J. OPERATOR THEORY
8(1982), 95–129

SUR LES REPRÉSENTATIONS ET IDÉAUX DE LA C^*-ALGÈBRE D'UN FEUILLETAGE

T. FACK et G. SKANDALIS

INTRODUCTION

Soit $(V, \mathscr{F})$ une variété feuilletée. Dans [1], A. Connes lui associe une C^*-algèbre $C^*(V, \mathscr{F})$. Cette algèbre joue le rôle des fonctions continues sur l'espace compact singulier X des feuilles de $\mathscr{F}$. Il est naturel d'espérer lire certaines propriétés de l'espace X sur $C^*(V, \mathscr{F})$. Nous montrons que:

1°) $C^*(V, \mathscr{F})$ est simple si et seulement si X est muni de la topologie grossière, i.e. si le feuilletage est minimal (Théorème 2.6).

2°) $C^*(V, \mathscr{F})$ est primitive si et seulement si X a un point dense, i.e. si le feuilletage est transitif (Proposition 2.8).

3°) Dans le cas moyennable, $C^*(V, \mathscr{F})$ a une représentation d'image les opérateurs compacts si et seulement si X a un point fermé, i.e. si le feuilletage a une feuille compacte.

Les représentations de l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact X correspondent à la donnée d'une mesure sur X et d'un espace de Hilbert aléatoire (de base X).

A. Connes introduit dans [1] les notions analogues pour l'espace des feuilles d'un feuilletage. Ce sont celles de mesure transverse et de représentation du groupoïde d'holonomie.

Nous montrons ici qu'à toute représentation de $C^*(V, \mathscr{F})$ correspond un couple (Λ, U) où Λ est une mesure transverse et U une représentation du groupoïde d'holonomie (Théorème 4.2).

Dans le cas de feuilletages provenant d'une action de groupe de Lie sur une variété, les articles de Sauvageot [12] et Gootman-Rosenberg [6] donnent une description satisfaisante de l'espace des idéaux primitifs. Nous généralisons leurs méthodes et leurs résultats au cadre des feuilletages (Propositions 7.3 et 7.6).

L'organisation de cet article est la suivante:

Au premier paragraphe, nous fixons les notations et établissons quelques résultats préliminaires.

Dans le second paragraphe, nous montrons la minimalité de la norme de $C^*(V, \mathscr{F})$. Nous en déduisons la caractérisation de la simplicité de $C^*(V, \mathscr{F})$.

Le troisième paragraphe est consacré à quelques observations sur la notion de mesure quasi-invariante.

Le quatrième paragraphe établit la correspondance entre les représentations de $C^*(V, \mathscr{F})$ et les couples (Λ, U).

Au cinquième paragraphe, nous étudions quelques propriétés élémentaires de l'induction.

Au sixième paragraphe, nous associons à une représentation factorielle π de $C^*(V, \mathscr{F})$ un idéal primitif induit dont nous prouvons au paragraphe sept qu'il contient le noyau de π et lui est égal pour $\mathscr{F}$ moyennable.

Nous remercions M. Alain Connes qui nous a suggéré ce problème et fait bénéficier de judicieuses remarques.

1. PRELIMINAIRES

Nous reprenons essentiellement les notations de A. Connes [1, § 7].

Soit $(V, \mathscr{F})$ une variété feuilletée compacte de classe $C^{\infty,0}$. Notons p la dimension et q la codimension de ce feuilletage. Pour $x \in V$, soit ℓ_x la feuille passant par x. Notons $\mathscr{R}$ le graphe de la relation d'équivalence sur V correspondant à la partition en feuilles.

Soit G le groupoïde d'holonomie (ou graphe) du feuilletage. On notera $G^{(0)} = V$ l'ensemble de ses unités et $G^{(2)}$ l'ensemble des paires d'éléments composables. Soient r et s les applications but et source de G dans $G^{(0)} = V$. On identifiera V à une partie de G. Pour $A, B \subset V$, on posera:

$$G^A = r^{-1}(A)$$

$$G^A_B = r^{-1}(A) \cap s^{-1}(B).$$

Soit $\Omega = U \times T$ un ouvert trivialisant de V (avec U connexe). Les ensembles $\{u\} \times T$ sont appelés des transversales de Ω et T la transversale. Les ensembles $U \times \{t\}$, pour $t \in T$ sont appelés plaques de Ω. On notera $G(\Omega)$ le groupoïde de la restriction du feuilletage à Ω; c'est un sous-groupoïde de G qui s'écrit en coordonnées locales

$$G(\Omega) = U \times U \times T.$$

Deux systèmes de coordonnées locales $\Omega = U \times T$ et $\Omega' = U' \times T$ dans V sont dits compatibles si, en désignant par d (resp. d') l'application $d(u, t) = t$ (resp. $d'(u', t') = t'$), il existe pour tout $x \in \Omega$ et tout $y \in \Omega'$ tels que $d(x) = d'(y)$, un élément $\gamma \in G$ tel que $h(\gamma) d_x = d'_y$ (où $h(\gamma)$ est le transport d'holonomie des germes d'applications distinguées au sens de [1] en $x = s(\gamma)$ dans les germes d'applications distinguées en $y = r(\gamma)$). Posons alors

$$W(d', d) = \{\gamma \in G \mid s(\gamma) \in \Omega,\ r(\gamma) \in \Omega' \text{ et } h(\gamma)d_{s(\gamma)} = d'_{r(\gamma)}\}.$$

En coordonnées locales, on a $W(d', d) = U' \times U \times T$. Les $W(d, d')$ constituent un atlas de G munissant G d'une structure de variété feuilletée $(G, \mathcal{G})$. La topologie de G n'est pas toujours séparée; pour plus de simplicité, nous supposerons dans la suite que cette topologie est séparée, mais en indiquant dans quelles parties cette hypothèse est cruciale.

1.1. PROPOSITION. *Pour tout recouvrement de V par des ouverts trivialisants, il existe un recouvrement plus fin par des ouverts trivialisants $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ tel que l'on ait pour tous i, j tels que $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$:*

i) *il existe un ouvert trivialisant Ω tel que $\Omega_i \cup \Omega_j \subset \Omega$,*

ii) *toute plaque de Ω_i rencontre au plus une plaque de Ω_j.*

Preuve. Soit (W_i) un recouvrement de V par des ouverts trivialisants. Soit $\varepsilon > 0$ le nombre de Lebesgue de ce recouvrement pour une métrique sur V.

i) il suffit de prendre des Ω_i de diamètre $\leqslant \varepsilon/2$.

ii) résulte du Lemme p. 103 de [10] (cf. aussi [9], p. 337).

1.2. DÉFINITION. Un recouvrement de V par des ouverts trivialisants $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ vérifiant les conditions i) et ii) de la Proposition 1.1. sera dit *régulier*.

1.3. PROPOSITION. *G est une réunion dénombrable d'ouverts de la forme $W(d, d')$; il est donc à base dénombrable.*

Preuve. Soit $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ un recouvrement régulier de V. Pour toute suite finie $(j_1, \ldots, j_k)$ d'indices, $G(\Omega_{j_1})G(\Omega_{j_2}) \ldots G(\Omega_{j_k})$ est soit vide, soit un ouvert de la forme $W(d, d')$ que nous noterons alors $W(j_1, \ldots, j_k)$. Les $W(j_1, \ldots, j_k)$ recouvrent G. La proposition s'ensuit. Q.E.D.

Munissons $\mathcal{R}$ de la topologie image de celle de G par l'application (r, s). On a:

1.4. PROPOSITION. *Il existe une section borélienne $\gamma : \mathcal{R} \to G$.*

Preuve.

$$(r, s)(W(d, d')) = \{(x, y) \in V \times V \mid x \in \operatorname{dom} d,\ y \in \operatorname{dom} d' \text{ et } d(x) = d'(y)\}$$

est clairement borélien. De plus,

$$(r, s) : W(d, d') \to (r, s)(W(d, d'))$$

est un homéomorphisme, car les projections de $\mathcal{R}$ dans V sont continues et la topologie de $W(d, d')$ est donnée par r et s. Soit alors (W_n) un recouvrement de G et posons

$$B_n = (r, s)(W_n) \setminus \Big(\bigcup_{k \leqslant n-1} (r, s)(W_k) \Big).$$

La section γ donnée par

$$\gamma | B_n = (r, s)^{-1} : B_n \to W_n$$

est alors borélienne. Q.E.D.

1.5. Remarque. Soit $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ un recouvrement *régulier* de V par des ouverts trivialisants. Si $(W_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est un recouvrement de G tel que

$$W_1 = G(\Omega_1), \ldots, W_n = G(\Omega_n),$$

on a dans la démonstration de 1.4:

$$\forall\ \gamma \in G(\Omega_i), \quad \gamma(r(\gamma)), s(\gamma)) = \gamma.$$

Soit α une section continue, strictement positive en tout point, du fibré $|\Lambda|\mathscr{F}$ sur V (densités d'ordre 1 du fibré tangent au feuilletage). Pour toute feuille ℓ, nous noterons α^ℓ la mesure correspondante sur ℓ et pour $x \in V$, nous noterons α^x au lieu de α^{ℓ_x}. Soit $\nu = s^*(\alpha)$ la fonction transverse sur G associée à α; pour $x \in G^{(0)} = V$, ν^x est la mesure provenant de α^x par le revêtement $s : G^x \to \ell_x$.

Soit $C_c(G)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur G. Notons que, pour $f \in C_c(G)$, l'application $x \in V \to \int f(\gamma)\,\mathrm{d}\nu^x(\gamma)$ est continue, de sorte que ν est aussi un système de Haar (cf. [11], p. 22).

1.6. Notation. On notera $\mathscr{D}$ l'algèbre involutive $C_c(G)$ pour les opérations

$$(f * g)(\gamma) = \int f(\gamma')g(\gamma'^{-1}\gamma)\,\mathrm{d}\nu^{r(\gamma)}(\gamma')$$

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}.$$

Nous poserons désormais $\tilde{f}(\gamma) = f(\gamma^{-1})$. Pour Ω ouvert trivialisant, on notera $\mathscr{D}(\Omega)$ la sous-algèbre $C_c(G(\Omega))$ de $\mathscr{D}$.

Pour $x \in V$, soit R_x la représentation involutive de $\mathscr{D}$ dans $L^2(G^x, \nu^x)$ définie par

$$(R_x(f)\xi)(\gamma) = \int f(\gamma^{-1}\gamma')\xi(\gamma')\,\mathrm{d}\nu^x(\gamma').$$

Soit $C^*(V, \mathscr{F})$ la C^*-algèbre complétée de $\mathscr{D}$ pour la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in V} \|R_x(f)\|.$$

Nous aurons aussi à considérer $C^*(G)$, la C^*-algèbre enveloppante de la complétion de $\mathscr{D}$ pour la norme

$$\|f\|_1 = \max\left(\sup_{x\in V}\int |f(\gamma)|\,d\nu^x(\gamma),\ \sup_{x\in V}\int |f(\gamma^{-1})|\,d\nu^x(\gamma)\right).$$

La C^*-algèbre $C^*(V, \mathscr{F})$ est un quotient de $C^*(G)$.

1.7. REMARQUE. Soit $\Omega = U \times T$ un ouvert trivialisant. Avec des notations évidentes, on a (cf. [1], Proposition 7.7):

$$C^*(\Omega, \mathscr{F}) = C^*(G(\Omega)) = \mathscr{K} \otimes C_0(T)$$

où $\mathscr{K}$ est l'algèbre élémentaire des opérateurs compacts dans $L^2(U)$. La C^*-algèbre $C^*(\Omega, \mathscr{F})$ s'envoie donc isométriquement dans $C^*(G)$.

1.8. LEMME. *Soit* $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ *un recouvrement régulier de* V *par des ouverts trivialisants. Soit* $(j_1, \ldots, j_k)$ *une suite finie d'indices, et posons*

$$W(d, d') = G(\Omega_{j_1})G(\Omega_{j_2}) \ldots G(\Omega_{j_k}).$$

Alors, $\mathscr{D}(\Omega_{j_1}) * \mathscr{D}(\Omega_{j_2}) * \ldots * \mathscr{D}(\Omega_{j_k})$ *est total pour la topologie de la convergence uniforme dans* $C_c(W(d, d'))$.

Preuve. Démontrons d'abord que, pour 3 systèmes compatibles de coordonnées locales $\Omega = U \times T$, $\Omega' = U' \times T$ et $\Omega'' = U'' \times T$, dont on note $d : \Omega \to T$, $d' : \Omega' \to T$ et $d'' : \Omega'' \to T$ les projections naturelles, l'ensemble $C_c(W(d, d')) * C_c(W(d', d''))$ est total dans $C_c(W(d, d''))$. Or, on a, en coordonnées locales:

$$(f_1 * f_2)(u, u'', t) = \int f_1(u, u', t) f_2(u', u'', t)\, d\alpha^t(u')$$

et les applications de la forme $(u, u'', t) \to f(u)g(u'')h(t)$ sont effectivement obtenues. Le lemme s'en déduit par récurrence. Q.E.D.

1.9. PROPOSITION. i) $C^*(\Omega, \mathscr{F})$ *admet une unité approchée dans* $\mathscr{D}(\Omega)$.

ii) *pour tout recouvrement* $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ *de* V *par des ouverts trivialisants, les algèbres* $C^*(V, \mathscr{F})$ *et* $C^*(G)$ *admettent des unités approchées dans* $\mathscr{D}(\Omega_1) + \ldots + \mathscr{D}(\Omega_n)$.

Preuve. i) Immédiat.

ii) On peut, quitte à raffiner, supposer que le recouvrement est régulier. Pour tout i, soit (u_i^j) une unité approchée dans $\mathscr{D}(\Omega_i)$ de $C^*(\Omega_i, \mathscr{F})$. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$. Posons:

$$u^j(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(r(\gamma))^{\frac{1}{2}} u_i^j(\gamma) \varphi_i(s(\gamma))^{\frac{1}{2}}.$$

On a $u^j = (u^j)^*$ (si $u_i^j = (u_i^j)^*$).

