J. OPERATOR THEORY
10(1983), 251–287

ANTIAUTOMORPHISMES INVOLUTIFS DES FACTEURS DE VON NEUMANN INJECTIFS. I

T. GIORDANO

INTRODUCTION

Soit M, une algèbre de von Neumann. Rappelons qu'un antiautomorphisme α de M est une bijection linéaire de M telle que, pour tout x, y de M,

$$\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x) \quad \text{et} \quad \alpha(x^*) = \alpha(x)^*.$$

Deux antiautomorphismes α et β de M sont conjugués s'il existe un automorphisme θ de M avec $\alpha = \theta \circ \beta \circ \theta^{-1}$.

Nous nous intéressons ici à la classification à conjugaison près, des antiautomorphismes involutifs de M. Ce problème est, d'une part, équivalent à la détermination, à conjugaison près, des involutions antilinéaires, définissant une structure «réelle» sur M, au sens de Kasparov ([13]) et d'autre part, est étroitement lié à la classification, à isomorphisme près, des formes réelles de l'algèbre de Lie involutive, définie par M ([10]).

Nous obtenons une classification complète pour les facteurs injectifs de type II, agissant dans un espace de Hilbert séparable.

Rappelons le cas des facteurs discrets. Soient H, un espace de Hilbert séparable; M, un sous-facteur de type I de $\mathscr{L}(H)$ (i.e. M est isomorphe à $\mathscr{L}(H_n)$, où H_n est un espace de Hilbert de dimension $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$) et

$$\{e_{i,j} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$$

un système d'unités matricielles (s.u.m.) de M. La transposition t_n, définie par $t_n(e_{i,j}) = e_{j,i}$, pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$, est un antiautomorphisme involutif de M. Si n est impair, tout antiautomorphisme de période deux de M est conjugué à t_n, alors que, si n est pair ou infini, M possède deux classes d'équivalence d'antiautomorphismes involutifs ([1], [12]).

Soit R, le facteur hyperfini de type II_1, réalisé comme $\bigotimes_{\nu \geq 1} (M_{n_\nu}(\mathbf{C}), \tau_{n_\nu})$, où $(n_\nu)_{\nu \geq 1}$ est une suite d'entiers > 1 et τ_{n_ν} est la trace normalisée sur $M_{n_\nu}(\mathbf{C})$. Le produit tensoriel $t = \bigotimes_\nu t_{n_\nu}$ est un exemple d'antiautomorphisme involutif de R.

Soient M, une algèbre de von Neumann, de genre dénombrable; $\mathrm{Aut}(M)$, le groupe de ses automorphismes, muni de la topologie de la convergence simple en norme sur le prédual M_*; $\mathrm{Int}(M)$, le sous-groupe des automorphismes intérieurs et ε_M, la projection canonique de $\mathrm{Aut}(M)$ sur le groupe $\mathrm{Out}(M)$, quotient de $\mathrm{Aut}(M)$ par $\mathrm{Int}(M)$. Nous noterons $U(M)$, le groupe des unitaires de M; $\mathrm{Ant}(M)$, l'ensemble des antiautomorphismes de M et $A(M)$, le groupe $\mathrm{Aut}(M) \cup \mathrm{Ant}(M)$. Une transposition de M sera un élément involutif de $\mathrm{Ant}(M)$.

Dans le premier paragraphe, nous énonçons et prouvons quelques lemmes préliminaires, qui sont fréquemment utilisés dans la suite de ce travail.

Dans le deuxième paragraphe, nous démontrons pour les antiautomorphismes, un résultat analogue à celui du théorème 2.3.1 de [6]. En effet, si M est un facteur de McDuff (i.e. M est isomorphe à $M \otimes R$), à prédual séparable et $\alpha \in \mathrm{Ant}(M)$, nous construisons un unitaire a de M et un sous-facteur A de M, isomorphe à R, factorisant M en le produit tensoriel de A par son commutant relatif dans M, $A' \cap M$ et tel que

$$\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha \big|\, A = t.$$

Dans le troisième paragraphe, nous prouvons le théorème ci-dessous, qui est à la base de la classification annoncée:

THÉORÈME 1. *Soient α et β, deux transpositions d'un facteur de McDuff M, à prédual séparable. Alors, il existe $\theta \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$, avec $\alpha = \theta \circ \beta \circ \theta^{-1}$ si et seulement si*

$$\alpha \circ \beta \in \overline{\mathrm{Int}}(M).$$

Le schéma de la preuve, qui est un développement de celle du théorème 2 de [6], est le suivant: nous construisons deux unitaires a et b de M tels que $\alpha(a) = a$ et $\beta(b) = b$, et une suite de sous-facteurs de type I de M, qui commutent deux à deux, sont laissés globalement fixes par $\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha$ et $\mathrm{Ad}\, b \circ \beta$ et sont tels que:

a) le sous-facteur K de M, qu'ils engendrent, est isomorphe à R et factorise M en le produit tensoriel de K par $K' \cap M$.

b) sur $K' \cap M$, $\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha = \mathrm{Ad}\, b \circ \beta$.

Comme $\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha$ et α (resp. $\mathrm{Ad}\, b \circ \beta$ et β) sont intérieurement conjugués, la démonstration du théorème 1 se réduit à la comparaison de deux transpositions, définies sur K et de type produit tensoriel infini.

Dans le quatrième paragraphe, nous obtenons, en utilisant le théorème 1, la classification annoncée, à savoir:

(a) Deux transpositions du facteur hyperfini de type II_1 sont conjuguées.

(b) Il en est de même pour le facteur injectif de type II_∞.

