. Обозначим через H_μ его жесткое расширение.

Для H и H_μ по доказанному в пункте b) имеет место соотношение (4.10), а так как в данном случае

$$(\mathrm{R}_z(H)\chi,\ \chi) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\sigma(\lambda)}{\lambda - z},$$

то левая часть этого соотношения совпадает с левой частью соотношения (4.16). Сравнение правых частей дает $\xi(\cdot) = \xi(\cdot\ ;\ H,\ H_\mu)$. Предпоследнее утверждение теоремы 4.2 для случая, когда функция удовлетворяет условиям 1) и 2′), доказывается аналогично тому, как для случая, когда эта функция удовлетворяет условиям 1) и 2), т. е. аналогично тому, как доказывается соответствующее утверждение теоремы 3.1.

Поясним только, что, как бы ни была выбрана взаимно простая пара H и H_μ, отвечающая функции ξ $(\xi(\cdot) = \xi(\cdot\ ;\ H,\ H_\mu))$, удовлетворяющей условиям 1) и 2′), этой паре будет отвечать элемент $\chi \in \mathfrak{B}^*(H) \diagdown \mathfrak{H}$ такой, что $(\mathrm{R}_z(H_\mu)\chi,\ \chi)$ будет однозначно определяться формулой (4.10) с константой $C = 0$, а $(\mathrm{R}_z(H_\mu)\chi, \chi)$ — формулой (4.6), в которой следует положить H_∞. Остается доказать последнее утверждение теоремы.

В процессе доказательства теоремы 4.1, по существу, было доказано следующее предложение.

Пусть H простой самосопряженный положительный оператор в $\mathfrak{H}$, $\chi \in \mathfrak{B}^*(H) \setminus \mathfrak{H}$ и H_0 сужение H на $\mathfrak{D}(H) = \{f;\, f \in \mathfrak{D}(H),\, (\chi, f) = 0\}$. Тогда H будет мягким расширением для H_0 точно тогда, когда выполняется условие (4.7).

Левая часть в (4.7) есть предел $\lim\limits_{x \downarrow 0}(\mathrm{R}_{-x}(H)\chi, \chi)$. В случае, когда $H \prec \tilde{H}\,(\prec H_\mu)$, этот предел может быть найден с помощью формулы (3.3), которая дает

$$\lim_{x \downarrow 0}[\ln(\mathrm{R}_{-x}(H)\chi,\ \chi) + 1] = \int_0^\infty \frac{\xi(\lambda;\ H,\ \tilde{H})}{\lambda}\, \mathrm{d}\lambda.$$

Так как в рассматриваемом случае функция ξ удовлетворяет условиям 1) и 2), то интеграл, стоящий в правой части равен ∞ в том и только том случае, когда выполняется условие (4.8). Если же $\tilde{H} = H_\mu$, то мы можем воспользоваться соотношением (4.10), согласно которому

$$\lim_{x \downarrow 0} \ln(\mathrm{R}_{-x}(H)\,\chi, \chi) = \int_0^\infty \frac{\xi(\lambda;\, H, H_\mu)}{\lambda(1+\lambda)}\, \mathrm{d}\lambda + C.$$

Так как в рассматриваемом случае функция ξ удовлетворяет условиям 1), то стоящий в правой части интеграл равен бесконечности снова в том и только том случае, когда выполняется условие (4.8).

Теорема 4.2 доказана.

2. Пусть эрмитов оператор $H_0 (\geqslant 0)$ с индексом дефекта, равным 1, такой, что его самосопряженные расширения имеют дискретный спектр. Тогда, как известно, спектры $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и $\{\mu_n\}_1^\infty$ его расширений $H \geqslant 0$ и $\tilde{H} \geqslant 0$ перемежаются. Поэтому