Il suffit de vérifier que $u^j * f \to f$ (dans $C^*(G)$) pour f dans $\mathscr{D}$ à support dans $G(\Omega_{i_1}) \ldots G(\Omega_{i_m}) = W(d, d')$. On a:

$$u^j * f = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \circ r)^{\frac{1}{2}} u_i^j (\varphi_i \circ s)^{\frac{1}{2}} * f = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \circ r)^{\frac{1}{2}} u_i^j * (\varphi_i \circ r)^{\frac{1}{2}} f$$

pour tout i, on a $\operatorname{supp}((\varphi_i \circ r)^{\frac{1}{2}} f) \subset G(\Omega_i) \cdot W(d, d')$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une somme finie $\sum_{k=1}^{n_i} f_i^k * g_i^k$ avec $f_i^k \in \mathscr{D}(\Omega_i)$, $\operatorname{supp}(g_i^k) \subset W(d, d')$, $g_i^k \in \mathscr{D}$ et $\|(\varphi_i \circ r)^{\frac{1}{2}} f - \sum_k f_i^k * g_i^k\|_1 \leqslant \varepsilon$ (Lemme 1.8). Alors:

$$\|u^j * f - f\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \circ r)^{\frac{1}{2}} u_i^j * (\varphi_i \circ r)^{\frac{1}{2}} f - (\varphi_i \circ r) f \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2n\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n_i} \|(\varphi_i \circ r)^{\frac{1}{2}} (u_i^j * f_i^k * g_i^k - f_i^k * g_i^k)\|$$

le second membre converge vers 0 (la norme est ici celle de $C^*(V, \mathscr{F})$, qui coïncide avec celle de $C^*(G)$ dans $W(d, d')$). Q.E.D.

1.10. Proposition. *Supposons que G soit séparé. Soient $Y \subset V$ et $x \in V$. Alors, R_x est faiblement contenue dans $\{R_y\}_{y \in Y}$ si et seulement si $x \in \overline{\bigcup_{y \in Y} \ell_y}$.*

Preuve. Si $x \notin Z = \overline{\bigcup_{y \in Y} \ell_y}$, il existe $f \in \mathscr{D}$ telle que $f(x) \neq 0$ et $f(\gamma) = 0$ pour $\gamma \in G^Z$. On a $R_x(f) \neq 0$ et $R_y(f) = 0$ pour tout $y \in Y$.

Réciproquement, supposons que $x \in Z$. Soit alors (z_n) une suite d'éléments convergeant vers x avec $z_n \in \ell_{y_n}$, $y_n \in Y$. Pour $f \in \mathscr{D}$ et $\xi \in C_c(G)$, on a:

$$\lim_{n \to \infty} \langle R_{z_n}(f)\xi | \xi \rangle = \langle R_x(f)\xi | \xi \rangle,$$

car G est séparé. La proposition résulte de la densité de $\{f|_{G^x} \mid f \in C_c(G)\}$ dans $L^2(G^x, \nu^x)$. Q.E.D.

1.11. Remarque. Si G n'est pas séparé, R_x faiblement contenue dans $\{R_y\}_{y \in Y}$ implique encore $x \in \overline{\bigcup_{y \in Y} \ell_y}$. La réciproque est fausse.

2. EQUIVALENCE ENTRE MINIMALITÉ DU FEUILLETAGE ET SIMPLICITÉ DE $C^*(V, \mathscr{F})$

Dans l'étude de la dynamique de $\mathscr{F}$, la minimalité est une propriété importante. Nous montrons ci-dessous que la minimalité de $\mathscr{F}$ est équivalente à la simplicité de $C^*(V, \mathscr{F})$. Ceci résultera du théorème suivant.

Dans ce paragraphe, G sera toujours supposé séparé.

2.1. THÉORÈME. *Pour une représentation involutive π de $\mathscr{D}$, continue pour la topologie limite inductive sur $\mathscr{D}$, il y a équivalence entre*

i) *π est injective;*

ii) *Pour tout ouvert trivialisant Ω, $\pi|\mathscr{D}(\Omega)$ est injective;*

iii) *Pour tout $x \in V$ tel que $G_x^x = \{x\}$, on a*

$$\|\pi(f)\| \geqslant \|R_x(f)\| \quad (f \in \mathscr{D});$$

iv) $\|\pi(f)\| \geqslant \|f\|_{C^*(V,\mathscr{F})} \quad (f \in \mathscr{D})$.

De ce théorème, on déduit immédiatement

2.2. COROLLAIRE. *La norme de $C^*(V, \mathscr{F})$ est la plus petite C^*-norme sur $\mathscr{D}$.*

Dans [11], J. N. Renault montre que la norme donnée par $C^*(G)$ est la plus grande C^*-norme sur $\mathscr{D}$. On peut donc prendre dans le Théorème 2.1 une représentation π de $C^*(G)$.

Notons que $\mathscr{D}(\Omega)$ a une seule C^*-norme.

Preuve du Théorème 2.1. Les implications iv) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ ii) sont immédiates. iii) $\Rightarrow$ iv) découle du lemme suivant et de la Proposition 1.10.

2.3. LEMME. *L'ensemble X des points $x \in V$ tels que $G_x^x = \{x\}$ est un G_δ dense.*

Preuve. Soit $W(d_n, d_n')$ un recouvrement dénombrable de G. Pour tout n, posons $E_n = \{x \in \mathrm{dom}(d_n) \cap \mathrm{dom}(d_n') \mid d_n(x) = d_n'(x)\}$ et $F_n = E_n - \mathring{E}_n$. X est le complémentaire de la réunion des F_n qui sont rares. Q.E.D.

Pour ii) $\Rightarrow$ iii), nous aurons besoin des lemmes suivants:
Soient $\Omega = U \times T$ un ouvert trivialisant et $x \in \Omega$ avec $G_x^x = \{x\}$. On a:

2.4. LEMME. *Soit K un compact de G. Il existe un ouvert Ω' saturé dans Ω avec $x \in \Omega'$ et $K \cap G_{\Omega'}^{\Omega'} \subset G(\Omega)$.*

Preuve. Soit p la projection de Ω sur T. Supposons qu'il existe une suite γ_n d'éléments de $K \cap G_\Omega^\Omega$ avec $p(r(\gamma_n))$ et $p(s(\gamma_n))$ convergeant vers x, et $\gamma_n \notin G(\Omega)$. En composant à droite et à gauche par des éléments de $G(\Omega)$, on obtient une suite (γ_n') d'éléments de $G(\Omega)KG(\Omega)$, $r(\gamma_n')$, $s(\gamma_n')$ convergeant vers x, $\gamma_n' \notin G(\Omega)$. $G(\Omega)KG(\Omega)$ étant relativement compact, on peut supposer que (γ_n') converge. Sa limite appartient à G_x^x et est donc x. Ceci est absurde car $G(\Omega)$ est un voisinage de x. Q.E.D.

Soit $\xi \in C_c(U_x)$ où U_x est la plaque de x dans Ω telle que

$$\int_{U_x} |\xi(y)|^2 \, d\alpha^x(y) = 1.$$

Pour $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, posons

$$\omega(f) = \iint_{U_x \times U_x} f(\gamma)\xi(s(\gamma))\overline{\xi(r(\gamma))}\, \mathrm{d}\alpha^x(s(\gamma)\, \mathrm{d}\alpha^x(r(\gamma)).$$

On a, en identifiant ℓ_x avec G^x:

2.5. Lemme. *ω se prolonge de manière unique en un état φ de $C^*(G)$. De plus, on a:*

$$\varphi(f) = \langle R_x(f)\xi \mid \xi\rangle \quad (f \in C^*(G)).$$

Preuve. Soit φ un prolongement de ω à $C^*(G)$. Soit $(\pi_\varphi, H_\varphi, \xi_\varphi)$ la représentation GNS associée à φ. Soit $f \in \mathscr{D}$. Soit Ω' un ouvert saturé de Ω contenant x et tel que $G_{\Omega'}^{\Omega'} \cap \operatorname{supp}(f) \subset G(\Omega)$ (Lemme 2.4). Soit $T' = p(\Omega')$ et identifions U à U_x. Il existe une fonction $g \in C_c(T')$, $g(p(x)) = 1$ telle que la fonction $F \in \mathscr{D}(\Omega')$:

$$F(u, u', t) = g(t)\xi(u)\,\overline{\xi(u')}$$

soit de norme 1 dans $C^*(\Omega, \mathscr{F})$ donc dans $C^*(G)$.

On a $\varphi(F) = \omega(F) = 1$ d'où

$$\pi_\varphi(F)\xi_\varphi = \xi_\varphi .$$

Alors

$$\varphi(f) = \langle \pi_\varphi(f)\xi_\varphi \mid \xi_\varphi\rangle = \langle \pi_\varphi(F * f * F)\xi_\varphi \mid \xi_\varphi\rangle =$$

$$= \omega(F * f * F) = \langle R_x(F * f * F)\xi \mid \xi\rangle . \qquad \text{Q.E.D.}$$

Fin de la démonstration du Théorème 2.1. Soit π une représentation de $C^*(G)$ dont la restriction à $\mathscr{D}(\Omega)$ soit fidèle pour tout Ω. Soit $x \in V$ avec $G_x^x = \{x\}$. Soit ω comme dans le Lemme 2.5. La restriction de π à $C^*(\Omega, \mathscr{F})$ étant fidèle, ω peut être considéré comme un état de $\pi(C^*(\Omega, \mathscr{F}))$. Soit $\tilde{\omega}$ un prolongement de ω à $\pi(C^*(G))$ (cf. [8], Proposition 3.1.6., p. 43). Posons $\varphi = \tilde{\omega} \circ \pi$. On a $\pi_\varphi = (\pi_{\tilde{\omega}}) \circ \pi$. Or, R_x est irréductible et π_φ est équivalente à R_x. Q.E.D.

2.6. Théorème. *$C^*(V, \mathscr{F})$ est simple si et seulement si $\mathscr{F}$ est minimal.*

Preuve. S'il existe une feuille ℓ_x non dense, la représentation R_x n'est pas fidèle (Proposition 1.10), et $C^*(V, \mathscr{F})$ n'est pas simple.

Supposons inversement que $\mathscr{F}$ soit minimal. Soit π une représentation de $C^*(V, \mathscr{F})$; montrons que sa restriction à $C^*(\Omega, \mathscr{F})$ est fidèle. Le Théorème 2.1 ((ii) $\Rightarrow$ iv)) donnera le résultat.

Pour tout ouvert trivialisant Ω, il existe un ouvert Ω_1 saturé dans Ω tel que le noyau de $\pi|C^*(\Omega, \mathscr{F})$ soit égal à $C^*(\Omega_1, \mathscr{F})$ [$C^*(\Omega, \mathscr{F})$ est isomorphe à $C_0(T) \otimes \mathscr{K}$ d'après [1], Proposition 7.7. a]. Soit X l'ensemble des $x \in V$ tels qu'il existe un voisinage V_x de x dans G pour lequel $\pi(f) = 0$ pour f continue à support dans V_x.

X est ouvert et $\Omega_1 = X \cap \Omega$; X est donc saturé dans tout ouvert trivialisant, donc dans V. Comme $\mathscr{D}$ est engendré par les $\mathscr{D}(\Omega')$, (cf. Proposition 1.8), il existe un Ω' avec $\pi|C^*(\Omega', \mathscr{F}) \neq 0$. Donc $X \neq V$. Par minimalité, $X \neq \emptyset$ et $\pi|C^*(\Omega, \mathscr{F})$ est fidèle. Q.E.D.

2.7. EXEMPLES.

2.7.1. Soient V une variété compacte, φ un difféomorphisme d'Anosov de classe C^∞ et $\mathscr{F}$ le feuilletage stable correspondant. Supposons que φ est transitif. $\mathscr{F}$ est alors minimal et $C^*(V, \mathscr{F})$ est simple (Théorème 2.6).

Soit α le difféomorphisme de classe C^∞ de $V \times \mathbf{R}$ défini par

$$\alpha(x, t) = (\varphi(x), t - 1),$$

et soit W le quotient de $V \times \mathbf{R}$ par l'action de $\mathbf{Z}$. Le fibré $T\mathscr{F} \times T\mathbf{R}$ définit par passage au quotient un feuilletage minimal sur W.

Il y a de l'holonomie et les méthodes de Sauvageot, et Gootmann-Rosenberg sont inefficaces. La C^*-algèbre associée est cependant simple.

2.7.2. Soit Γ le groupe fondamental d'une surface de Riemann M de genre $\geqslant 2$. Γ agit sur le revêtement universel de M, qui est le disque de Poincaré D. Considérons aussi Γ comme sous-groupe dense de SU(2) et soit $V = \Gamma \backslash D \times \mathrm{SU}(2)$, muni du feuilletage $\mathscr{F}$ par disques de Poincaré. Ce feuilletage est minimal et $C^*(V, \mathscr{F})$ est simple. Notons que, Γ n'étant pas moyennable, $C^*(G)$ n'est pas simple.

Une autre propriété topologique des feuilletages peut se traduire sur $C^*(V, \mathscr{F})$.

Rappelons qu'un feuilletage $\mathscr{F}$ est (topologiquement) transitif s'il admet une feuille dense ou, de façon équivalente, si tout ouvert saturé non vide de V est dense.

2.8. PROPOSITION. *$C^*(V, \mathscr{F})$ est primitive si et seulement si $\mathscr{F}$ est transitif.*

Preuve. Si $\mathscr{F}$ est transitif, l'ensemble des $x \in V$ avec ℓ_x dense est un G_δ dense (c'est l'intersection des $\widetilde{U}_n$ où U_n est une base de la topologie de V et $\widetilde{U}_n$ le saturé de U_n dans V). D'après le Lemme 2.3, il existe $x \in V$ tel que ℓ_x soit dense et $G_x^x = \{x\}$. D'après [1] (Proposition 7.5.b), R_x est irréductible et d'après 1.10, elle est fidèle.