L'assertion (a) a été obtenue en collaboration avec V. F. Jones et a été annoncée dans [11]. Signalons aussi l'existence d'une démonstration de (a), tout à fait différente, due à E. Størmer ([16]).

Enfin, dans l'appendice A, nous énonçons quelques inégalités, souvent appliquées sans référence dans ce travail.

Dans l'appendice B, nous rappelons la définition du centralisateur asymptotique d'une algèbre de von Neumann, donnée dans [2]. Nous y démontrons ainsi deux lemmes techniques sur les suites ω-centralisantes, que nous utiliserons fréquemment ci-après.

Cet article représente la première partie de ma thèse, présentée à l'Université de Neuchâtel et consacrée à la classification des transpositions des facteurs injectifs de type II et III_λ, $\lambda \neq 1$, ainsi que du facteur d'Araki-Woods de type III_1. Je remercie le Professeur R. Bader, qui m'a soutenu tout au long de ce travail, ainsi que MM. Aubert, Besson, de la Harpe et Jones des fructueuses conversations, que j'ai eues avec eux. Je tiens aussi à remercier le rapporteur de m'avoir indiqué une simplification de la preuve du lemme 1.8.

1. QUELQUES LEMMES PRÉLIMINAIRES

Nous prouvons ici deux résultats que nous utiliserons très souvent dans la suite de ce travail, à savoir la proposition 1.2 et surtout le lemme 1.6.

Ce dernier démontre que si $\psi \in M_*^+$, α est un antiautomorphisme et u, un unitaire d'une algèbre de von Neumann continue M, avec $\alpha^2 = \mathrm{Ad}\, u$ et $\alpha(u) = u^*$, il existe alors un unitaire v de M tel que $\mathrm{Ad}\, v \circ \alpha$ est une transposition de M et tel que $\|v - 1\|_\psi \leqslant 2\, \|u - 1\|_\psi$.

LEMME 1.1. *Soient M, une algèbre de von Neumann et $\alpha \in A(M)$. Pour tout unitaire u de M, tel que $\alpha(u) = u$, il existe un unitaire $v \in M$ avec $u = v\alpha(v)$. De plus, si $\psi \in M_*^+$, v peut être choisi tel que $\|v - 1\|_\psi \leqslant \|u - 1\|_\psi$.*

Démonstration. Considérons la décomposition spectrale $u = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda}\, dE(\lambda)$ et posons $v = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda/2}\, dE(\lambda)$. Alors v est un unitaire de l'algèbre de von Neumann U, engendrée par u. Remarquons aussi que $v^2 = u$ et que, comme α laisse U invariant point par point, $u = v\alpha(v)$. Notons E_ψ, la mesure borélienne, positive, bornée, définie par

$$E_\psi(\omega) = \psi(E(\omega)), \quad \text{pour tout } \omega \in \mathscr{B}(]-\pi, \pi]).$$

Nous avons:

$$\|v - 1\|_\psi^2 = \psi(2 - v - v^*) = \int_{-\pi}^{\pi} (2 - e^{i\lambda/2} - e^{-i\lambda/2})\, dE_\psi(\lambda) =$$

$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos \lambda/2) dE_\psi(\lambda).$$

$$\|u - 1\|_\psi^2 = \psi(2 - u - u^*) = \int_{-\pi}^{\pi} (2 - e^{i\lambda} - e^{-i\lambda})\, dE_\psi(\lambda) =$$

$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos \lambda)\, dE_\psi(\lambda).$$

Or, $1 - \cos \lambda/2 \leqslant 1 - \cos \lambda$, pour tout $\lambda \in]-\pi, \pi]$ et donc

$$\|v - 1\|_\psi \leqslant \|u - 1\|_\psi. \qquad \text{QED}$$

PROPOSITION 1.2. *Soient α, une transposition et u, un unitaire d'une algèbre de von Neumann M. Si $\alpha(u) = u$, alors α et $\mathrm{Ad}\, u \circ \alpha$ sont conjuguées par un automorphisme intérieur.*

Démonstration. Par le lemme 1.1, u peut s'écrire $v\alpha(v)$. Donc, $\mathrm{Ad}\, u \circ \alpha = \mathrm{Ad}(v\alpha(v)) \circ \alpha = \mathrm{Ad}\, v \circ \alpha \circ \mathrm{Ad}\, v^*$. QED

LEMME 1.3. *Soient M une algèbre de von Neumann, $\alpha \in \mathrm{Ant}(M)$ et u un unitaire de M tels que $\alpha^2 = \mathrm{Ad}\, u$ et $\alpha(u) = u^*$. Si -1 n'est pas une valeur propre de u, il existe un unitaire $v \in M$ avec $u^* = v\alpha(v^*)$.*

Si, de plus, $\psi \in M_*^+$, alors v peut être choisi tel que

$$\|v - 1\|_\psi \leqslant \|u - 1\|_\psi.$$

Démonstration. Considérons l'unique résolution E de l'identité telle que

$$u = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE(\lambda).$$

Comme, par hypothèse, $\alpha(u) = u^*$, nous avons $\mathrm{Sp}(u) = \overline{\mathrm{Sp}(u)}$ et $\alpha(E(\omega)) = E(-\omega)$ pour tout ensemble borélien ω de $]-\pi, \pi]$. Comme $E(\{\pi\}) = 0$, nous avons:

$$\int_{|\lambda| \leqslant \pi} f(\lambda)\, \mathrm{d}E(\lambda) = \int_{|\lambda| < \pi} f(\lambda)\, \mathrm{d}E(\lambda), \quad \forall f \in L^\infty_{\mathbf{C}}(]-\pi, \pi]).$$

Alors, $v = \int_{|\lambda|<\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}\, \mathrm{d}E(\lambda)$ est un unitaire de M avec $v^2 = u^*$ et $\alpha(v) = v^*$. Ainsi, nous avons bien $u^* = v\alpha(v^*)$. Par un calcul tout à fait semblable à celui du lemme 1.1, on vérifie que

$$\| v - 1 \|_\psi \leqslant \| u - 1 \|_\psi .$$ QED

Rappelons, mais sans preuve, le résultat suivant qui est bien connu.