$$\xi(\lambda;\ H,\ \tilde{H}) = \begin{cases} 1, & \lambda_n < \lambda < \mu_n \\ 0, & \mu_n < \lambda < \lambda_{n+1} \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\mu_n} \xi(\lambda;\ H,\ \tilde{H})\, \mathrm{d}\lambda = \sum_{j=1}^n (\mu_j - \lambda_j), \qquad \int_{\lambda_2}^{\mu_n} \frac{\xi(\lambda;\ H,\ \tilde{H})}{\lambda}\, \mathrm{d}\lambda = \ln \prod_{j=2}^n \frac{\mu_j}{\lambda_j},$$

$$\int_{\mu_1}^{\lambda_{n+1}} \frac{1 - \xi(\lambda;\, H,\, \tilde{H})}{\lambda}\, \mathrm{d}\lambda = \ln \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_{j+1}}{\mu_j}.$$

Эти соотношения вместе с теоремой 4.2 приводят к следующему предложению.

ТЕОРЕМА 4.3. *Перемежающиеся последовательности* $\{\lambda_n\}_1^\infty$, $\{\mu_n\}_1^\infty$ $(0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \mu_1)$ *совпадают с последовательностями собственных значений двух расширений некоторого эрмитова оператора с дефектным числом, равным* 1, *в том и только том случае, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \infty, \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\mu_n} = \infty. \tag{4.17}$$

При этом, $\{\mu_n\}_1^\infty$ *будет последовательностью собственных значений жесткого расширения в том и только том случае, если кроме* (4.17) *выполняется условие*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = \infty.$$

Первое утверждение этой теоремы было получено К. Х. Бойматовым [2]. Второе утверждение также было получено этим автором [2], но в несколько иной форме без использования понятия жесткого расширения.

§ 5. МОЖНО ЛИ УСЛЫШАТЬ ЖЕСТКУЮ ОПОРУ?

1. Пусть S — некоторый упругий континуум, точки которого могут перемещаться только параллельно некоторому фиксированному направлению. Ось, задающую это направление, мы обозначим через Z. Говоря о силе f, приложенной в точке $p \in$ S, или о смещении $u(p)$ этой точки, параллельных Z, мы будем иметь всегда в виду не их абсолютные величины, а проекции на ось Z $(f = f_z,\ u = u_z)$.

Если в точке $q \in$ S приложить сосредоточенную силу $f(=f_z)$ то в линейной теории смещение $u(p)$ в любой точке $p \in$ S будет получаться по формуле $u(p) = G(p, q)f$, где $G(p, q)$ так называемая функция влияния (функция Грина) континуума S. В силу принципа взаимности Максвелла $G(p, q)$ будет симметрическим (вещественным) ядром. Оно всегда непрерывно в любой точке $(p, q) \in$ S$\times$S, не лежащей на диагонали $(p \neq q)$. В дальнейшем мы предполагаем, что $G(p, q)$ непрерывно всюду на S $\times$ S (т.е. включая диагональ). Это условие будет выполняться для поперечных сил, если S есть, например, струна, балка, пластина, и не будет выполняться, если S — мембрана.

Мы предполагаем также, что условия закрепления континуума S превращают его в устойчивую систему. В этом случае при любом его загружении силами d$F(p)$ он будет запасать положительную потенциальную энергию

$$E = \frac{1}{2}\int_S\int_S G(p, q)\mathrm{d}F(p)\mathrm{d}F(q) \quad (> 0) \tag{5.1}$$

(разумеется, в предположении, что среди точек, несущих силовую нагрузку имеется хотя бы одна подвижная точка, т. е. точка, смещающаяся при приложении к ней сосредоточенной силы).

Если по континууму S распределена масса $\mathrm{d}M(p)$, то гармонические колебания $u(p,t) = \varphi(p)\sin(\omega t + \alpha)$ континуума будут определяться из нагруженного интегрального уравнения

$$\varphi(p) = \lambda\int_S G(p, q)\, \varphi(q)\, \mathrm{d}M(q) \qquad (\lambda = \omega^2). \tag{5.2}$$

В силу условия (5.1) все характеристические числа этого уравнения $\lambda_j = \omega_j^2\ (j = 1,2, \ldots)$ положительны, и мы можем предположить, что они перенумерованы с учетом их кратностей в неубывающем порядке: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$.