Si $\mathscr{F}$ n'est pas transitif, il existe deux ouverts saturés non vides disjoints U_1, U_2 de V. Pour $f_1, f_2, g \in \mathscr{D}$, $\mathrm{supp}(f_i) \subset G^{U_i}$ on a $f_1 * g * f_2 = 0$. Pour π représentation irréductible, on a $\pi(f_1) = 0$ ou $\pi(f_2) = 0$. Q.E.D.

3. MESURES QUASI-INVARIANTES ET FEUILLETAGES

Nous étudions, en vue des paragraphes suivants, la notion de mesure quasi-invariante dans les feuilletages.

3.1. DÉFINITIONS. i) On dira qu'une mesure μ sur V est *quasi-invariante* si $\widetilde{\mu \circ \nu}$ et $\mu \circ \nu$ sont équivalentes (cf. [11, Définition 1.3.2., p. 30]).

ii) De plus, s'il existe un homomorphisme borélien δ du groupoïde G dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $\delta(\widetilde{\mu \circ \nu}) = \mu \circ \nu$, on dira que μ est *de module* δ.

Rappelons que

$$\mu \circ \nu(f) = \int \nu^x(f)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

et que

$$\widetilde{\mu \circ \nu}(f) = \mu \circ \nu(\tilde{f}).$$

3.2. Remarques.

3.2.1. Avec les notations de [1, § 2], μ est de module δ s'il existe une mesure transverse Λ de module δ telle que $\mu = \Lambda_\nu$ [1, Théorème 2.3, p. 43].

3.2.2. Soient μ et μ' deux mesures équivalentes sur V. On a:

i) μ est quasi-invariante si et seulement si μ' l'est.

ii) μ est de module δ si et seulement si μ' est de module δ' où $\delta'(\gamma) = \delta(\gamma)h(r(\gamma))h(s(\gamma))^{-1}$, avec h une détermination borélienne de $\dfrac{\mathrm{d}\mu'}{\mathrm{d}\mu}$.

3.2.3. Soient $\Omega = U \times T$ un ouvert trivialisant, et μ une mesure sur Ω. Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) μ est quasi-invariante.

ii) Si $\mu = \int_T \beta_t\,\mathrm{d}\lambda(t)$ est une désintégration de μ, alors β_t est équivalente à la mesure de Lebesgue sur U_t pour λ-presque tout t.

iii) Il existe une fonction borélienne f sur $\Omega, f(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, telle que $\mu' = f^{-1}\mu$ soit invariante, i.e. vérifie $\widetilde{\mu' \circ \nu} = \mu' \circ \nu$.

La condition (iii) montre que μ admet pour module $(f \circ r)(f \circ s)^{-1}$.

3.3. Proposition. *Soit μ une mesure sur V. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *Il existe un homomorphisme borélien $\delta\colon G \to \mathbf{R}_+^*$ tel que μ soit de module δ;*

ii) *La mesure μ est quasi-invariante;*

iii) *Il existe un recouvrement régulier $(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ avec $\mu|\Omega_i$ quasi-invariante pour tout i.*

Preuve. i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) est immédiat.

Soient μ une mesure sur V et $(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ un recouvrement régulier tel que $\mu|\Omega_i$ soit quasi-invariante. La démonstration de iii) $\Rightarrow$ i) repose sur les lemmes suivants:

3.4. Lemme. *Soient Ω un ouvert de V, et N un borélien μ-négligeable, saturé dans Ω. Alors, le saturé $\widetilde{N}$ de N dans V est un borélien μ-négligeable.*

Preuve. Soit J l'ensemble des suites finies $I = (i_1, \ldots, i_k)$ d'entiers inférieurs ou égaux à n. On a:

$$\widetilde{N} = \bigcup_{I \in J} N_I$$

avec

$$N_{(i_1, \ldots, i_k)} = s(G^N \cap G(\Omega_{i_1}) \ldots G(\Omega_{i_k})).$$

Il en résulte que $\widetilde{N}$ est borélien. Montrons que N_I est négligeable. Pour $I = (i_1, \ldots, i_k)$ et $I' = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1})$, on a:

$$N_{I'} = \mathrm{s}(G^{N_I} \cap G(\Omega_{i_{k+1}}))\ .$$

Comme N_I est saturé dans Ω_{i_k}, il suffit (par récurrence) de prouver que $N_{(i)}$ est μ-négligeable, pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Or, $G^N \cap G(\Omega_i)$ est $\mu \circ \nu$ négligeable, et donc $\widetilde{\mu \circ \nu}$ négligeable. Or, pour $x \in N_{(i)}$, $(G^N \cap G(\Omega_i))^{-1}$ n'est pas ν^x-négligeable. Q.E.D.

Pour $i = 1, 2, \ldots, n$, soit μ_i une mesure équivalente à $\mu|\Omega_i$ et invariante dans Ω_i (cf. Remarque 3.2.3. iii)). Soit (φ_i) une partition de l'unité subordonnée aux Ω_i.

Posons $\mu' = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \mu_i$. La mesure μ' étant équivalente à μ, il suffit de prouver la condition i) pour μ' (Remarque 3.2.2. ii)). Soit f_{ij} une détermination borélienne de $\frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}\mu_j}$ dans $\Omega_i \cap \Omega_j$, constante sur les plaques.

3.5. Lemme. *Il existe un borélien saturé négligeable N_0 de V tel que pour tout x de $X = V - N_0$ et i, j, k tels que $x \in \Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k$,* on ait:

$$f_{ij}(x) f_{jk}(x) = f_{ik}(x)\ .$$

Preuve. L'ensemble $N_{ijk} = \{x \in \Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k \mid f_{ij}(x) f_{jk}(x) \neq f_{ik}(x)\}$ est un borélien saturé négligeable dans $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k$. Son saturé $\widetilde{N}_{ijk}$ dans V est négligeable (cf. Lemme 3.4). Posons

$$N_0 = \bigcup_{i,j,k} \widetilde{N}_{ijk}\ .$$

Q.E.D.

Posons

$$\delta(\gamma) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \varphi_j f_{ji}(r(\gamma))}{\sum_{j=1}^{n} \varphi_j f_{ji}(s(\gamma))} \quad \text{si } \gamma \in G(\Omega_i) \cap G^X$$

$$\delta(\gamma) = 1 \qquad\qquad \text{si } \gamma \in G(\Omega_i) \cap G^{N_0}.$$

Cette définition ne dépend pas de i, et on a:

$$\delta(\gamma_1)\delta(\gamma_2) = \delta(\gamma_1\gamma_2) \quad \text{pour } \gamma_1, \gamma_2 \in G(\Omega_i).$$

3.6. LEMME. *Il existe un borélien saturé négligeable N tel que, pour tout $x \notin N$ et toute suite finie $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ avec $\gamma_j \in G(\Omega_{i_j})$ et $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_k = x$, on ait $\delta(\gamma_1) \ldots \delta(\gamma_k) = 1$.*

Preuve. Pour toute suite finie $I = (i_1, \ldots, i_k)$ avec $i_1 = i_k$, et $\gamma = \gamma_1 \ldots \gamma_k$ avec $\gamma_j \in G(\Omega_{i_j})$ posons $\delta_I(\gamma) = \delta(\gamma_1) \ldots \delta(\gamma_k)$. Ceci est indépendant de la décomposition $\gamma = \gamma_1 \ldots \gamma_k$, δ étant un homomorphisme sur $G(\Omega_.)$.

L'ensemble $G(\Omega_{i_1}) \ldots G(\Omega_{i_k})$ est ouvert et invariant à gauche et à droite par $G(\Omega_{i_1})$; il existe donc un ouvert saturé Ω dans Ω_{i_1} tel que $G(\Omega_{i_1}) \ldots G(\Omega_{i_k}) \cap G(\Omega_{i_1}) = G(\Omega)$.

Posons $A_I = \{\gamma \in G(\Omega) \mid \delta_I(\gamma) \neq \delta(\gamma)\}$. L'ensemble A_I est borélien, invariant à gauche et à droite par $G(\Omega)$; il existe donc un borélien saturé N_I dans Ω tel que $A_I = G^{N_I} \cap G(\Omega)$.

Pour $f = f_1 * f_2 * \ldots * f_k$, $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $f_j \in \mathscr{D}(\Omega_{i_j})$, on a:

$$\int f(\gamma)\, d\mu' \circ \nu(\gamma) = \int f(\gamma^{-1})\delta(\gamma^{-1})\, d\mu' \circ \nu(\gamma) = \int f_1 * \ldots * f_k(\gamma)\, d\mu' \circ \nu(\gamma) =$$

$$= \int f(\gamma^{-1})\delta_I(\gamma^{-1})\, d\mu' \circ \nu(\gamma)$$

et donc (Lemme 1.8) N_I est négligeable. On prend $N = \bigcup_I \widetilde{N}_I$. Q.E.D.

Fin de la démonstration de la Proposition 3.2. Posons

$$\delta(\gamma) = \delta(\gamma_1) \ldots \delta(\gamma_k) \quad \text{si } \gamma = \gamma_1 \ldots \gamma_k \notin G^N$$

$$\delta(\gamma) = 1 \quad \text{si } \gamma \in G^N.$$

Alors, δ est clairement borélien et d'après [1, Proposition 7.12], il existe une mesure transverse localement finie Λ de module δ telle que $\mu' = \Lambda_\nu$.

3.7. REMARQUE. La mesure transverse Λ étant supposée construite, le Lemme 3.4 résulte alors de [1, Proposition 2.8.b].

Le lemme suivant nous sera utile au § 7:

3.8. LEMME. *Soit Λ une mesure transverse de module δ. Alors, il existe un homomorphisme borélien δ' tel que:*

i) $\delta'(\gamma) = 1$ *pour* $r(\gamma) = s(\gamma)$;

ii) Λ *est de module* δ'.

Preuve. ii) équivaut à l'existence d'un borélien saturé Λ-négligeable N avec $\delta(\gamma) = \delta'(\gamma)$ si $r(\gamma) \notin N$. L'ensemble $N = \{x \in V \mid \delta|G_x^x \neq 1\}$ est clairement borélien. Comme δ est un homomorphisme, N est saturé. Pour Ω ouvert trivialisant, soit

$$B := \{\gamma \in G \mid \exists\, \varphi(\gamma) \in G(\Omega) \text{ avec } r(\varphi(\gamma)) = r(\gamma) \text{ et } s(\varphi(\gamma)) = s(\gamma)\}.$$

B est borélien dans G.

Posons $\mu = \Lambda_\nu$. Soit f une fonction borélienne bornée à support compact sur G. On a:

$$\int_B f(\gamma)\, \mathrm{d}\mu \circ \nu(\gamma) = \int_{G(\Omega)} \sum_{g \in G_{r(\gamma)}^{r(\gamma)}} f(g\gamma)\, \mathrm{d}\mu \circ \nu(\gamma)$$

et donc

$$\int_B f(\gamma^{-1})\delta(\gamma^{-1})\mathrm{d}\mu \circ \nu(\gamma) = \int_B f(\gamma^{-1})\delta(\varphi(\gamma^{-1}))\, \mathrm{d}\mu \circ \nu(\gamma).$$

On en conclut que $\delta(\gamma) = \delta(\varphi(\gamma))$ pour $\mu \circ \nu$-presque tout γ de B. Soit $B' := \{\gamma \in B \mid \delta(\gamma) \neq \delta(\varphi(\gamma))\}$. B' est $\mu \circ \nu$-négligeable et invariant à gauche et à droite par $G(\Omega)$. Donc, pour x dans $r(B')$, B' n'est pas ν^x-négligeable et $r(B')$ est alors ν-négligeable. Comme $r(B') = N \cap \Omega$, N est négligeable. Il suffit de modifier δ en posant $\delta' = 1$ sur G^N. Q.E.D.

4. DÉSINTEGRATION D'UNE REPRÉSENTATION

La désintégration d'une représentation de $C^*(G)$, et donc de $C^*(V, \mathscr{F})$ a déjà été obtenue par P. Hahn [7] et J. N. Renault [11, Théorème 1.21, p. 65 et Lemme p. 69] dans le cadre général des groupoïdes localement compacts, moyennant de faibles hypothèses.

Cependant, dans le cadre du graphe d'un feuilletage, cette désintégration se fait non seulement élémentairement mais aussi régulièrement (cf. Théorème 4.2 ci-dessous) en utilisant la structure locale du groupoïde d'holonomie.

4.1. Définition. (cf. [1, Définition 4.1]; comparer avec [11, Définition 2.1.6., p. 52]). Nous appellerons *représentation borélienne* de G un couple (H, U) où H est un champ borélien (de base V) d'espaces de Hilbert et U un champ borélien d'unitaires $U(\gamma) : H_{s(\gamma)} \to H_{r(\gamma)}$ vérifiant

$$U(\gamma)U(\gamma') = U(\gamma\gamma') \quad \text{pour tout } (\gamma, \gamma') \in G^{(2)}.$$

Le but de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant:

4.2. Théorème. *Soit π une représentation non dégénérée de $C^*(G)$ dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Alors, il existe une mesure transverse Λ de module δ et une* *représentation borélienne* (H, U) *de* G *telles que:*

i) $\mathscr{H} = \int_V^{\oplus} H_x \, \mathrm{d}\Lambda_\nu(x)$

ii) $[\pi(f)\xi](x) = \int f(\gamma)\delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}} U(\gamma)\xi_{s(\gamma)} \, \mathrm{d}\nu^x(\gamma)$ *pour* $f \in \mathscr{D}$, $\xi \in \mathscr{H}$ *et* $x \in V$.