LEMME 1.4. *Soit M, une algèbre de von Neumann. Deux* s.u.m. *d'ordre $n < \infty$ sont, alors, unitairement équivalents.*

LEMME 1.5. *Soient M une algèbre de von Neumann continue, de genre dénombrable et α une transposition de M. Il existe alors un unitaire v de M avec $\alpha(v) = -v$.*

Démonstration. Soit $(e_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ un s.u.m. de M. Par le lemme 1.4, il existe $w \in U(M)$ tel que $w\alpha(e_{j,i})w^* = e_{i,j}$. Comme α est une transposition,

$$\mathrm{Ad}(w\alpha(w^*))(e_{i,j}) = (\mathrm{Ad}\, w \circ \alpha)^2 (e_{i,j}) = e_{i,j}$$

et donc $w\alpha(w^*)$ commute aux $e_{i,j}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 2)$. Posons u, l'unitaire de M, égal à $e_{1,2}w + e_{2,1}\alpha(w)$, et $\beta = \mathrm{Ad}\, u \circ \alpha$. Nous avons:

$$\alpha(u) = \alpha(w)\alpha(e_{1,2}) + w\alpha(e_{2,1}) = \alpha(w)\,(w^* e_{2,1} w) + w(w^* e_{1,2} w) =$$

$$= e_{2,1}\,(\alpha(w)w^*)w + e_{1,2}w = u$$

et donc, par la proposition 1.2, β est une transposition intérieurement conjuguée à α. Comme

$$\beta(e_{1,1}) = \mathrm{Ad}\, u \circ \alpha(e_{1,1}) = \mathrm{Ad}\, u\,(\mathrm{Ad}\, w^*(e_{1,1})) =$$

$$= (e_{1,2} + e_{2,1}\,\alpha(w)w^*) e_{1,1} (e_{2,1} + e_{1,2} w\alpha(w^*)) = e_{2,2},$$

l'unitaire $v' = 2e_{1,1} - 1 = e_{1,1} - e_{2,2}$ est tel que $\beta(v') = -v'$. Comme un conjugué de α satisfait la conclusion de 1.5, il en est de même de la transposition α.

QED

REMARQUE 1.5.1. Une autre démonstration de ce lemme a été donnée par E. Størmer dans [15], lemme 2.12.

LEMME 1.6. *Soient M, une algèbre de von Neumann continue, de genre dénombrable, $\alpha \in \mathrm{Ant}(M)$ et u un unitaire de M tel que $\alpha^2 = \mathrm{Ad}\, u$ et $\alpha(u) = u^*$. Il existe alors un unitaire $v \in M$, avec $u^* = v\alpha(v^*)$. De plus, si $\psi \in M_*^+$, alors v peut être choisi tel que $\|v - 1\|_\psi \leqslant 2\|u - 1\|_\psi$.*

Démonstration. Décomposons u en $-p + w$ où p est le projecteur spectral de u, associé à la valeur propre -1 et w un opérateur partiellement isométrique avec $ww^* = w^*w = 1 - p$. Nous avons:

$$\|u - 1\|_\psi^2 = \|-2p + w - (1 - p)\|_\psi^2 =$$

$$= \|-2p\|_\psi^2 + \|w - (1 - p)\|_\psi^2.$$

Donc, $\|p\|_\psi \leqslant (1/2)\|u - 1\|_\psi$ et $\|w - (1 - p)\|_\psi \leqslant \|u - 1\|_\psi$. Comme, par hypothèse, $\alpha(u) = u^*$, nous avons $\alpha(p) = p$ et donc, par restriction, α définit un antiautomorphisme de l'algèbre de von Neumann continue M_p $(= pMp)$. De plus, comme $\alpha^2 = \mathrm{Ad}\, u$, α est une transposition de M_p. Donc, par le lemme 1.5, il existe un unitaire x de pMp tel que

$$\alpha(x) = -x \quad \text{et} \quad \|x\|_\psi = \psi(x^*x)^{1/2} = \psi(p)^{1/2} = \|p\|_\psi.$$

Sur M_{1-p}, α est un antiautomorphisme avec $\alpha^2 = \mathrm{Ad}\, w$ et $\alpha(w) = w^*$. Par le lemme 1.3, il existe alors $y \in M$ tel que $yy^* = y^*y = 1 - p$, $y\alpha(y^*) = w^*$ et $\|y - (1 - p)\|_\psi \leqslant \|w - (1 - p)\|_\psi$. Posons $v = x + y$. C'est un unitaire de M avec

$$v\alpha(v^*) = (x + y)\alpha(x^* + y^*) = (x + y)(-x^* + \alpha(y^*)) =$$

$$= -xx^* + y\alpha(y^*) = -p + w^* = u^*;$$

$$\|v - 1\|_\psi = \|x - p + y - (1 - p)\|_\psi \leqslant \|x - p\|_\psi + \|y - (1 - p)\|_\psi \leqslant$$

$$\leqslant 2\|p\|_\psi + \|w - (1 - p)\|_\psi \leqslant 2\|u - 1\|_\psi.$$

QED

REMARQUE 1.7. *Soient M un facteur, de genre dénombrable et α un antiautomorphisme de M, dont le carré est intérieur. Il existe alors une transposition β de M avec $\alpha \circ \beta \in \mathrm{Int}(M)$.*