Пусть $\{\varphi_j(p)\}_1^\infty$ — соответствующий ортонормированный ряд амплитудных функций, т.е. фундаментальных функций уравнения (5.2). Из условия (5.1) и непрерывности ядра $G(p, q)$ следует [13], что имеет место обобщенное разложение Мерсера:

$$G(p, q) = g(p, q) + \sum_j \frac{\varphi_j(p)\varphi_j(q)}{\lambda_j} \qquad \forall\ p, q \in S, \tag{5.3}$$

где билинейный ряд, стоящий справа, сходится равномерно на $S \times S$, а $g(p, q) = 0$, коль скоро хотя бы одна из точек $p, q \in \mathscr{E}_M$; через $\mathscr{E}_M$ обозначается множество, являющееся носителем массы M. Мы предполагаем, что множество $\mathscr{E}_M$ бесконечно, — только в этом случае последовательность $\{\lambda_j\}$ будет бесконечной. Оказывается [6] (см. также [14]), ядро $g(p, q)$ $(p, q \in S)$ в разложении (5.3) допускает следующую механическую интерпретацию, показывающую, что оно вполне определяется множеством $\mathscr{E}_M$: $g(p, q)$ есть функция влияния континуума S_M, получающегося из S путем неподвижного закрепления S во всех точках $\mathscr{E}_M$. Этот факт здесь не используется.

Резольвента Фредгольма $\Gamma(p, q; \lambda)$ $\lambda \bar{\in} \{\lambda_j\}$ уравнения (5.2) определяется из уравнения

$$\Gamma(p, q; \lambda) - \lambda\int_S \Gamma(p, r; \lambda)G(r, q)\mathrm{d}M(r) = G(p, q) \qquad (p, q \in S).$$

Она допускает разложение

$$\Gamma(p, q; \lambda) = g(p, q) + \sum_j \frac{\varphi_j(p)\,\varphi_j(q)}{\lambda_j - \lambda}, \tag{5.4}$$

равномерно сходящееся на $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$.

Пусть q_0 некоторая подвижная точка множества $\mathscr{E}_M$. Тогда $G(q_0,q_0) > 0$, так как, если приложить в точке q_0 сосредоточенную силу $f(\neq 0)$, то континуум $\mathbf{S}$ запасет положительную энергию $E = \frac{1}{2} G(q_0, q_0)f^2 > 0$. Поставим в точке q_0 упругую опору Γ жесткости $\gamma\ (> 0)$. Это будет означать, что при деформации континуума в точке q_0 будет возникать сила реакции опоры $R = -\gamma u(q_0)$, где $u(q_0)$ смещение точки q_0. Обозначим через $\tilde{\mathbf{S}}$ континуум $\mathbf{S}$, подпертый опорой Γ, а через $\tilde{G}(p, q)$ его функцию влияния. Очевидно, $\tilde{G}(p, q)$ будет давать смещение в точке p под действием единичной силы, приложенной в точке q, и реакции R, приложенной в точке q_0, так что

$$\tilde{G}(p,q) = G(p, q) + RG(p, q_0).$$

С другой стороны, $R = -\gamma\tilde{G}(q_0, q) = -\gamma(G(q_0, q) + RG(q_0, q_0))$, откуда $R = -\gamma G(q_0,q_0)/(1 + \gamma G(q_0,q_0))$.

Таким образом, получаем хорошо известную формулу (см. [4], [19])

$$\tilde{G}(p, q) = G(p, q) - \frac{\gamma G(p, q_0)\, G(q, q_0)}{1 + \gamma G(q_0, q_0)}. \tag{5.5}$$

Если в правой части совершить предельный переход при $\gamma \to \infty$, то получим функцию влияния

$$\tilde{G}_{\text{ж}}(p, q) = G(p, q) - \frac{G(p, q_0)\, G(q, q_0)}{G(q_0, q_0)},$$

соответствующую жесткой опоре в точке q_0.