Examinons tout d'abord la situation locale. Soient $\Omega = U \times T$ un ouvert trivialisant et π une représentation de $C^*(\Omega, \mathscr{F})$ d'espace essentiel $\mathscr{H}$.

4.3. Proposition. i) *Il existe une mesure* λ *sur* T *et un champ borélien* $(H_t)_{t \in T}$ *d'espaces de Hilbert tels que, en posant* $\mu = \int_T \alpha^t \, \mathrm{d}\lambda(t)$, *la représentation* π *est équivalente à la représentation* $\tilde{\pi}$ *dans* $\int_\Omega^{\oplus} H_t \, \mathrm{d}\mu(u, t)$ *définie par*

$$(\tilde{\pi}(f)\xi)_x = \int f(\gamma)\xi_{s(\gamma)} \, \mathrm{d}\nu^x(\gamma)$$

$\left(f \in \mathscr{D}(\Omega),\ \xi \in \int_\Omega^{\oplus} H_t \, \mathrm{d}\mu(u, t) \text{ et } x \in \Omega\right)$.

ii) *Si* (λ, H) *et* (λ', H') *sont deux décompositions de* π, *alors* λ *est équivalente à* λ' *et* H_t *est isomorphe à* H'_t *pour* λ*-presque tout* t *de* T.

Preuve. Ceci résulte de l'isomorphisme $C^*(\Omega, \mathscr{F}) \approx C_0(T) \otimes \mathscr{K}$ où $\mathscr{K}$ est l'algèbre élémentaire des compacts dans $L^2(U)$ (cf. [1, Proposition 7.7a, p. 116]) et de la décomposition des représentations des C^*-algèbres commutatives. Q.E.D.

On se fixe dans la suite une représentation non dégénérée π de $C^*(G)$.

Soient $\Omega' = U' \times T' \subset \Omega = U \times T$ deux ouverts trivialisants de V. Notons π_Ω et $\pi_{\Omega'}$ les restrictions de π à $C^*(\Omega, \mathscr{F})$ et $C^*(\Omega', \mathscr{F})$, d'espaces essentiels $\mathscr{H}_\Omega$ et $\mathscr{H}_{\Omega'}$.

L'inclusion $\Omega' \subset \Omega$ détermine une application (localement un homéomorphisme) $\varphi : T' \to T$ par la relation $U' \times \{t\} \subset U \times \{\varphi(t)\}$.

La Proposition 4.3 donne des désintégrations $(\lambda, H, \tilde{\pi}_\Omega, W_\Omega)$ et $(\lambda', H', \tilde{\pi}_{\Omega'}, W_{\Omega'})$, où W_Ω (resp. $W_{\Omega'}$) est un unitaire qui entrelace π_Ω et $\tilde{\pi}_\Omega$ (resp. $\pi_{\Omega'}$ et $\tilde{\pi}_{\Omega'}$). On a:

4.4. Corollaire. i) $W_\Omega(\mathscr{H}_{\Omega'}) = \int_{\Omega'}^{\oplus} H_t \, \mathrm{d}\mu(u, t)$;

ii) $\mu|\Omega'$ *et* μ' *sont équivalentes;*

iii) *Il existe un champ borélien* $(V_t)_{t \in T'}$ *d'opérateurs* λ'*-presque partout unitaires* $V_t : H'_t \to H_{\varphi(t)}$, *tels que*

$$(W_\Omega W_{\Omega'}^* \xi)_x = \left(\frac{\mathrm{d}\mu'}{\mathrm{d}\mu}(x)\right)^{1/2} V_t \xi_x$$

avec $x = (u', t)$ *dans* Ω', $\xi \in \int_{\Omega'}^{\oplus} H'_t \, \mathrm{d}\mu'(u, t)$.

Preuve. $\mathscr{H}_{\Omega'}$ est l'espace essentiel de $\pi_{\Omega'}$ et $\int_{\Omega'}^{\oplus} H_t \, d\mu(u,t)$ est celui de $\tilde{\pi}_{\Omega|C^*(\Omega',\mathscr{F})}$.

i) en découle.

ii) et iii) expriment l'unicité (4.3, ii)) en considérant les décompositions (λ', H') et $(\varphi^*(\lambda), H\circ\varphi)$ de $\pi_{\Omega'}$. Q.E.D.

Dans tout ce qui suit, on se fixe:

1) un recouvrement régulier de V par des ouverts trivialisants (Définition 1.2) $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$,

2) une représentation non dégénérée π de $C^*(G)$ dans un espace de Hilbert de restriction π_i à $C^*(\Omega_i, \mathscr{F})$ d'espace essentiel $\mathscr{H}_i$,

3) des décompositions $(\lambda_i, H_i, W_i, \tilde{\pi}_i)$ de π_i données par la Proposition 4.3.

4.5. COROLLAIRE. *Soient* $\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$ et $W_{ij} = W_i W_j^* : W_j(\mathscr{H}_i \cap \mathscr{H}_j) \to \to W_i(\mathscr{H}_i \cap \mathscr{H}_j)$. *On a:*

i) *si* $\Omega_{ij} = \emptyset$, $\mathscr{H}_i$ *et* $\mathscr{H}_j$ *sont orthogonaux,*

ii) $W_i(\mathscr{H}_i \cap \mathscr{H}_j) = \int_{\Omega_{ij}}^{\oplus} H_{i,t} \, d\mu_i(u,t)$,

iii) $\mu_i|\Omega_{ij}$ *et* $\mu_j|\Omega_{ij}$ *son équivalentes,*

iv) *il existe un champ borélien* $(V_{ij}(x))_{x\in\Omega_{ij}}$ *d'opérateurs* μ_i*-presque partout unitaires* $V_{ij}(x) : H_{j,t_j} \to H_{i,t_i}$ *où* $x = (u_i, t_i) = (u_j, t_j)$, *tels que:*

a) $V_{ij}(u_i, t_i)$ *est indépendant de* u_i,

b) $W_{ij}(\xi)(x) = \left(\frac{d\mu_j}{d\mu_i}\right)^{\frac{1}{2}} V_{ij}(x)\xi(x) \quad \left(\xi \in \int_{\Omega_{ij}}^{\oplus} H_{j,t} \, d\mu_j(u,t);\ x\in\Omega_{ij}\right)$.

Preuve. Si $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, on a pour $f \in \mathscr{D}(\Omega_i)$ et $g \in \mathscr{D}(\Omega_j)$, $f * g = 0$, d'où $\pi(f)\pi(g) = 0$. i) en résulte.

Supposons $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ et soit Ω un ouvert trivialisant contenant $\Omega_i \cup \Omega_j$. Soit π_Ω la restriction de π à $C^*(\Omega, \mathscr{F})$. Le Corollaire 4.5 résulte alors immédiatement de 4.4. Q.E.D.

Soit (φ_i) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (Ω_i). Posons $\mu = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \mu_i$.

Pour i, j, les mesures $\mu_i|\Omega_{ij}$ et $\mu_j|\Omega_{ij}$ sont équivalentes, donc $\mu|\Omega_i$ est quasi-invariante. Il existe alors (Proposition 3.3) une mesure transverse Λ de module δ telle que $\mu = \Lambda_\nu$.

Pour $x \in V$, soit $j(x)$ le plus petit entier j tel que $x \in \Omega_j$. Posons $H_x = H_{j(x),t}$ si $x = (u,t)$ dans $\Omega_{j(x)}$. Pour $x \in V$ et j tels que $x \in \Omega_j$, on pose

$$V_j(x) = V_{j,j(x)}(x) \quad (\text{avec } V_{j(x)}(x) = 1).$$

L'application $x \to j(x)$ étant borélienne, les champs $(H_x)_{x\in V}$ et $(V_j(x))_{x\in\Omega_j}$ sont boréliens. De plus, pour tout j, $V_j(x)$ est μ-p.p. unitaire. Soit

$$W_j' : \int_{\Omega_j}^{\oplus} H_{j,t}\,\mathrm{d}\mu_j(u,t) \to \int_{\Omega_j}^{\oplus} H_x\,\mathrm{d}\mu(x)$$

l'unitaire donné par

$$(W_j'\xi)_x = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mu_j}(x)^{-\frac{1}{2}} V_j(x)\xi_x,$$

et posons

$$\widetilde{W}_j = W_j' W_j : \mathscr{H}_j \to \int_{\Omega_j}^{\oplus} H_x\,\mathrm{d}\mu(x).$$

4.6. Proposition. *Il existe un unitaire W de $\mathscr{H}$ sur $\int_V^{\oplus} H_x\,\mathrm{d}\mu(x)$ dont la restriction à $\mathscr{H}_j$ soit $\widetilde{W}_j$.*

Preuve. Comme π est non dégénérée et que $C^*(G)$ a une unité approchée dans $\sum_{i=1}^{n} C^*(\Omega_i, \mathscr{F})$, les $\mathscr{H}_i$ sont totaux.

Pour $\xi_i \in \mathscr{H}_i$ et $\xi_j \in \mathscr{H}_j$, on a:

$$\langle \widetilde{W}_i\xi_i | \widetilde{W}_j\xi_j\rangle = 0 = \langle \xi_i|\xi_j\rangle \quad \text{si } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ (Corollaire 4.5. i)).}$$

Si $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, soit Ω un ouvert trivialisant contenant $\Omega_i \cup \Omega_j$, et W_Ω l'unitaire du Corollaire 4.4. On a:

$$\langle \widetilde{W}_i\xi_i | \widetilde{W}_j\xi_j\rangle = \langle W_\Omega\xi_i | W_\Omega\xi_j\rangle = \langle \xi_i|\xi_j\rangle .$$

Il existe donc une isométrie W de $\mathscr{H}$ dans $\int_V^{\oplus} H_x\,\mathrm{d}\mu(x)$, et cette isométrie est clairement surjective. Q.E.D.

4.7. Lemme. *Il existe un borélien saturé Λ-conégligeable $X \subset V$ tel que pour tout $x \in X$ et tout triplet (i, j, k), on ait:*

i) *si $x \in \Omega_i \cap \Omega_j$, alors $V_{j,i}(x)$ est unitaire,*

ii) *si $x \in \Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k$ alors $V_{k,j}(x)V_{j,i}(x) = V_{k,i}(x)$.*

Preuve. Pour tout i, j, soit $N_{i,j}$ l'ensemble des $x \in \Omega_i \cap \Omega_j$ tels que $V_{j,i}(x)$ ne soit pas unitaire. C'est un borélien saturé μ-négligeable dans $\Omega_i \cap \Omega_j$ (cf. Corollaire 4.5, iv) a)). Soit $\widetilde{N}_{i,j}$ son saturé dans V. Pour i, j, k, on a:

$$W_k W_i^* | W_i(\mathscr{H}_i \cap \mathscr{H}_j \cap \mathscr{H}_k) = W_k W_j^* W_j W_i^* | W_i(\mathscr{H}_i \cap \mathscr{H}_j \cap \mathscr{H}_k)$$

et donc

$$N_{i,j,k} = \{x \in \Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k \mid V_{k,i}(x) \neq V_{k,j}(x) V_{j,i}(x)\}$$

est un borélien μ-négligeable et saturé dans $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k$. Notons $\widetilde{N_{i,j,k}}$ son saturé dans V. D'après le Lemme 3.4, les $\widetilde{N}_{i,j}$ et les $\widetilde{N}_{i,j,k}$ sont des boréliens Λ-négligeables. On prend pour X le complémentaire de leur réunion. Q.E.D.

Pour $\gamma \in G^X \cap G(\Omega_i)$, posons

$$U(\gamma) = V_i^*(r(\gamma)) V_i(s(\gamma)).$$

Alors, $U(\gamma)$ est indépendant du choix de i tel que $\gamma \in G(\Omega_i)$ en vertu de 4.7, ii). Enfin, $U(\gamma)$ est unitaire en vertu de 4.7, i). Remarquons que l'on a de plus:

$$(W^* \pi(f) W \xi)_x = \int f(\gamma) \delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}} U(\gamma) \xi_{s(\gamma)} \, \mathrm{d}\nu^x(\gamma) \quad \text{pour } f \in \mathscr{D}(\Omega_i).$$

4.8. LEMME. *Il existe un borélien saturé Λ-conégligeable $X_0 \subset X$ tel que, pour tout $x \in X_0$ et toute suite finie $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ avec $\gamma_j \in G(\Omega_{i_j})$ et $\gamma_1 \ldots \gamma_k = x$, on ait:*

$$U(\gamma_1) U(\gamma_2) \ldots U(\gamma_k) = 1.$$

Preuve. Pour toute suite finie $I = (i_1, \ldots, i_k)$ avec $i_1 = i_k$, et $\gamma = \gamma_1 \ldots \gamma_k$ avec $\gamma_j \in G(\Omega_{i_j})$, posons $U_I(\gamma) = U(\gamma_1) \ldots U(\gamma_k)$. Ceci est indépendant de la décomposition $\gamma = \gamma_1 \ldots \gamma_k$, U étant un homomorphisme sur $G(\Omega_i) \cap G^X$.

L'ensemble $G(\Omega_{i_1}) \ldots G(\Omega_{i_k})$ est ouvert et invariant à gauche et à droite par $G(\Omega_{i_1})$; il existe donc un ouvert saturé Ω dans Ω_{i_1} tel que $G(\Omega_{i_1}) \ldots G(\Omega_{i_k}) \cap G(\Omega_{i_1}) = G(\Omega)$.

Pour $f = f_1 * f_2 * \ldots * f_k$, $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $f_j \in \mathscr{D}(\Omega_{i_j})$ on a:

$$(W \pi(f) W^* \xi)_x = \int f(\gamma) \delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}} U(\gamma) \xi_{s(\gamma)} \, \mathrm{d}\nu^x(\gamma).$$

et

$$[(W\pi(f_1) W^*) \ldots (W\pi(f_k) W^*) \xi]_x = \int f(\gamma) \delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}} U_I(\gamma) \xi_{s(\gamma)} \, \mathrm{d}\nu^x(\gamma)$$

pour $\xi \in \int_V^{\oplus} H_x \, \mathrm{d}\mu(x)$. Et le lemme se démontre comme le Lemme 3.6. Q.E.D.