Démonstration. Si M est un facteur de type I, la remarque est triviale. Nous pouvons donc supposer que M est un facteur continu. Comme $\alpha^2 \in \mathrm{Int}(M)$, il existe un unitaire w de M avec $\alpha^2 = \mathrm{Ad}\, w$ et donc $w\alpha(w) = \lambda \cdot 1 \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$, car

$$\mathrm{Ad}\, w \circ \alpha = \alpha^3 = \alpha \circ \mathrm{Ad}\, w = \mathrm{Ad}\, \alpha(w^*) \circ \alpha.$$

Posons $u = \lambda^{-1/2}w$. Nous avons alors $\alpha^2 = \mathrm{Ad}\, u$ et $\alpha(u) = u^*$. Par le lemme 1.6, il existe $v \in U(M)$ tel que $v\alpha(v^*) = u^*$ et donc tel que $\mathrm{Ad} v \circ \alpha$ soit une transposition de M. La remarque est donc vérifiée en posant $\beta = \mathrm{Ad}\, v \circ \alpha$. QED

LEMME 1.8. *Soient M une algèbre de von Neumann continue et α, une transposition de M. Pour tout $1 \leqslant n < \infty$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$, il existe un* s.u.m. $(f_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *de M avec*

$$\alpha(f_{i,j}) = \lambda^{i-j} f_{j,i}, \quad \textit{pour } 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

Démonstration. Soit $(e_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ un s.u.m. de M. Comme $(\lambda^{j-i}e_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est aussi un s.u.m. de M, il existe, par le lemme 1.4, un unitaire $w \in M$ avec, pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$,

$$\operatorname{Ad} w \circ \alpha(e_{i,j}) = \lambda^{i-j} e_{j,i}.$$

Soit $u = w\alpha(w^*)$. C'est un unitaire de $\{e_{i,j}\}' \cap M$ tel que

$$(\operatorname{Ad} w \circ \alpha)^2 = \operatorname{Ad} u \quad \text{et} \quad \operatorname{Ad} w \circ \alpha(u) = u^*.$$

Par le lemme 1.6, il existe un unitaire $v \in \{e_{i,j}\}' \cap M$ avec

$$u^* = (w\alpha(w^*))^* = v \operatorname{Ad} w \circ \alpha(v^*).$$

Posons $\beta = \operatorname{Ad}(vw) \circ \alpha$. C'est une transposition de M et

$$\beta(e_{i,j}) = \lambda^{i-j} e_{j,i} \quad \text{pour } 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

Comme $\alpha(vw) = vw$, il existe, par le lemme 1.1, un unitaire a de M avec $vw = a\alpha(a^*)$. Posons $f_{i,j} = ae_{i,j}a^*$, pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Les $f_{i,j}$ forment un s.u.m. qui satisfait les conclusions du lemme, car

$$\alpha(f_{i,j}) = \alpha(a^*)\alpha(e_{i,j})\alpha(a) = \lambda^{i-j}\alpha(a^*)\,(vw)^* e_{j,i} vw\alpha(a) =$$
$$= \lambda^{i-j} a e_{j,i} a^* = \lambda^{i-j} f_{j,i} \quad \text{pour } 1 \leqslant i,j \leqslant n. \qquad \text{QED}$$

2. FACTORISATION DES ANTIAUTOMORPHISMES PAR DES ANTIAUTOMORPHISMES DU FACTEUR HYPERFINI DE TYPE II_1

Le principal résultat, démontré ici, est la proposition 2.3. Pour tout antiautomorphisme α d'un facteur de McDuff M, à prédual séparable, nous construisons, pour toute suite $(n_\nu)_{\nu\geqslant 1}$ d'entiers > 1, un unitaire a de M et une suite $\{(e^\nu_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n_\nu}\}_{\nu\geqslant 1}$ de s.u.m. de M, commutant deux à deux, et satisfaisant les conditions suivantes:

(a) Pour tout $\nu \geqslant 1$, $\operatorname{Ad} a \circ \alpha(e^\nu_{i,j}) = e^\nu_{j,i}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n_\nu)$;

(b) Le sous-facteur K de type II_1, engendré par les $e^\nu_{i,j}$, factorise M en le produit tensoriel de K par $K' \cap M$.

Nous montrons, de plus, que si α est une transposition de M, nous pouvons choisir a tel que $\alpha(a) = a$ et donc tel que $\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha$ est une transposition.

Commençons ce chapitre par rappeler, sans démonstration, un résultat bien connu.

LEMME 2.0. *Soit N, une algèbre de von Neumann finie. Si, pour tout $n \geqslant 1$, il existe dans N, une partition de l'unité $(p_j)_{j=1,\ldots,n}$ de projecteurs deux à deux équivalents, alors N est continue.*

LEMME 2.1. *Soient M, un facteur de McDuff à prédual séparable; $\alpha \in \mathrm{Ant}(M)$; p, un entier $\geqslant 2$; $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$ et ω, un ultrafiltre libre sur $\mathbf{N}$. Alors, il existe un* s.u.m. $(F_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ *dans M_ω tel que*

$$\alpha_\omega(F_{i,j}) = \lambda^{i-j} F_{j,i} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant p).$$

Démonstration. Par le théorème 2.2.1 de [6], M_ω est une algèbre de von Neumann de type II_1. Si la période asymptotique de α^2, $p_a(\alpha^2)$, est nulle, le théorème 2.1.3 de [6] implique que α_ω^2 est stable, et donc, par le lemme 2.0 et 2.3.3 de [6], $(M_\omega)^{\alpha_\omega^2}$ est de type II_1. Si $p_a(\alpha^2) = n > 0$, α_ω^{2q} est proprement extérieur pour $1 \leqslant q \leqslant n-1$ et $\alpha_\omega^{2n} = 1$, par la proposition 2.1.2 de [6], et donc $(M_\omega)^{\alpha_\omega^2}$ est une algèbre de type II_1 ([8], III. 2.15).