Пусть $\tilde{\omega}_1 \leqslant \tilde{\omega}_2 \leqslant \ldots$ — последовательные частоты континуума $\tilde{\mathbf{S}}$, т.е. $\tilde{\lambda}_j = \tilde{\omega}_j^2\ (j = 1, 2, \ldots)$ — последовательные характеристические числа интегрального уравнения

$$\varphi(p) = \lambda \int_{\mathbf{S}} \tilde{G}(p, q)\varphi(q)\,\mathrm{d}M(q). \tag{5.6}$$

Рассмотрим детерминанты Фредгольма $D(\lambda)$ и $\tilde{D}(\lambda)$ интегральных уравнений (5.2) и (5.6):

$$D(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right), \qquad \tilde{D}(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_j}\right). \tag{5.7}$$

Так как согласно (5.5)

$$\tilde{G}(p, q) = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} G(p, q) & G(p, q_0) \\ G(q_0, q) & \delta \end{vmatrix} \qquad \left(\delta = \frac{1}{\gamma} + G(q_0, q_0)\right),$$

то по известным формулам Бейтмана [22] (см. также [7])

$$\frac{\tilde{D}(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{\delta}\Big[\delta + \lambda \int_S G^2(p, q_0)\, dM(p) +$$
$$+ \lambda^2 \int_S \int_S \Gamma(p, q; \lambda)\, G(p, q_0)\, G(q, q_0)\, dM(p)\, dM(q)\Big]. \tag{5.8}$$

С другой стороны,

$$\lambda \int_S \Gamma(p, q; \lambda)\, G(q, q_0)\, dM(q) = \Gamma(p, q_0; \lambda) - G(p, q_0),$$

так что двойной интеграл в (5.8), помноженний на λ^2, равен

$$\lambda \int_S (\Gamma(p, q_0; \lambda) - G(p, q_0))\, G(p, q_0)\, dM(p) =$$
$$= \Gamma(q_0, q_0; \lambda) - G(q_0, q_0) - \lambda \int_S G^2(p, q_0)\, dM(p),$$

и формула (5.8) принимает вид:

$$\frac{\tilde{D}(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{\delta}[\delta + \Gamma(q_0, q_0; \lambda) - G(q_0, q_0)] \quad \left(= \frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{\gamma} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j^2(q_0)}{\lambda_j - \lambda}\right]\right). \tag{5.9}$$

Мы воспользовались здесь разложением (5.4) и учли, что для подвижной точки $q_0 (\in \mathscr{E}_M)$: $g(q_0, q_0) = 0$.

Как известно, из соотношения (5.9) следует, что $\lambda_1 \leqslant \tilde{\lambda}_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \tilde{\lambda}_2 \leqslant \ldots$. Легко видеть, что

$$\lim_{\lambda \downarrow -\infty} \frac{\tilde{D}(\lambda)}{D(\lambda)} = \lim_{\lambda \downarrow -\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda / \tilde{\lambda}_j}{1 - \lambda / \lambda_j} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\tilde{\lambda}_j}. \tag{5.10}$$

С другой стороны, предел правой части (5.9) при $\lambda \downarrow -\infty$ равен $1/\delta\gamma = (1 + \gamma G(q_0, q_0))^{-1}$.

Таким образом,

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_j}{\lambda_j} = 1 + \gamma G(q_0, q_0). \tag{5.11}$$

Мы видим, что вопрос, поставленный в заголовке параграфа, имеет положительный ответ, а именно:

А) *Пусть* $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots$ *последовательные частоты свободных гармонических колебаний континуума* $\mathbf{S}$, *а* $\tilde{\omega}_1 \leqslant \tilde{\omega}_2 \leqslant \ldots$ *соответствующие частоты, получающиеся при введении опоры в некоторой подвижной точке* $q_0 \in \mathscr{E}_M$. *Тогда опора будет жесткой в том и только том случае, когда*

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}_j}{\omega_j} = \infty. \tag{5.12}$$

Если условие (5.12) не выполняется, т.е. левая часть в (5.12) сходится к конечной величине (> 1), то опора будет упругой и ее коэффициент жесткости γ определяется из (5.11).