4.9. *Fin de la démonstration de 4.2.* Pour $x \notin X_0$ posons $H_x = 0$. Pour $\gamma \in G^{X_0}$ il existe $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_i \in G(\Omega_{j_i})$ tels que $\gamma = \gamma_1 \ldots \gamma_k$. Posons $U(\gamma) = U(\gamma_1) \ldots U(\gamma_k)$. Le champ U est clairement borélien. La représentation π et la représentation (Λ, U) coïncident sur $\mathscr{D}(\Omega_i)$ et donc sur tout $\mathscr{D}$ (Lemme 1.8). Q.E.D.

4.10. COROLLAIRE. *Il existe une unique représentation ρ de $C(V)$ dans $\mathscr{H}$ vérifiant*

$$\rho(f)\pi(g) = \pi(f \circ r \cdot g) \quad f \in C(V),\ g \in \mathscr{D}.$$

Preuve.
Existence. La multiplication diagonale dans la décomposition du Théorème 4.2 convient.
Unicité. Cette formule détermine entièrement ρ en prenant une unité approchée de $C^*(G)$. Q.E.D.

La proposition ci-dessous précise l'unicité de la désintégration.

4.11. PROPOSITION. *Soient (Λ, U) et (Λ', U') deux décompositions d'une même représentation π de $C^*(G)$. Alors, il existe:*
a) *un borélien saturé négligeable N de V,*
b) *une fonction borélienne h strictement positive sur V,*
c) *un champ borélien d'opérateurs $W_x : H_x \to H'_x$ $(x \in V)$ tels que:*
   i) $\Lambda = h\Lambda'$,
   ii) $W_{r(\gamma)}U(\gamma) = U'(\gamma)W_{s(\gamma)}$ *pour* $\gamma \notin G^N$,
   iii) W_x *est unitaire pour* $x \notin N$.

Notons δ (resp. δ') le module de Λ (resp. Λ'). Dans i), $h\Lambda'$ désigne la mesure transverse de module $\dfrac{h \circ r}{h \circ s}\delta'$ définie par:

$$h\Lambda'(\alpha) = \Lambda'(h \circ s \cdot \alpha).$$

Preuve. Posons $\mu = \Lambda_\nu$ et $\mu' = \Lambda'_\nu$. Soit S un unitaire entrelaçant les deux décompositions de π. Par unicité de la représentation ρ (cf. Corollaire 4.10), l'unitaire S échange les multiplications diagonales. On en déduit que μ est équivalente à μ' et qu'il existe un champ borélien d'opérateurs $T_x : H_x \to H'_x$, μ-p.p. unitaires, tels que:

$$S_x = g(x)^{\frac{1}{2}}T_x \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in V,$$

où g est une détermination borélienne de $\dfrac{d\mu}{d\mu'}$ (cf. [8, Théorème 4.11.9, p. 144]).
De plus, comme S entrelace les deux décompositions de π, on a

$$T_{r(\gamma)}U(\gamma) = U'(\gamma)T_{s(\gamma)} \quad \text{pour } \mu \circ \nu\text{-presque tout } \gamma \in G.$$

Enfin, l'égalité $\mu = g\mu'$ entraîne $\delta = \dfrac{g \circ r}{g \circ s}\delta' \quad \mu \circ \nu\text{-p.p.}$

L'ensemble

$$Y = \left\{ x \in V \mid T_x \text{ est unitaire et, pour } \nu^x\text{-presque tout } \gamma \in G^x, \text{ on a } g(s(\gamma))\frac{\delta(\gamma)}{\delta'(\gamma)} = g(x), \right.$$

$$\left. T_x U(\gamma) = U'(\gamma) T_{s(\gamma)} \right\}$$

est alors μ-conégligeable.

Soit $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ un recouvrement *régulier* de V par des ouverts trivialisants, et $\gamma : \mathscr{R} \to G$ une section telle que l'on ait:

$$\gamma(r(\gamma), s(\gamma)) = \gamma \quad \text{pour tout } \gamma \in G(\Omega_i)$$

(cf. Remarque 1.5). Pour $i = 1, \ldots, n$, $Y \cap \Omega_i$ est μ-conégligeable, et il existe donc une transversale T_i de Ω_i telle que $Y_i = Y \cap T_i$ soit conégligeable dans T_i pour la mesure $\Lambda_i = \Lambda_{\nu_{T_i}}$, où ν_{T_i} désigne la fonction caractéristique de T_i (cf. [1, p. 40]). Soit $B_i \subset Y_i$ un borélien λ_i-conégligeable dans T_i. Posons $N_i = \Omega_i \setminus \tilde{B}_i$, où $\tilde{B}_i$ désigne le saturé de B_i dans Ω_i. Soit $\tilde{N}_i$ le saturé de N_i dans V. Comme N_i est un borélien μ-négligeable, $N = \cup \tilde{N}_i$ est un borélien saturé μ-négligeable de V (Lemme 3.4).

Pour $x \in N$, posons $h(x) = 1$ et $W_x = 0$. Pour $x \notin N$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in \Omega_i$, ainsi que $\gamma \in G(\Omega_i)$ tel que $s(\gamma) = x$ et $y = r(\gamma) \in B_i$.

Posons

$$h(x) = \frac{\delta'(\gamma)}{\delta(\gamma)} g(r(\gamma))$$

et

$$W_x = U'(\gamma)^{-1} T_{r(\gamma)} U(\gamma).$$

Ce choix est clairement indépendant de i, et les conditions ii) et iii) sont vérifiées. Comme $\delta = \frac{h \circ r}{h \circ s} \delta'$ hors de G^N, $h\Lambda'$ est une mesure transverse de module δ. L'égalité $\Lambda_\nu = h\Lambda'_\nu$ implique alors i) (cf. [1, Théorème 2.3, p. 43]). Q.E.D.

4.12. Remarque. L'algèbre $C^*(V, \mathscr{F})$ se définit intrinsèquement en remplaçant les fonctions sur G par les sections du fibré $|\Lambda|^{1/2}(\mathscr{G})$ (de base G) des densités d'ordre 1/2 sur l'espace tangent à $\mathscr{G}$.

A la mesure transverse Λ est associée une forme linéaire positive C sur $|\Lambda|(\mathscr{F})$ (courant dans le cas orientable), en posant:

$$C(\alpha) = \Lambda(s^*(\alpha))$$

(cf. [1, Proposition 7.13, p. 121]). Avec les identifications évidentes de

$$(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\mathscr{G})_\gamma \quad \text{avec} \quad (|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\mathscr{F})_{r(\gamma)} \otimes (|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\mathscr{F})_{s(\gamma)}$$

et de

$$(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\mathscr{F})_{s(\gamma)} \quad \text{avec} \quad (|\Lambda|^{\frac{1}{2}}G^x)_\gamma$$

le Théorème 4.2 s'énonce alors:

Pour toute représentation π de $C^*(V, \mathscr{F})$ dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, il existe une représentation borélienne (H, U) de G et une mesure transverse Λ de module δ, telles que l'on ait, en notant C le courant associé:

$$\mathscr{H} = \int^{\oplus} (H_x \otimes |\Lambda|^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}_x)\,\mathrm{d}C$$

et pour toute $f \in C_c(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\mathscr{G})$ et tout $\xi \in \mathscr{H}$:

$$[\pi(f)\xi](x) = \int_{G^x} f(\gamma)\delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}}\, U(\gamma)(\xi_{s(\gamma)})\,.$$

5. REPRÉSENTATIONS INDUITES

Soient $x \in V$ et G_x^x le groupe d'holonomie en x. Pour toute représentation unitaire continue σ_x de G_x^x dans un espace de Hilbert H, nous allons définir une représentation induite $\operatorname{Ind}_x \sigma_x$ de $C^*(G)$ et étudier quelques propriétés élémentaires de ces représentations.

Soit $\mathscr{K}$ l'espace de Hilbert des applications ν^x-mesurables $\xi: G^x \to H$ vérifiant:

i) $\xi(g\gamma) = \sigma_x(g)\xi(\gamma) \quad (g \in G_x^x,\ \gamma \in G^x)$

ii) $\int_{\ell_x} \|\xi(\gamma)\|^2\,\mathrm{d}\alpha^x(s(\gamma)) < +\infty$, ceci ayant un sens à cause de i).

Le résultat suivant est classique:

5.1. Proposition. *Posons, pour $f \in \mathscr{D}$ et $\xi \in \mathscr{K}$:*

$$[\tilde{\sigma}_x(f)\xi](\gamma) = \int_{G^x} f(\gamma^{-1}\gamma')\xi(\gamma')\,\mathrm{d}\nu^x(\gamma')\,.$$

On définit ainsi une représentation involutive de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{K}$ qui se prolonge en une représentation (encore notée $\tilde{\sigma}_x$) de $C^*(G)$.

5.2. DÉFINITION. (cf. par exemple [11]) On dira que $\tilde{\sigma}_x$ est *la représentation induite* de σ_x à $C^*(G)$, et on la notera $\tilde{\sigma}_x = \underset{x}{\mathrm{Ind}}\,\sigma_x$.

5.3. REMARQUES. i) Soit $\mathscr{H} = L^2(\ell_x, \alpha^x) \otimes H$. Soit $\gamma : \mathscr{R} \to G$ une section borélienne de l'application (r, s) donnée par 1.4. Alors, l'application $U : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ définie par

$$U(\xi)(y) = \xi[\gamma(x, y)]$$

est un isomorphisme d'espaces hilbertiens et $\tilde{\sigma}_x$ peut être réalisée dans $\mathscr{H}$ au moyen de U. On a alors:

$$(\tilde{\sigma}_x' f)\xi(y) = \int_{G^x} f[\gamma(x, y)^{-1}\gamma]\sigma_x[\gamma\gamma(x, s(\gamma))^{-1}]\xi(s(\gamma))\,d\nu^x(\gamma).$$

ii) Soit ρ_x la représentation régulière droite de G_x^x. Alors, l'application $V : L^2(G^x, \nu^x) \to \mathscr{K}$ définie par $(V\xi(\gamma))(g) = \xi(g\gamma)$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert qui entrelace R_x et $\tilde{\rho}_x$.

Soit $(\sigma_t)_{t\in T}$ un champ mesurable de représentations de G_x^x où (T, m) est un espace mesuré standard. On a évidemment:

5.4. LEMME. *Avec la Remarque* 5.3. i), $\underset{x}{\mathrm{Ind}}\,\sigma_t$ *a une structure naturelle de champ mesurable de représentations, et on a:*

$$\underset{x}{\mathrm{Ind}} \int_T^{\oplus} \sigma_t \mathrm{d}m(t) = \int_T^{\oplus} (\underset{x}{\mathrm{Ind}}\,\sigma_t)\mathrm{d}m(t).$$

Soit $\gamma \in G$ et posons $x = r(\gamma)$, $y = s(\gamma)$. Pour toute représentation σ de G_y^y dans H, notons $\gamma\sigma$ la représentation de G_x^x dans H définie par

$$(\gamma\sigma)(g) = \sigma(\gamma^{-1}g\gamma)\,.$$

Il est immédiat que:

5.5. LEMME. $\underset{x}{\mathrm{Ind}}\,\sigma$ *et* $\underset{y}{\mathrm{Ind}}\,\gamma\sigma$ *sont deux représentations équivalentes.*

Soit A un opérateur du commutant de σ_x dans H. Posons, pour $\xi \in \mathscr{K}$ et $\gamma \in G^x$: $(T_A\xi)(\gamma) = A(\xi(\gamma))$. On a:

5.6. LEMME. i) T_A *est un élément du commutant de* $\tilde{\sigma}_x = \underset{x}{\mathrm{Ind}}\,\sigma_x$ *dans* $\mathscr{K}$.

ii) *Le commutant de* $\tilde{\sigma}_x$ *dans* $\mathscr{K}$ *est exactement l'ensemble des opérateurs* T_A *de cette forme.*

Preuve. i) Immédiat.

ii) Soit T un élément du commutant de $\tilde{\sigma}_x$. Pour $f \in \mathscr{D}$ et $\xi, \eta \in \mathscr{K}$, on a:

$$\langle \tilde{\sigma}_x(f) T\xi | \eta \rangle = \langle T\tilde{\sigma}_x(f)\xi | \eta \rangle = \langle \tilde{\sigma}_x(f)\xi | T^*\eta \rangle,$$

soit

$$\iint_{\ell_x \times G^x} f(\gamma^{-1}\gamma') \langle T\xi(\gamma') | \eta(\gamma) \rangle \, d\nu^x(\gamma') \, d\alpha^x(s(\gamma)) =$$

$$= \iint_{\ell_x \times G^x} f(\gamma^{-1}\gamma') \langle \xi(\gamma') | (T^*\eta)(\gamma) \rangle \, d\nu^x(\gamma') \, d\alpha^x(s(\gamma)).$$

Cette égalité reste vraie pour toute f borélienne. Or, ℓ_x est borélienne dans V et l'application :

$$\ell_x \times G^x \ni (y, \gamma) \to \gamma(y, x)\gamma \in G^{\ell_x}$$

est un isomorphisme borélien qui transforme la mesure $\alpha^x \otimes \nu^x$ en $\alpha^x \circ \nu$, où

$$(\alpha^x \circ \nu)(f) = \int_{\ell_x} \nu^y(f) \, d\alpha^x(y).$$

On en déduit:

$$\langle T\xi(\gamma') | \eta(\gamma) \rangle = \langle \xi(\gamma') | (T^*\eta)(\gamma) \rangle,$$

$\alpha^x \otimes \nu^x$-presque partout. Il existe alors $A \in \mathscr{L}(H)$ tel que

$$T\xi(\gamma') = A(\xi(\gamma'))$$

et l'égalité $T\xi(g\gamma) = \sigma_x(g) T\xi(\gamma)$ impose à A d'être dans le commutant de σ_x. Q.E.D.