Pour terminer la preuve, il suffit alors d'appliquer le lemme 1.8 à la restriction de α_ω à $(M_\omega)^{\alpha_\omega^2}$. QED

LEMME 2.2. *Soient M, un facteur de McDuff, à prédual séparable; $\alpha \in \mathrm{Ant}(M)$; p, un entier $\geqslant 2$ et φ, un état normal, fidèle de M. Alors, pour $\psi_1, \ldots, \psi_q \in M_*$ et $\varepsilon > 0$, il existe un unitaire $a \in M$ et un* s.u.m. $(e_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ *de M, satisfaisant les conditions suivantes:*

(a) $\|[\psi_r, e_{i,j}]\| \leqslant \varepsilon$ *pour* $r = 1, \ldots, q$ *et* $1 \leqslant i, j \leqslant p$;

(b) $\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(e_{i,j}) = e_{j,i}$ *pour* $1 \leqslant i, j \leqslant p$;

(c) $\|a - 1\|_\varphi \leqslant \varepsilon$;

et si α est une transposition,

(d) $\alpha(a) = a$.

Démonstration. Soit ω, un ultrafiltre libre sur $\mathbf{N}$. Par le lemme 2.1, il existe un s.u.m. $(F_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ dans M_ω tel que $\alpha_\omega(F_{i,j}) = F_{j,i}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant p)$. Soit ([6], proposition 1.1.3) $\{(f_{i,j}^k)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \mid k \in \mathbf{N}\}$, un système de suites représentatives de $(F_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, où, pour chaque k, $(f_{i,j}^k)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ est un s.u.m. de M.

Pour chaque k, $f_{1,1}^k$ est équivalent à $\alpha(f_{1,1}^k)$ (Lemme 1.4) et comme $\alpha_\omega(F_{1,1}) = F_{1,1}$, il existe ([6], 1.1.4) une suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'opérateurs partiellement isométriques telle que $u_k u_k^* = \alpha(f_{1,1}^k)$, $u_k^* u_k = f_{1,1}^k$ et telle que

$$(u_k - f_{1,1}^k) \underset{k \to \omega}{\longrightarrow} 0, \quad *\text{-fortement}.$$

Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $v_k = \sum_{j=1}^{p} \alpha(f_{1,j}^k)u_k f_{1,j}^k \in U(M)$. La suite $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est ω--centralisante. En effet, pour $1 \leqslant j \leqslant p$, tant $(\alpha(f_{1,j}^k))_{k\in\mathbf{N}}$, que $(f_{1,j}^k)_{k\in\mathbf{N}}$ le sont. De plus, comme $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée telle que

$$(u_k - f_{1,1}^k) \underset{k\to\omega}{\longrightarrow} 0, \quad {}^*\text{-fortement},$$

$(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est aussi ω-centralisante. Par ailleurs, $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ représente $\sum_{j=1}^{p} \alpha_\omega(F_{1,j})F_{1,1}F_{1,j} = 1$ et donc

$$(v_k - 1) \underset{k\to\omega}{\longrightarrow} 0, \quad {}^*\text{-fortement}.$$

Comme $u_k^*\alpha(f_{1,1}^k)u_k = f_{1,1}^k$, nous avons, pour $1 \leqslant s,\ t \leqslant p$,

$$\operatorname{Ad} v_k^* \circ \alpha(f_{s,t}^k) = \sum_{i,j=1}^{p} f_{j,1}^k u_k^* \alpha(f_{j,1}^k)\alpha(f_{s,t}^k)\alpha(f_{1,i}^k)\, u_k f_{1,i}^k =$$

$$= f_{t,1}^k u_k^* \alpha(f_{1,1}^k) u_k f_{1,s}^k = f_{t,s}^k.$$

Comme chaque suite $(f_{i,j}^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est ω-centralisante et que

$$(v_k^* - 1) \underset{k\to\omega}{\longrightarrow} 0 \quad {}^*\text{-fortement},$$

il existe k tel que (a), (b) et (c) sont vérifiés, avec $a = v_k^*$.

Supposons maintenant, que α est une transposition. Posons $y_k = v_k^*\alpha(v_k)$ et notons F_k, le sous-facteur de M, engendré par les $f_{i,j}^k$. Par construction,

$$\operatorname{Ad} v_k^* \circ \alpha \in \operatorname{Ant}(F_k' \cap M) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ad} y_k|F_k = (\operatorname{Ad} v_k^* \circ \alpha)^2|F_k = 1,$$

donc $y_k \in F_k' \cap M$. De plus,

$$\operatorname{Ad} v_k^* \circ \alpha(y_k) = v_k^*\alpha(v_k^*\alpha(v_k))v_k = \alpha(v_k^*)v_k = y_k^*.$$

Comme $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite ω-centralisante et que

$$v_k \underset{k\to\omega}{\longrightarrow} 1, \quad {}^*\text{-fortement},$$

il en est de même pour $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$. En appliquant, pour chaque k, le lemme 1.6 à $F_k' \cap M$, $\operatorname{Ad} v_k^* \circ \alpha$ et y_k, nous obtenons une suite $(z_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'unitaires de M telle que $\alpha(z_k v_k^*) = z_k v_k^*$, $\operatorname{Ad}(z_k v_k^*) \circ \alpha(f_{i,j}^k) = f_{j,i}^k$ et $z_k v_k^* \to 1$, *-fortement. La démonstration se termine alors comme ci-dessus. QED