2. Формула (5.11), а вместе с ней и вывод А) обобщаются на случай, когда континуум $\mathbf{S}$ подпирают опорами в нескольких подвижных точках $q_1, \ldots, q_n$. Поясним вкратце, как это получается. Обозначим жесткости опор соответственно через $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ $(0 < \gamma_j \leqslant \infty;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, а через $\tilde{G}(p, q)$ функцию влияния континуума $\mathbf{S}$ с этими опорами. Теперь будем иметь [4], [19]:

$$\tilde{G}(p, q) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} G(p, q) & G(p, q_1) \ldots G(p, q_n) \\ G(q_1, q) & \\ \vdots & \Delta \\ G(q_n, q) & \end{vmatrix}, \tag{5.13}$$

где Δ — определитель:

$$\Delta = \left| \frac{1}{\gamma_i} \delta_{ik} + G(q_i, q_k) \right|_1^n. \tag{5.14}$$

С помощью формул Бейтмана получим уже для детерминанта $\tilde{D}(\lambda)$ интегрального уравнения (5.6) с новым ядром $\tilde{G}$ из (5.13) соотношение

$$\frac{\tilde{D}(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{\Delta} \left| \frac{1}{\gamma_i} \delta_{ik} + \Gamma(q_i, q_k) \right|_1^n . \tag{5.15}$$

Если через $\tilde{\lambda}_1 \leqslant \tilde{\lambda}_2 \ldots$ по-прежнему обозначить квадраты последовательных частот $\tilde{\omega}_1 \leqslant \tilde{\omega}_2 \leqslant \ldots$ континуума $\mathbf{S}$ с опорами, то будем иметь $\tilde{D}(\lambda) = \prod_j (1 - \lambda / \tilde{\lambda}_j)$, где $\lambda_j \leqslant \tilde{\lambda}_j \leqslant \lambda_{j+n}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и предельное соотношение (5.10) сохранится. Поэтому, переходя в (5.15) к пределу при $\lambda \downarrow -\infty$, получим

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\tilde{\lambda}_j} = \frac{1}{\gamma_1 \ldots \gamma_n \Delta},$$

или, согласно (5.14), эквивалентное соотношение:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_j}{\lambda_j} = | \delta_{jk} + \gamma_i G(q_i, q_k) |_1^n . \tag{5.16}$$

Оно является естественным обобщением соотношения (5.11). Из него следует, что в рассматриваемом случае n опор произведение $\prod_j (\tilde{\lambda}_j \mid \lambda_j)$ будет $< \infty$ в том и только том случае, когда все опоры являются упругими: $\gamma_j < \infty$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Этот результат можно было бы получить непосредственно из правила А), рассматривая последовательное включение опор. Если известен спектр $\{\lambda_j^{(l)}\}_1^{\infty}$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ континуума $\mathbf{S}$, подпертого в опорах $q_1, \ldots, q_l$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ с жесткостями $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$, то число упругих (жестких) опор (т.е. число конечных (бесконечных) чисел γ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ равно числу произведений

$$\prod_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^{(l)} / \lambda_j^{(l-1)}) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n; \;\; \lambda_j^{(0)} = \lambda_j, \; j = 1, 2, \ldots) \tag{5.17}$$

сходящихся к конечной (бесконечной) величине.

Очевидно, произведение всех бесконечных произведений (5.17) дает бесконечное произведение, стоящее в левой части (5.16).

При выводе соотношения (5.16) мы пользовались классической теорией нагруженных интегральных уравнений. Однако соотношение (5.16) можно было бы получить как следствие общей формулы (2.5). В самом деле, распределение масс dM позволяет образовать гильбертово пространство $L^2_M(\mathscr{E}_M)$ и в нем определить положительный ядерный оператор $\mathscr{G}$, полагая

$$(\mathscr{G}f)(p) = \int_{\mathscr{E}_M} G(p, q) f(q)\, \mathrm{d}M(q) \qquad (p \in \mathscr{E}_M),$$

и аналогичным образом — оператор $\tilde{\mathscr{G}}$, ядро которого $\tilde{G}$ имеет вид (5.13).