5.7. Corollaire. i) $\operatorname*{Ind}_x \sigma_x$ *est irréductible ou factorielle si et seulement si* σ_x *l'est.*

ii) *Soient* $A \subset H$ *une partie totalisatrice pour* σ_x *et* $\varphi \in L^2(\ell_x, \alpha^x)$, $\varphi \neq 0$. *Alors* $\{\varphi \otimes \xi \mid \xi \in A\}$ *est totalisatrice pour* $\operatorname*{Ind}_x \sigma_x$.

5.8. Proposition. *Soient* σ_x *et* π_x *deux représentations de* G_x^x. *Alors, si* σ_x *est faiblement contenue dans* π_x, $\operatorname*{Ind}_x \sigma_x$ *est faiblement contenue dans* $\operatorname*{Ind}_x \pi_x$.

Preuve. Soient H et K les espaces de σ_x et π_x. Réalisons $\operatorname*{Ind}_x \sigma_x$ et $\operatorname*{Ind}_x \pi_x$ dans $L^2(\ell_x, \alpha^x) \otimes H$ et $L^2(\ell_x, \alpha^x) \otimes K$ (Remarque 5.3). Soit $\varphi \in L^2(\ell_x, \alpha^x)$. Il suffit de montrer (5.7. ii) que pour tout $\xi \in H$ avec $\|\varphi \otimes \xi\|_2 = 1$, l'état: $f \to \langle \operatorname*{Ind}_x \sigma_x(f)(\varphi \otimes \xi) | \varphi \otimes \xi \rangle$

est limite d'états associés à $\operatorname{Ind}_x \pi_x$. Or,

$$\langle \operatorname{Ind}_x \sigma_x(f)(\varphi \otimes \xi) | \varphi \otimes \xi \rangle =$$

$$= \iint_{\gamma \in G^x,\, y \in \ell_x} \varphi(s(\gamma)) f(\gamma(x, y)^{-1}\gamma)\overline{\varphi(y)} \langle \sigma_x(\gamma\gamma(x, s(\gamma))^{-1})\xi | \xi \rangle \, \mathrm{d}\nu^x(\gamma)\, \mathrm{d}\alpha^x(y) =$$

$$= \sum_{g \in G_x^x} \langle \sigma_x(g)\xi | \xi \rangle \iint_{\ell_x \times \ell_x} \varphi(z) f(\gamma(x, y)^{-1} g \gamma(x, z))\overline{\varphi(y)}\, \mathrm{d}\alpha^x(y)\, \mathrm{d}\alpha^x(z).$$

La proposition résulte alors du fait que l'application

$$g \to \iint_{\ell_x \times \ell_x} \varphi(z) f(\gamma(x, y)^{-1} g \gamma(x, z))\overline{\varphi(y)}\, \mathrm{d}\alpha^x(y)\, \mathrm{d}\alpha^x(z)$$

appartient à $\ell^1(G_x^x)$. Q.E.D.

5.9. On s'intéresse dans ce papier à $C^*(V, \mathscr{F})$, et donc aux représentations de $C^*(G)$ faiblement contenues dans $(R_x)_{x \in V}$. La Proposition 5.8 nous montre que c'est le cas des représentations induites à partir des représentations faiblement contenues dans la représentation régulière de G_x^x.

5.10. DÉFINITION. Soit I un idéal de $C^*(G)$. On dira que c'est un *idéal primitif induit* s'il existe $x \in V$ et une représentation irréductible σ_x de G_x^x tels que

$$I = \operatorname{Ker}(\operatorname{Ind}_x \sigma_x).$$

Si, de plus, $I \supset \bigcap_{x \in V} \operatorname{Ker}(R_x)$, on dira que c'est un *idéal primitif induit de* $C^*(V, \mathscr{F})$.

5.11. PROPOSITION. *$C^*(G)$ a une représentation π d'image l'algèbre des compacts si et seulement si $\mathscr{F}$ a une feuille compacte.*

De plus, si le groupe d'holonomie de cette feuille compacte est moyennable, on peut prendre pour π une représentation de $C^*(V, \mathscr{F})$.

Preuve. Soit ℓ_x une feuille compacte. La représentation $\operatorname{Ind}_x t_x$, où t_x est la représentation triviale de dimension 1 de G_x^x, est irréductible et, pour tout ouvert trivialisant Ω, $\pi(C^*(\Omega, \mathscr{F})) \subset \mathscr{K}$ (car $\Omega \cap \ell_x$ est réduit à un nombre fini de plaques).

Réciproquement, soit π une représentation de $C^*(G)$ d'image les compacts. Soit (Λ, U) une désintégration de π. Pour tout ouvert trivialisant Ω, $\pi(C^*(\Omega, \mathscr{F}))$ est incluse dans $\mathscr{K}$, et donc le support de Λ dans Ω est discret. Pour tout x dans le support de Λ_ν, ℓ_x est fermée dans $\operatorname{supp}(\Lambda_\nu)$, donc est compacte. Q.E.D.

6. IDÉAL PRIMITIF INDUIT ASSOCIÉ À UNE REPRÉSENTATION DE $C^*(G)$

Soit $\pi = (A, H, U)$ une représentation factorielle de $C^*(G)$ (cf. Théorème 4.2). Pour $x \in V$, notons σ_x la représentation de G_x^x dans H_x :

$$\sigma_x(g) = U(g).$$

Le but de ce paragraphe est de démontrer

6.1. PROPOSITION. $\operatorname{Ker}\operatorname{Ind}_x \sigma_x$ *est un idéal primitif (induit) pour A-presque tout x. De plus, cet idéal est essentiellement constant.*

La méthode utilisée pour démontrer 6.1 est celle de J. L. Sauvageot [12], adaptée à notre cadre.

Soit Σ l'ensemble des couples (H, γ) où H est un sous-groupe d'un G_x^x et $\gamma \in H$. Σ est un groupoïde dont l'espace des objets est l'ensemble $\Sigma^{(0)}$ des sous-groupes des groupes d'holonomie, avec:

$$r(H, \gamma) = s(H, \gamma) = H$$

$$(H, \gamma)(H, \gamma') = (H, \gamma\gamma').$$

Σ est une partie de $\mathscr{K}(G) \times G$ où $\mathscr{K}(G)$ est l'espace des parties fermées de l'espace localement compact G, muni de la topologie de Fell.

Rappelons que la topologie de Fell est métrisable compacte (cf. [4]). Une base d'ouverts est formée des

$$\mathscr{U}(C, \mathcal{O}) = \{F \in \mathscr{K}(G) \mid F \cap C = \emptyset \text{ et } F \cap \omega \neq \emptyset \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{O}\}$$

où C est un compact de G et $\mathcal{O}$ un ensemble fini d'ouverts non vides de G.

Pour tout $H \in \Sigma^{(0)}$, soit λ^H la mesure de comptage sur H. Soit $M(G)$ l'espace des mesures de Radon sur G, muni de la topologie de la convergence vague.

6.2. LEMME. i) *$\Sigma^{(0)}$ est compact métrisable.*

ii) *$H \to \lambda^H$ est un homéomorphisme de $\Sigma^{(0)}$ sur son image dans $M(G)$.*

Preuve. i) Soit F dans le complémentaire de $\Sigma^{(0)}$ et construisons un voisinage ouvert de F ne rencontrant pas $\Sigma^{(0)}$.

Si $F = \emptyset$, $\mathscr{U}(G^{(0)}, \emptyset)$ convient.

S'il existe $\gamma, \gamma' \in F$ avec $r(\gamma) \neq s(\gamma')$, $\mathscr{U}(\emptyset, \{G^{\Omega}, G_{\Omega'}\})$ convient où Ω et Ω' sont des ouverts séparant $r(\gamma)$ et $s(\gamma')$.

Si $F \subset G_x^x$ et s'il existe $\gamma, \gamma' \in F$ avec $\gamma\gamma'^{-1} \notin F$, il existe un voisinage compact C de $\gamma\gamma'^{-1}$, $C \cap F = \emptyset$ et des voisinages ouverts ω et ω' de γ et γ' tels que $\omega\omega'^{-1} \subset C$. Alors $\mathscr{U}(C, \{\omega, \omega'\})$ convient.

Il s'ensuit que $\Sigma^{(0)}$ est fermé dans $\mathscr{K}(G)$.

ii) D'après i), il suffit de prouver que, pour toute $f \in C_c(G)$, l'application $H \to \lambda^H(f)$ est continue. Fixons $H \in \Sigma^{(0)}$ et $\varepsilon > 0$. Comme H est discret, $H \cap \operatorname{supp}(f)$ est un ensemble fini $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$. Pour $i = 1, \ldots, k$, soit ω_i un voisinage ouvert de ω_i tel que l'application $(r, s) : \omega_i \to V \times V$ soit injective et tel que:

$$(\forall\, \gamma \in \omega_i) \quad |f(\gamma) - f(\gamma_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{k}.$$

Soit $C = \operatorname{supp}(f) \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \omega_i$. Alors,

$$H' \in \mathscr{U}(C, \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}) \cap \Sigma^{(0)} \Rightarrow |\lambda^H(f) - \lambda^{H'}(f)| \leqslant \varepsilon.$$

Q.E.D.

REMARQUE. Ce résultat reste vrai même si G n'est pas séparé, la topologie de Fell restant compacte dans ce cas (cf. [4]).

6.3. COROLLAIRE. i) *Σ est un groupoïde localement compact.*
ii) *$H \to \lambda^H$ en est un système de Haar.*

Preuve. i) Σ est fermé dans $\Sigma^{(0)} \times G$.
ii) Pour $f \in C(\Sigma^{(0)})$ et $g \in C_c(G)$, $H \to \lambda^H(f \otimes g) = f(H)\lambda^H(g)$ est continue.

Q.E.D.

Notons $C^*(\Sigma)$ la C^*-algèbre du groupoïde Σ (cf. [12], § 2).
A $H \in \Sigma^{(0)}$ et σ, représentation de H, on associe la représentation (H, σ) de $C^*(\Sigma)$:

$$(H, \sigma)(f) = \sum_{\gamma \in H} f(H, \gamma)\sigma(\gamma).$$

Si σ est factorielle ou irréductible, il en est de même pour (H, σ). Enfin, toute représentation factorielle de $C^*(\Sigma)$ est de ce type (car $C(\Sigma^{(0)})$ est inclus dans le centre de $C^*(\Sigma)$). On a donc

$$\widehat{C^*(\Sigma)} = \bigsqcup_{H \in \Sigma^{(0)}} \hat{H}$$

$$\widehat{C^*(\Sigma)} = \bigsqcup_{H \in \Sigma^{(0)}} \widehat{H}$$

$$\operatorname{Prim} C^*(\Sigma) = \bigsqcup_{H \in \Sigma^{(0)}} \operatorname{Prim}(H).$$

D'après la Proposition 5.8 et le Corollaire 5.7, à tout idéal primitif $i \in \operatorname{Prim} G_x^x \subset \operatorname{Prim} C^*(\Sigma)$ est associé un idéal $\operatorname{Ind} i$ de $C^*(G)$ par la condition

$$\operatorname{Ker}\operatorname{Ind}\sigma = \operatorname{Ind} i \quad \text{si } \operatorname{Ker}\sigma = i$$

Généralisant la Proposition 5.8, on a:

6.4. LEMME. (cf. [12], Lemme 4.2 et Corollaire 4.3) *L'application*

$$\operatorname{Prim} C^*(\Sigma) \supset \bigsqcup_{x \in V} \operatorname{Prim} G_x^x \ni i \to \operatorname{Ind} i \in \operatorname{Prim} C^*(G)$$

est continue.

Preuve. Soit $(\pi_j=(x_j, w_j))_{j\in J}$ où w_j est une représentation de $G_{x_j}^{x_j}$. Supposons que $\pi_0=(x_0, w_0)$ soit faiblement contenue dans $(\pi_j)_{j\in J}$. Le Lemme 6.4 revient à montrer que $(\operatorname{Ind}_{x_j} w_j)_{j\in J}$ contient faiblement $\operatorname{Ind}_{x_0} w_0$. Notons H_j l'espace de w_j $(j\in J\cup\{0\})$ et $\widetilde{H}_j=L^2(\ell_{x_j}, \alpha^{x_j})\otimes H_j$ (cf. 5.3) l'espace de $\operatorname{Ind}_{x_j} w_j$. x_0 est adhérent à $\{x_j\}_{j\in J}$, et on peut supposer que x_j et x_0 sont dans un ouvert trivialisant Ω. Soit $h\in C_c(G(\Omega))$. Pour $j\in J$ ou $j=0$, soit $h_j\in L^2(\ell_{x_j}, \alpha^{x_j})$ donnée par

$$h_j(y)=h(\gamma(x_j, y))$$

et soit $\xi_j\in H_j$. Comme en 5.8, on a:

$$\langle \operatorname{Ind}_{x_j} w_j(f)(h_j\otimes\xi_j)|h_j\otimes\xi_j\rangle =$$

$$=\sum_{g\in G_{x_j}^{x_j}}\langle w_j(g)\xi_j|\xi_j\rangle \iint_{\ell_{x_j}\times\ell_{x_j}} h_j(z)f(\gamma(x_j, y)^{-1}g\gamma(x_j, z))\bar{h}_j(y)\,d\alpha^{x_j}(y)\,d\alpha^{x_j}(z)=$$

$$=\sum_{g\in G_{x_j}^{x_j}}(\bar{h}*f*\tilde{h})(g)\langle w_j(g)\xi_j|\xi_j\rangle.$$

Le lemme résulte alors du fait que $(H, g)\to(\bar{h}*f*\tilde{h})(g)$ appartient à $C_c(\Sigma)$.