PROPOSITION 2.3. *Soient M un facteur de McDuff, à prédual séparable et $\alpha \in \mathrm{Ant}(M)$. Pour toute suite $(n_\nu)_{\nu\geqslant 1}$ d'entiers $n_\nu \geqslant 2$, il existe un unitaire $a \in M$ et une suite de* s.u.m. $(e^\nu_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n_\nu}$ *dans M, commutant deux à deux et satisfaisant les conditions suivantes:*

(a) *Pour tout ν,* $\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(e^\nu_{i,j}) = e^\nu_{j,i}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n_\nu)$. *Posons A_ν, le sous-facteur de M, engendré par les $e^\nu_{i,j}$.*

(b) *Les A_ν engendrent un sous-facteur A de type* II_1 *de M, qui factorise M en le produit tensoriel de A par $A' \cap M$.*

De plus, si α est une transposition,

(c) $\alpha(a) = a$.

Démonstration. Soient φ, un état normal, fidèle sur M et $(\psi_j)_{j\geqslant 1}$, une suite dense dans M_*. Nous construisons par induction sur ν, une suite $(a_\nu)_{\nu\geqslant 1}$, d'unitaires de M et une suite $\{(e^\nu_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n_\nu}\}_{\nu\geqslant 1}$ de s.u.m. de M, satisfaisant, pour chaque ν, les conditions suivantes:

(α) Le facteur A_ν, engendré par les $e^\nu_{i,j}$, commute avec $A_1, A_2, \ldots, A_{\nu-1}$;

(β) $\|[e^\nu_{i,j}, \psi_k]\| \leqslant \dfrac{2^{-\nu}}{n_\nu^2}$ pour $k \leqslant \nu$, $1 \leqslant i, j \leqslant n_\nu$;

(γ) $a_\nu \in (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{\nu-1})'$ pour $\nu > 1$;

(δ) $\|(a_\nu \ldots a_1) - (a_{\nu-1} \ldots a_1)\|^\#_\varphi < 2^{-\nu}$ pour $\nu > 1$;

(ε) $\alpha_\nu = \mathrm{Ad}(a_\nu \ldots a_1) \circ \alpha$ satisfait $\alpha_\nu(e^k_{i,j}) = e^k_{j,i}$ pour $k \leqslant \nu$.

De plus, si α est une transposition, $\alpha(a_\nu \ldots a_1) = a_\nu \ldots a_1$ pour $\nu \geqslant 1$.

Pour $\nu = 1$, les conditions (α), (γ) et (δ) sont vides et la démonstration de (β) et (ε) provient d'une application directe du lemme 2.2 à M, α, n_1 et ψ_1. Supposons $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_\nu, a_\nu)$ construits et déterminons $A_{\nu+1}$ et $a_{\nu+1}$. Soient A^ν, le sous-facteur de M, engendré par $A_1, \ldots, A_\nu$ et $\tilde{A}$, son commutant relatif dans M. Comme M est identique à $A^\nu \otimes \tilde{A}$, il existe un nombre fini d'éléments $\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_r$ de $\tilde{A}_*$ et un $\varepsilon > 0$ tels que:

$$(*) \qquad [x \in \tilde{A}, \|x\| \leqslant 1, \|[\tilde{\psi}_j, x]\| < \varepsilon, 1 \leqslant j \leqslant r] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\|[\psi_k, x]\| \leqslant \frac{2^{-(\nu+1)}}{n_{\nu+1}^2}, \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant \nu + 1 \right].$$

Comme la restriction de φ à $\tilde{A}$ est fidèle, il existe $\eta > 0$ avec

$$(**) \quad [a \in U(\tilde{A})\ ;\ \|a - 1\|_\varphi < \eta] \Rightarrow \left[\|(a-1)a_\nu \ldots a_1\|^\#_\varphi < \frac{1}{2^{\nu+1}} \right].$$

Posons $\tilde{\alpha}$, la restriction de α_ν à $\tilde{A}$. Si α est une transposition, par hypothèse d'induction,

$$\alpha_\nu^2 = (\mathrm{Ad}\,(a_\nu \ldots a_1) \circ \alpha)^2 = \mathrm{Ad}[(a_\nu \ldots a_1)\alpha((a_\nu \ldots a_1)^*)] = 1.$$

Par le lemme 2.2, il existe un s.u.m. $(e_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n_{\nu+1}}$ et un unitaire $\tilde{a}$ de $\tilde{A}$ tels que:

(a) $\|[\tilde{\psi}_k, e_{i,j}]\| < \varepsilon$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$, $1 \leqslant i,j \leqslant n_{\nu+1}$;

(b) $\mathrm{Ad}\,\tilde{a} \circ \tilde{\alpha}(e_{i,j}) = e_{j,i}$, $\quad 1 \leqslant i,j \leqslant n_{\nu+1}$;

(c) $\|\tilde{a} - 1\|_\varphi < \eta$;

(d) $\tilde{\alpha}(\tilde{a}) = \tilde{a}$, si $\tilde{\alpha}$ est une transposition.