Легко видеть, что операторы $\mathscr{G}$ и $\tilde{\mathscr{G}}$ будут удовлетворять условиям теоремы 2.2.

Представляем читателю проверить, что в данном случае формула (2.5) переходит в формулу (5.16).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бирман, М. Ш.; Крейн, М. Г., К теории волновых операторов и операторов рассеяния, *Докл. АН СССР*, **144**:3(1962), 475—478.
2. Боиматов, К. Х., Симметрические операторы с индексом дефекта (1.1), *Вест. Москв. ун-та*, **4**(1974), 20—26.
3. Буслаев, В. С.; Фаддеев, Л. Д., О формулах следов для дифференциального сингулярного оператора Штурма-Лиувилля, *Докл. АН СССР*, **132**:**1** (1960), 13—16.
4. Гантмахер, Ф. Р.; Крейн, М. Г., *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, Ленинград, 1951, Москва (немецкое издание: F. R. Gantmacher — M. G. Krein, *Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme*, Akademie-Verlag, Berlin (1960)).
5. Гохберг, И. Ц.; Крейн, М. Г., *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Москва, 1965.
6. Дольберг, М. Д., О разложении позитивного ядра в билинейный ряд, *Докл. АН СССР*, **120**:3(1958), 945—948.
7. Канторович, Л. В., Крылов, В. И., *Приближенные методы высшего анализа*, Москва, 1962, Ленинград.
8. Крейн, М. Г., О формуле следов в теории возмущений, *Матем. сборник*, **33**(75):3, (1953), 597—626.
9. Крейн, М. Г., Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов, *Докл. АН СССР*, **144**:2(1962), 268—271.
10. Крейн, М. Г., *О некоторых новых исследованиях по теории возмущений самосопряженных операторов*, Первая летняя матем. школа, Канев, 1963.
11. Крейн, М. Г., Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I, *Матем. сборник*, **20**(62):3 (1947), 431—495.
12. Крейн, М. Г., Об определении потенциала частицы по ее S-функции, *Докл. АН СССР*, **105**(1955), 433—436.

13. Крейн, М. Г., О нагруженных интегральных уравнениях, функции распределения которых не монотонны, *Сб. памяти акад. Граве*, Москва (1940), 88—103.
14. Крейн, М. Г., К теории нагруженных интегральных уравнений, *Известия АН ССР*, **7**(1965), 40—46.
15. Крейн, М. Г., Нудельман, А. А., *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Москва, 1973.
16. Лифшиц, И. М., Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой, *Успехи мат. наук*, **7**:1(47) (1952), 171—180.
17. Маркус, А. С., Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов, *Успехи мат. наук*, **19**:4(118) (1964), 93—123.
18. Марченко, В. А., *Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля*, Киев, 1972.
19. Нудельман, Я. Л., *Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем*, Ленинград-Москва, 1942.
20. Яврян, В. А., О некоторых возмущениях самосопряженных операторов, *Докл. АН Арм. ССР*, **38**:1(1964), 3—7.
21. Яврян, В. А., О функции спектрального сдвига для операторов Штурма-Лиувилля, *Докл. АН Арм. ССР*, **38**:4(1964), 193—198.
22. Bateman, H., A formula for the solving function of a certain integral equation of the second kind, *Messenger Math.*, **37**(1908), 179—187.
23. Kac, Mark, Can one hear the shape of a drum?, *Amer. Math. Monthly*, **73**, 4, Part 2, (1966), 1—23.
24. Kuroda, S. T., Perturbation of continuous spectra by unbounded operators. II., *J. Math. Soc. Japan*, **12**(1963), 243—257.

M. G. KREIN
Physical-Chemistry Institute,
Chernomorskaja doroga, 86,
270080, Odessa-80, USSR.

V. A. YAVRIAN
Institute of Mathematics of
the Armenian Academy of Sciences,
Barekamutian st. 24B, Yerevan,
375019, Armenian SSR
U.S.S.R.

Received September 25, 1980.