Q.E.D.

Posons $\Xi=\bigsqcup_{x\in V}\widehat{G_x^x}\subset\widehat{C^*(\Sigma)}$. On a:

6.5. Lemme. *Ξ est borélien.*

Preuve. Soit i l'application naturelle de $\widehat{C^*(\Sigma)}$ dans $\operatorname{Prim}C^*(\Sigma)$. Elle est borélienne (cf. [2], 7.2.2). Soit S l'application naturelle $\operatorname{Prim}C^*(\Sigma)\to\Sigma^{(0)}$. Elle est continue car si $(H_j, \sigma_j)_{j\in J}$ contient faiblement (H_0, σ_0), H_0 est adhérent à $\{H_j\}_{j\in J}$. On a $\Xi=\{(x, \xi)\in V\times\widehat{C^*(\Sigma)}\mid S(i(\xi))=G_x^x\}$. Or l'application $x\to G_x^x$ est borélienne d'après 6.2, ii). Q.E.D.

Soit p l'application naturelle de Ξ dans V. Posons

$$\Gamma=\{(\xi, \gamma)\in\Xi\times G\mid r(\gamma)=p(\xi)\}.$$

C'est un groupoïde mesurable avec

$$\Gamma^{(0)}=\Xi$$

$$r(\xi, \gamma)=\xi$$

$$s(\xi, \gamma)=\gamma^{-1}\xi$$

où $\gamma^{-1}\xi$ désigne la classe de quasi-équivalence des représentations $\gamma^{-1}w$ ($w \in \xi$), et

$$(\xi, \gamma)(\xi', \gamma') = (\xi, \gamma\gamma') \quad (\gamma^{-1}\xi = \xi').$$

Notons encore p l'application de Γ dans G définie par $p(\xi, \gamma) = \gamma$. Il est clair que $p^*(v)$ est une fonction transverse pour Γ.

Soit $\pi = (\Lambda, H, U)$ une représentation de $C^*(G)$. Pour $x \in V$, soit σ_x la représentation de G_x^x dans H_x définie par $\sigma_x(g) = U(g)$. Notons encore (σ_x) ($x \in V$) la représentation (G_x^x, σ_x) de $C^*(\Sigma)$ associée à σ_x. Le champ $(\sigma_x)_{x\in V}$ est manifestement borélien. Posons

$$r = \int_V^{\oplus} \sigma_x \, \mathrm{d}\mu(x)$$

(cf. [12], Définition 5.2). r ne dépend pas du choix de (Λ, H, U) en vertu de la Proposition 4.11. Soient

$$r = \int_{\widehat{C^*(\Sigma)}}^{\oplus} r_\xi \, \mathrm{d}m(\xi)$$

la désintégration centrale de r (cf. [2], 8.4.3) et

$$m = \int_V m_x \, \mathrm{d}\mu'(x)$$

une désintégration de m selon l'application naturelle $\widehat{C^*(\Sigma)} \to V$. On a:

LEMME 6.6. i) *μ' est équivalente à Λ_v et, pour μ'-presque tout $x \in V$, $\int_{\widehat{C^*(\Sigma)}}^{\oplus} r_\xi \mathrm{d}m_x(\xi)$ est équivalente à σ_x.*

ii) *La mesure m est portée par Ξ.*

iii) *La mesure m est Γ-quasi-invariante, i.e. $\widetilde{m \circ p^*(v)}$ est équivalente à $m \circ p^*(v)$.*

iv) *Si π est factorielle, m est ergodique.*

Preuve. On raisonne comme Sauvageot ([12], Remarque 5.3 et Lemme 5.4).

i) Posons

$$\sigma_x' = \int_{\widehat{C^*(\Sigma)}}^{\oplus} r_\xi \, \mathrm{d}m_x(\xi).$$

Ceci a un sens pour μ'-presque tout $x \in V$ et on a

$$r = \int_V^{\oplus} \sigma_x' \, \mathrm{d}\mu'(x).$$

On en déduit ([2], 8.2.4) que μ' est équivalente à Λ_v et que σ'_x est équivalente à σ_x pour μ'-presque tout x. On prendra $\mu' = \Lambda_v$.

ii) Pour presque tout x, $\displaystyle\int_{\widehat{C^*(\Sigma)}}^{\oplus} r_\xi \, dm_x(\xi)$ est une désintégration centrale de σ_x et m_x est portée par $\widehat{G_x^x} \subset \Xi$.

iii) Pour $\gamma \in G$, les représentations $\gamma\sigma_{s(\gamma)}$ et $\sigma_{r(\gamma)}$ sont équivalentes puisqu'entrelacées par $U(\gamma)$. Par unicité de la désintégration centrale, les mesures $\gamma m_{s(\gamma)}$ et $m_{r(\gamma)}$ sont équivalentes pour $\Lambda_v \circ v$ presque tout γ. Posons

$$\Delta(\xi, \gamma) = \delta(\gamma) \frac{d(m_{r(\gamma)})}{d(\gamma m_{s(\gamma)})}(\xi)$$

$(p(\xi) = r(\gamma))$ où δ est le module de Λ. Δ est une fonction mesurable sur Γ et on a:

$$\Delta \widetilde{m \circ p^*}(v) = m \circ p^*(v).$$

iv) Soit $\mathscr{H}$ l'espace de π. Ecrivons

$$\mathscr{H} = \int_V^{\oplus} H_x \, d\Lambda_v(x) = \int_\Xi^{\oplus} H'_\xi \, dm(\xi)$$

où H'_ξ est l'espace de r_ξ. Pour $f \in \mathscr{D}$ et $\eta = \displaystyle\int_\Xi^{\oplus} \eta_\xi \, dm(\xi) \in \mathscr{H}$, on a:

$$\pi(f)\eta(\xi) = \int_{G^{p(\xi)}} f(\gamma)\Delta(\gamma, \xi)^{-1/2} U(\gamma)(\eta_{\gamma^{-1}\xi}) \, dv^{p(\xi)}(\gamma).$$

Donc à un borélien invariant de Ξ correspond un élément de $\pi(C^*(G))'$. De plus, comme $\tau(C^*(\sum))'' \subset \pi(C^*(G))''$, cet élément appartient au centre de $\pi(C^*(G))''$.

Q.E.D

6.7. *Fin de la démonstration de 6.1.* (cf. [12], Lemme 5.4). L'application $\xi \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Ind}_{p(\xi)} r_\xi)$ de Ξ dans $\mathrm{Prim}(C^*(G))$ est borélienne (Lemme 6.4), constante sur les orbites de Γ (cf. 5.5), donc m-essentiellement constante car m est standard et $\mathrm{Prim}\, C^*(G)$ est dénombrablement séparé.

Pour Λ_v-presque tout x et pour m_x-presque tout ξ, on a $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ind}_x r_\xi = I$ où I est un idéal primitif induit fixe. Comme

$$\mathrm{Ind}_x \sigma_x = \int_\Xi^{\oplus} \mathrm{Ind}_x r_\xi \, dm_x(\xi) \qquad \text{(cf. 5.4)}$$

on a $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ind}_x \sigma_x = I$ pour Λ_v-presque tout x.

Or $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ind}_x \sigma_x$ est constante sur les orbites et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ind}_x \sigma_x = I$ pour Λ-presque tout x.

Q.E.D.

7. ABONDANCE D'IDÉAUX PRIMITIFS INDUITS

Au précédent paragraphe, nous avons associé à une représentation factorielle π de $C^*(G)$ un idéal primitif induit I_π.

Nous montrons maintenant que I_π contient $\operatorname{Ker}\pi$ (Proposition 7.3) et qu'il lui est égal sous certaines hypothèses de moyennabilité (Proposition 7.6).

Les méthodes utilisées sont — pour la première partie — celles de [6] et pour la deuxième celles de [12, § 6].

Soit π une représentation factorielle de $C^*(G)$, et soit (Λ, H, U) une désintégration de π (Théorème 4.2) telle que:

$$(\forall\, x \in V)\ \ (\forall\, \gamma \in G_x^x)\quad \delta(\gamma) = 1 \qquad \text{(Lemme 3.8).}$$

Dans ce paragraphe, Λ est considérée tantôt comme mesure transverse, tantôt comme mesure sur les transversales (cf. [1]).

Comme π est factorielle, la mesure Λ est ergodique. La dimension de H_x étant essentiellement constante, on peut remplacer ce champ par le champ constant H.

Soit σ_x la représentation de G_x^x dans H définie par:

$$\sigma_x(g) = U(g) \quad (g \in G_x^x).$$

Soit $\Omega = U \times T$ un ouvert trivialisant avec $\Lambda_\nu(\Omega) \neq 0$. Soit $u_0 \in U$ et identifions $\{u_0\} \times T$ avec T. On peut, en remplaçant Λ par une mesure équivalente, supposer $\delta | G(\Omega) = 1$. On a alors $\Lambda_{\nu|\Omega} = \int_T \alpha^t \, d\Lambda(t)$.

On peut aussi supposer que $U | G(\Omega) = 1$, en remplaçant $U(\gamma)$ par $U'(\gamma)$ donné par

$$U'(\gamma) = U(\gamma'\gamma) \quad \text{si } r(\gamma) \in \Omega,\ s(\gamma) \notin \Omega$$

où $\gamma' \in G(\Omega)$ et vérifie $r(\gamma') \in T$, $s(\gamma') = r(\gamma)$.

Soit X l'ensemble des $x \in V$ tels que $\operatorname{Ker}\operatorname{Ind}_x \sigma_x = I_\pi$; c'est un ensemble saturé Λ-conégligeable (Proposition 6.1). Alors $T \cap X$ est Λ-conégligeable dans T. Comme l'application S qui à $x \in V$ associe son groupe d'holonomie est borélienne, il existe (Théorème de Lusin) un compact $Y \subset T$, vérifiant

i) $Y \subset X$,

ii) $\Lambda(Y) \neq 0$,

iii) l'application S est continue sur Y.

Soit p la projection de Ω sur T.

Nous aurons besoin du lemme suivant:

7.1. LEMME. (cf. [6], Lemme 1.3) *Soit C un compact de G. Il existe une partition borélienne finie $(Y_1, \ldots, Y_k)$ de Y telle que l'on ait, en désignant par Z_i le saturé de Y_i dans Ω:*

$$p(r(\gamma)) = p(s(\gamma)) \quad \textit{si } \gamma \in G_{Z_i}^{Z_i} \cap C.$$

Preuve. Soit d une métrique définissant la topologie de Y. Soit Z le saturé de Y dans Ω. Il suffit de prouver qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $\gamma \in C$, $\gamma \in G_Z^Z$, on ait:

$$d(p(r(\gamma)), p(s(\gamma)) \leqslant \varepsilon \Rightarrow p(r(\gamma)) = p(s(\gamma)).$$

(Il suffira alors de prendre les Y_i de diamètre $\leqslant \varepsilon$). Raisonnons par l'absurde. Soit $C' = G(\Omega)CG(\Omega)$. Alors C' est relativement compact. Si l'énoncé était faux, il existerait une suite (γ_n) d'éléments de C' avec

$$r(\gamma_n) \in Y, \quad s(\gamma_n) \in Y, \quad d(r(\gamma_n), s(\gamma_n)) \leqslant \frac{1}{n}$$

et $r(\gamma_n) \neq s(\gamma_n)$. On peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que γ_n converge vers $\gamma \in G$. On a alors $r(\gamma) = s(\gamma) \in Y$.

Soit $W(d, d')$ un voisinage de γ avec $\mathrm{dom}(d), \mathrm{dom}(d') \subset \Omega$. Pour n assez grand, $\gamma_n \in W(d, d')$ et donc $d(r(\gamma_n)) = d'(s(\gamma_n)) \neq d'(r(\gamma_n))$ ($r(\gamma_n)$ et $s(\gamma_n)$ appartiennent à T et sont distincts).

On a $G_{r(\gamma)}^{r(\gamma)} \in \mathscr{U}(\emptyset, \{W(d,d')\})$, mais $G_{r(\gamma_n)}^{r(\gamma_n)} \notin \mathscr{U}(\emptyset, \{W(d, d')\})$, ce qui contredit continuité de S sur Y. Q.E.D.

Posons $\tau = \int_Y^{\oplus} (\operatorname{Ind}_y \sigma_y) \mathrm{d}\Lambda(y)$. On a $\operatorname{Ker}\tau = I_\pi$ (car $Y \subset X$ et $\Lambda(Y) \neq 0$).

Choisissons une section $\gamma : \mathscr{R} \to G$ de (r, s) (cf. Proposition 1.4) telle que, pour $\gamma' \in G(\Omega)$, on ait:

$$\gamma(r(\gamma'), s(\gamma')) = \gamma' \qquad \text{(Remarque 1.5).}$$

Réalisons alors $\tilde{\sigma}_y = \operatorname{Ind}_y \sigma_y$ dans $\tilde{H}_y = L^2(\ell_y, \alpha^y) \otimes H$ (Remarque 5.3).

Soient μ' et μ_0 les mesures sur $\mathscr{R}$ définies par

$$\mu'(f) = \int_Y \left[\int_{\ell_y} f(y, z) \, \mathrm{d}\alpha^y(z) \right] \mathrm{d}\Lambda(y)$$

$$\mu_0(f) = \int_Y \left[\int_{U_y} f(y, z) \, \mathrm{d}\alpha^y(z) \right] \mathrm{d}\Lambda(y)$$

où U_y est la plaque de y dans Ω.