Posons $e_{i,j}^{\nu+1} = e_{i,j}$ et $a_{\nu+1} = \tilde{a}$. Nous obtenons (β), par (*) et (a), et (δ), par (**) et (c). La vérification des conditions (α) et (γ) est immédiate. Par (b), nous avons:

$$\alpha_{\nu+1}\,(e_{i,j}^{\nu+1}) = \mathrm{Ad}\,a_{\nu+1} \circ \alpha_\nu(e_{i,j}^{\nu+1}) = e_{j,i}^{\nu+1} \quad (1 \leqslant i,j \leqslant n_{\nu+1})$$

et pour $k \leqslant \nu$

$$\alpha_{\nu+1}(e_{i,j}^k) = \mathrm{Ad}\,a_{\nu+1} \circ \alpha_\nu(e_{i,j}^k) = e_{j,i}^k \quad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n_k)$$

car, par construction, $a_{\nu+1}$ commute avec $\alpha_\nu(e_{i,j}^k) = e_{j,i}^k$. De plus, si α est une transposition, nous avons par (d), $\alpha_\nu(a_{\nu+1}) = a_{\nu+1}$ et donc, en utilisant l'hypothèse d'induction,

$$\alpha(a_{\nu+1} \ldots a_1) = \alpha(a_\nu \ldots a_1)\alpha(a_{\nu+1}) =$$

$$= (a_\nu \ldots a_1)\,\alpha(a_{\nu+1})\,(a_\nu \ldots a_1)^*\,(a_\nu \ldots a_1) =$$

$$= \alpha_\nu(a_{\nu+1})(a_\nu \ldots a_1) = (a_{\nu+1} \ldots a_1).$$

La vérification de (ε) est donc terminée.

Fin de la démonstration. Comme φ est fidèle et par (δ), $(a_\nu \ldots a_1)_{\nu \geqslant 1}$ converge *-fortement vers un unitaire $a \in M$, qui satisfait, si α est une transposition, $\alpha(a) = a$ (par (ε)), ce qui démontre (c). De plus, nous avons, pour tout $k \geqslant 1$, $\mathrm{Ad}\,a \circ \alpha(e_{i,j}^k) = e_{j,i}^k$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n_k)$, ce qui prouve (a). Par (β) et les lemmes 2.3.5 et 2.3.6 de [6], les A_ν engendrent un sous-facteur A de type II_1, qui factorise M en $A \otimes (A' \cap M)$, ce qui démontre (b). QED

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Rappelons l'énoncé du théorème 1, mais auparavant, donnons la définition suivante:

DÉFINITION. Soient M, une algèbre de von Neumann et H, un sous-groupe de $A(M)$. Deux éléments de $A(M)$ α et β sont dits *H-équivalents* s'il existe $\theta \in H$ tel que

$$\beta = \theta \circ \alpha \circ \theta^{-1}.$$

THÉORÈME 1. *Soient α et β deux transpositions d'un facteur de McDuff M, à prédual séparable. Alors, α et β sont $\overline{\mathrm{Int}}(M)$-équivalentes si et seulement si $\alpha \circ \beta \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$.*

Comme $\overline{\mathrm{Int}}(M)$ est un sous-groupe normal de $A(M)$, la nécessité de la condition est évidente.

La démonstration de la suffisance de la condition se divise en trois parties. La première, composée du lemme 3.1, nous permet de supposer que α et β sont telles que:

(a) la période asymptotique ([6], définition 2.1.1) de $\alpha \circ \beta$ est nulle;

(b) si ω est un ultrafiltre libre sur $\mathbf{N}$, alors, pour tout entier $p \geqslant 2$, il existe une partition de l'unité $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant p-1}$, dans M_ω telle que, pour $0 \leqslant j \leqslant p-1$,

$$\alpha_\omega(P_j) = P_{-j+1} \quad \text{et} \quad \beta_\omega(P_j) = P_{-j}.$$

Le point principal de la deuxième partie est la preuve du lemme 3.6, qui sera appliqué, de manière récursive, dans la démonstration du lemme 3.10, qui est le coeur de la troisième partie.

Plus précisément, le schéma logique de la preuve du théorème 1 est le suivant:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
3.0 \arrow[dr] & 3.1 \arrow[d] & 3.2 \arrow[d, dash] & & & & \\
& 3.3 \arrow[dr] & 3.4 \arrow[d] & 3.5 \arrow[dl] & & & \\
& & 3.6 \arrow[drr] & & 3.7 \arrow[d] & 3.8 \arrow[dl] & 3.9 \arrow[dll] \\
& & & & 3.10 \rightarrow \text{fin de la démonstration.} & &
\end{tikzcd}$$

Le lemme 3.0 est bien connu. C'est pourquoi, nous en omettons la démonstration.

LEMME 3.0. *Soient M, une algèbre de von Neumann continue et $n \in \mathbf{N}$. Si $(p_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est une partition de l'unité dans M, formée de projecteurs deux à deux équivalents, alors le commutant relatif dans M des $(p_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est une algèbre continue.*

LEMME 3.1. *Soient M, un facteur de McDuff, à prédual séparable; α, β des transpositions de M et ω, un ultrafiltre libre sur $\mathbf{N}$. Il existe alors deux transpositions $\tilde{\alpha}$, $\overline{\mathrm{Int}}(M)$-équivalente à α et $\tilde{\beta}$, $\overline{\mathrm{Int}}(M)$-équivalente à β, satisfaisant les conditions suivantes:*

(a) $p_a(\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}) = 0$;

(b) *Pour tout entier $p \geqslant 2$, il existe une partition de l'unité $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant p-1}$ dans M_ω telle que:*

$$\tilde{\alpha}_\omega(P_i) = P_{-i+1} \quad et \quad \tilde{\beta}_\omega(P_i) = P_{-i} \quad (0 \leqslant i \leqslant p-1).$$

REMARQUE. Les indices sont calculés modulo p.