L'espace de τ est $\mathscr{H} = L^2(\mathscr{R}, \mu') \otimes H$. Soit $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}$ l'espace $L^2(\mathscr{R}, \mu_0) \otimes H$. On a:

7.2. LEMME. *$\tau(\mathscr{D})(\mathscr{H}_0)$ est total dans $\mathscr{H}$.*

Preuve. On a:

$$\tau(\mathscr{D})' = \int_Y^{\oplus} (\operatorname{Ind}_y \sigma_y)(\mathscr{D})' \, \mathrm{d}\Lambda(y).$$

Soit P la projection orthogonale sur $\overline{\tau(\mathscr{D})(\mathscr{H}_0)}$. D'après le Lemme 5.6, il existe une famille borélienne $(A_y)_{y \in Y}$ avec $A_y \in \sigma_y(G_y^y)'$ telle que:

$$P = \int_Y^{\oplus} T_{A_y} \, \mathrm{d}\Lambda(y).$$

Comme $P|\mathscr{H}_0 = 1$, $A_y = 1$ pour presque tout y et $P = 1$. Q.E.D.

7.3. PROPOSITION. *I_π contient* $\mathrm{Ker}\pi$.

Preuve. Il suffit, d'après le Lemme 7.2, de montrer que, pour $\xi \in \mathscr{H}_0$ et C compact de G, il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in L^2(V, \Lambda_\lambda) \otimes H = \mathscr{H}_\pi$ tels que:

i) $\sum_{i=1}^{k} \|\varphi_i\|^2 = \|\xi\|^2$;

ii) Pour $f \in \mathscr{D}$, avec $\mathrm{supp}(f) \subset C$, on a:

$$\langle \tau(f)\xi|\xi\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle \pi(f)\varphi_i|\varphi_i\rangle.$$

Soit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ la partition de Y donnée par le Lemme 7.1. On note encore Z_i, Z les saturés de Y_i, Y dans Ω. Posons

$$H_i = \int_{Y_i}^{\oplus} L^2(U_y, \alpha^y) \otimes H \, \mathrm{d}\Lambda(y) \subset \mathscr{H}_0,$$

et

$$K_i = L^2(Z_i, \Lambda_\nu) \otimes H \subset L^2(V, \Lambda_\nu) \otimes H = \mathscr{H}_\pi.$$

On a $\mathscr{H}_0 = \bigoplus_{i=1}^{k} H_i$; écrivons alors $\xi = \bigoplus_{i=1}^{k} \xi_i$. Pour $z \in Z_i$, posons

$$\varphi_i(z) = \xi_i(p(z), z), \qquad \varphi_i \in K_i.$$

On a $\|\xi_i\| = \|\varphi_i\|$ d'où i).

Pour $\gamma \in C \cap G_{Z_i}^{Z_i}$, on a $p(r(\gamma)) = p(s(\gamma))$ et donc $\delta(\gamma) = 1$ (car $\delta(\gamma) = 1$ pour $\gamma \in G_z^z$ et pour $\gamma \in G(\Omega)$).

Soit $f \in \mathscr{D}$, de support inclus dans C. On a:

$$\langle \pi(f)\varphi_i|\varphi_i\rangle = \int_{Z_i} \int_{G_{Z_i}^z} f(\gamma)\langle U(\gamma)\varphi_i(s(\gamma))|\varphi_i(z)\rangle \, \mathrm{d}\nu^z(\gamma) \, \mathrm{d}\Lambda_\nu(z)$$

et

$$\langle \tau(f)\xi_i|\xi_i\rangle =$$

$$= \int\limits_{Y_i}\int\limits_{U_y}\int\limits_{G^y_{Z_i}} f(\gamma(y,z)^{-1}\gamma)\langle U(\gamma\gamma(x,s(\gamma))^{-1})\xi_i(y,s(\gamma))|\xi_i(y,z)\rangle\, d\nu^y(\gamma)\, d\alpha^y(z)\, d\Lambda(y) =$$

$$= \int\limits_{Y_i}\int\limits_{U_y}\int\limits_{G^z_{Z_i}} f(\gamma)\langle U(\gamma(y,z)\gamma\gamma(x,s(\gamma))^{-1})\xi_i(y,s(\gamma))|\xi_i(y,z)\rangle d\nu^z(\gamma)\, d\alpha^y(z)\, d\Lambda(y).$$

Or $U(\gamma(y,z)) = U(\gamma(y,s(\gamma))) = 1$ pour $s(\gamma)\in U_y$ et donc

$$\langle \tau(f)\xi_i|\xi_i\rangle = \int\limits_{Z_i}\int\limits_{G^z_{Z_i}} f(\gamma)\langle U(\gamma)\xi_i(p(z),s(\gamma))|\xi_i(p(z),z)\rangle\, d\nu^z(\gamma)\, d\Lambda_\nu(z),$$

d'où l'égalité. Q.E.D.

7.4. REMARQUE. Si π est une représentation de $C^*(V,\mathscr{F})$, comme $I = \mathrm{Ker}\tau \supset \mathrm{Ker}\pi$, I est un idéal primitif induit de $C^*(V,\mathscr{F})$ (Définition 5.10).

La Proposition 7.3 admet une réciproque sous certaines hypothèses de moyennabilité.

7.5. DÉFINITIONS. (cf. [11, Définitions 2.3.1 et 2.3.6]). a) Soit μ une mesure quasi-invariante sur V. Nous dirons que μ est *moyennable* s'il existe un filtre $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions de $C_c^{\infty,0}(G)$ telles que:

i) Pour tout $x\in V$ et tout $i\in I$, on a $\int |f_i(\gamma)|^2\, d\nu^x(\gamma) = 1$;

ii) L'application

$$\gamma \to \int f_i(\gamma')\bar{f}_i(\gamma\gamma')\, d\nu^{s(\gamma)}(\gamma')$$

converge vers 1 quand "$i\to\infty$" dans la topologie $\sigma(L^\infty(G,\mu\circ\nu), L^1(G,\mu\circ\nu))$.

b) Nous dirons que le feuilletage $\mathscr{F}$ est *moyennable "en mesure"* si toute mesure quasi-invariante sur V est moyennable.

7.6. PROPOSITION. (cf. [12], 6.3) *Avec les notations ci-dessus, si la mesure* $\mu = \Lambda_\nu$ *est moyennable,*

$$\mathrm{Ker}\tau = \mathrm{Ker}\pi .$$

Preuve. Réalisons les $\tilde\sigma_x = \operatorname{Ind}_x \sigma_x$ dans $\tilde H_x = L^2(\ell_x,\alpha^x)\otimes H$. Soit $\eta\in L^2(V,\mu)\otimes H$. Nous allons construire une famille $(\eta_i)_{i\in I}$ telle que

$$\eta_i \in \int_V^{\oplus} H_x\, d\mu(x)$$

$$\langle \pi(f)\eta|\eta\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle \tau(f)\eta_i|\eta_i\rangle \quad (\forall f\in\mathscr{D}).$$

Soit $(f_i)_{i\in I}$ un filtre de fonctions réelles $\geqslant 0$ vérifiant les conditions i) et ii) de 7.5 a). Pour $(x, y) \in \mathscr{R}$, posons

$$\varphi_i(x, y) = (\sum_{\gamma\in G_y^x} |f_i(\gamma)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\eta_i(x, y) = \varphi_i(y, x)\delta(\gamma(x, y))^{-\frac{1}{2}} U(\gamma(x, y))^{-1}(\eta(y)).$$

Alors $\eta_i \in \int_V^{\oplus} \widetilde{H}_x \, d\mu(x)$ et $\|\eta_i\| = \|\eta\|$. Pour $f \in \mathscr{D}$, on a:

$$\langle \tau(f)\eta_i|\eta_i\rangle =$$

$$= \int_V \int_{\ell_x} \int_{G^x} f(\gamma(x, y)^{-1}\gamma)\langle \sigma_x(\gamma\gamma(x, s(\gamma)^{-1})\eta_i(x, s(\gamma))|\eta_i(x, y)\rangle \, d\nu^x(\gamma) \, d\alpha^x(y) \, d\mu(x) =$$

$$= \int_V \int_{\ell_x} \int_{G^y} f(\gamma)\langle \sigma_x(\gamma(x, y)\gamma\gamma(x, s(\gamma))^{-1}\eta_i(x, s(\gamma))|\eta_i(x, y)\rangle \, d\nu^y(\gamma) \, d\alpha^x(y) \, d\mu(x) =$$

$$= \int_V \int_{\ell_x} \int_{G^y} f(\gamma)\varphi_i(s(\gamma), x)\overline{\varphi_i(r(\gamma), x)}\delta(\gamma(x, y))^{-1/2}\delta(\gamma(x, s(\gamma)))^{-1/2} .$$

$$\cdot \langle U(\gamma)\eta(s(\gamma))|\eta(y)\rangle \, d\nu^y(\gamma) \, d\alpha^x(y) \, d\mu(x).$$

Comme $\delta(\gamma) = 1$ quand $r(\gamma) = s(\gamma)$, on a:

$$\delta(\gamma(x, y))\delta(\gamma) = \delta(\gamma(x, s(\gamma))) \quad \text{si } y = r(\gamma).$$

Si φ est une fonction borélienne sur $\mathscr{R}$, posons:

$$\Psi(\gamma(x, y)) = \varphi(x, y) \quad \text{et} \quad \Psi(\gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \gamma \neq \gamma(r(\gamma), s(\gamma)).$$

On a:

$$\int_V \int_{\ell_x} \varphi(x, y) \, d\alpha^x(y) \, d\mu(x) = \int \Psi(\gamma) \, d(\mu \circ \nu)(\gamma) = \int \Psi(\gamma^{-1})\delta(\gamma)^{-1} \, d(\mu \circ \nu)(\gamma) =$$

$$= \iint_{V\times\ell_y} \varphi(x, y)\delta(\gamma(y, x))^{-1} \, d\alpha^y(x) \, d\mu(y)$$

et donc

$$\langle\tau(f)\eta_i|\eta_i\rangle = \int\limits_V\int\limits_{\ell_y}\int\limits_{G^y} f(\gamma)\varphi_i(s(\gamma),x)\overline{\varphi_i(y,x)}\delta(\gamma(x,y))^{\frac{1}{2}}\delta(\gamma(x,s(\gamma)))^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\langle U(\gamma)\eta(s(\gamma))|\eta(y)\rangle \,\mathrm{d}\nu^y(\gamma)\,\mathrm{d}\alpha^y(x)\,\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int\limits_G\int\limits_{\ell_{r(\gamma)}} f(\gamma)\delta(\gamma)^{-1/2}\varphi_i(s(\gamma),x)\overline{\varphi_i(r(\gamma),x)}\cdot$$

$$\cdot\langle U(\gamma)\eta(s(\gamma))|\eta(r(\gamma))\rangle\,\mathrm{d}\alpha^{r(\gamma)}(x)d(\mu\circ\nu)(\gamma).$$

Or, pour $f\in\mathscr{D}$, $\Psi(\gamma) = f(\gamma)\delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}}\langle U(\gamma)\eta(s(\gamma))|\eta(r(\gamma))\rangle$ est une fonction de $L^1(G,\mu\circ\nu)$, et on a par l'inégalité de Cauchy-Schwartz:

$$1 \geqslant \int\limits_{\ell_{r(\gamma)}} \varphi_i(s(\gamma),x)\overline{\varphi_i(r(\gamma),x)}\,\mathrm{d}\alpha^{r(\gamma)}(x) =$$

$$= \int\Big(\sum_{g\in G_x^{s(\gamma)}}|f_i(g)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{g\in G_x^{r(\gamma)}}|f_i(g)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\alpha^{r(\gamma)}(x) \geqslant$$

$$\geqslant \int\sum_{g\in G_x^{s(\gamma)}} f_i(g)f_i(\gamma g)\,\mathrm{d}\alpha^{r(\gamma)}(x) = \int f_i(\gamma')f_i(\gamma\gamma')\,\mathrm{d}\nu^{s(\gamma)}(\gamma')\,.$$

D'après la propriété ii) de la définition 7.5.a), on a:

$$\lim_{i\to\infty}\langle\tau(f)\eta_i|\eta_i\rangle = \iint f(\gamma)\delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}}\langle U(\gamma)\eta(s(\gamma))|\eta(r(\gamma))\rangle\,\mathrm{d}(\mu\circ\nu)(\gamma) = \langle\pi(f)\eta|\eta\rangle\,.$$

Q.E.D.

BIBLIOGRAPHIE

1. CONNES, A., *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, Lectures Notes in Math., **725**(1978), 19–143.
2. DIXMIER, J., *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier Villars, Paris, 1967.
3. FELL, J. M. G., Weak containment and induced representations of groups. II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **110**(1964), 424–447.
4. FELL, J. M. G., The structure of algebras of operator fields, *Acta. Math.*, **106**(1961), 233–280.
5. GLIMM, J., Families of induced representations, *Pacific J. Math.*, **12**(1962), 885–911.
6. GOOTMAN, E.; ROSENBERG, J., The structure of crossed product C^*-algebras. A proof of the generalized Effros-Hahn conjecture, *Invent. Math.*, **102**(1979), 283–298.

7. HAHN, P., *Haar measure and convolution algebra on ergodic groupoïds*, Ph. D. Thesis, Harvard University, 1975.
8. PEDERSEN, G. K., *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, New-York, 1979.
9. PLANTE, J. F., Foliations with measure preserving holonomy, *Ann. of Math.*, **102**(1975), 327–361.
10. REEB, G., *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Hermann, Paris, 1952.
11. RENAULT, J. N., *A groupoïd approach to C^*-algebras*, Thesis, University of California, Berkeley, 1978.
12. SAUVAGEOT, J. L., Idéaux primitifs de certains produits croisés, *Math. Ann.*, **231**(1977), 61–76.

THIERRY FACK and GEORGES SKANDALIS
Laboratoire de Mathématiques Fondamentales,
Université Pierre et Marie Curie,
UER 48-Aile 45-46
4, Place Jussieu, 7523 Paris Cedex 05,
France.

Received April 29, 1981.