Démonstration. Remarquons, avant tout, que si $(e_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ est un s.u.m. d'un facteur K de type I_{n+1} et que t dénote la transposition de K, définie par $t(e_{i,j}) = e_{j,i}$, pour tout $0 \leqslant i, j \leqslant n$, il existe, alors, un s.u.m. $(f_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ de K (resp. $(g_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$) tel que

$$t(f_{i,j}) = f_{-j+1,-i+1} \quad (\text{resp.} \quad t(g_{i,j}) = g_{-j,-i}).$$

Posons, en effet,

$$c = \sum_{i=0}^{n} e_{-i+1,i} \quad \text{et} \quad d = \sum_{i=0}^{n} e_{-i,i}.$$

Comme ce sont des unitaires de K, satisfaisant $ct(c^*) = dt(d^*) = 1$, il existe, par le lemme 1.1, deux unitaires x et y de K tel que

$$xt(x) = c \quad \text{et} \quad yt(y) = d.$$

Posons $f_{i,j} = x\,e_{i,j}x^*$ (resp. $g_{i,j} = ye_{i,j}y^*$), pour tout $0 \leqslant i, j \leqslant n$. Par construction, nous avons:

$$t(f_{i,j}) = t(x^*)t(e_{i,j})t(x) = x^*ce_{j,i}c^*x = x^*e_{-j+1,-i+1}x = f_{-j+1,-i+1}$$

(resp. $t(g_{i,j}) = g_{-j,-i}$). Soit $(\psi_j)_{j\geqslant 1}$, une suite dense dans M_* et démontrons l'assertion suivante:

ASSERTION. *Pour toute suite $(n_\nu)_{\nu\geqslant 1}$ d'entiers $\geqslant 1$, il existe une suite $\{(e^\nu_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n_\nu}\}_{\nu\geqslant 1}$ de* s.u.m. *de M, commutant deux à deux et deux transpositions $\tilde{\alpha}$, $\overline{\mathrm{Int}}(M)$-équivalente à α et $\tilde{\beta}$, $\overline{\mathrm{Int}}(M)$-équivalente à β, telles que, pour tout $\nu \geqslant 1$,*

(1) $$\|[\psi_r, e^\nu_{i,j}]\| \leqslant \frac{2^{-\nu}}{n_\nu+1} \quad \textit{pour } r \leqslant \nu,\ 0 \leqslant i,j \leqslant n_\nu;$$

(2) $$\tilde{\alpha}(e^\nu_{i,j}) = e^\nu_{-j+1,-i+1} \quad \textit{et} \quad \tilde{\beta}(e^\nu_{i,j}) = e^\nu_{-j,-i} \quad \textit{pour } 0 \leqslant i,j \leqslant n_\nu.$$

Démonstration de l'assertion. Soit $(m_k)_{k\geqslant 1}$, la suite d'entiers dont les premiers termes sont donnés par:

$$n_1, n_1, n_2, n_1, n_2, n_3, n_1, n_2, n_3, n_4, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_1, \ldots .$$

Par la remarque ci-dessus, la proposition 2.3 et sa démonstration, appliquée à α (resp. β) et à la suite $(m_k)_{k\geqslant 1}$, il existe un unitaire a (resp. b) et une suite de s.u.m. $(f^k_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant m_k}$ (resp. $(g^k_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant m_k}$), commutant deux à deux et tels que, pour tout $k \geqslant 1$,

(a) $\mathrm{Ad}\,a \circ \alpha(f^k_{i,j}) = f^k_{-j+1,-i+1}$ (resp. $\mathrm{Ad}\,b \circ \beta(g^k_{i,j}) = g^k_{-j,-i}$) pour $0 \leqslant i, j \leqslant m_k$;

(b) $\alpha(a) = a$ (resp. $\beta(b) = b$);

(c) $\|[\psi_r, f^k_{i,j}]\| \leqslant 2^{-k}/(m_k + 1)$ (resp. $\|[\psi_r, g^k_{i,j}]\| \leqslant 2^{-k}/(m_k + 1)$) pour $0 \leqslant i, j \leqslant m_k$ et $r \leqslant k$.

Par un argument tout à fait semblable à celui de la preuve de la proposition 2.2.3 de [6], nous construisons, par induction, une sous-suite $(m_{k_p})_{p\geqslant 1}$ de $(m_k)_{k\geqslant 1}$ et un automorphisme $\sigma \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$, avec pour $p \geqslant 1$, $m_{k_p} = n_p$ et

$$\sigma(f^{k_p}_{i,j}) = g^{k_p}_{i,j} \qquad (0 \leqslant i, j \leqslant m_{k_p}).$$

Pour terminer la démonstration de l'assertion, posons, d'une part, $e^\nu_{i,j} = g^{k_\nu}_{i,j}$, pour tout $\nu \geqslant 1$ et $0 \leqslant i, j \leqslant n_\nu$ et d'autre part, $\tilde{\alpha} = \sigma \circ \mathrm{Ad}\, a \circ \alpha \circ \sigma^{-1}$ et $\tilde{\beta} = \mathrm{Ad}\, b \circ \beta$. Par (b) et la proposition 1.2, $\tilde{\alpha}$ (resp. $\tilde{\beta}$) est $\overline{\mathrm{Int}}(M)$-équivalente à α (resp. β) et par (a) et la définition de σ, $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ satisfont le point (2) de l'assertion.

Fin de la démonstration. Soit $(n_\nu)_{\nu\geqslant 1}$, la suite d'entiers dont les premiers termes sont donnés par:

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, \ldots .$$

Soient $\{(e^\nu_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n_\nu}\}_{\nu\geqslant 1}$, une suite de s.u.m. de M et $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ satisfaisant les conclusions de l'assertion relativement à la suite $(n_\nu)_{\nu\geqslant 1}$ ci-dessus.

Vérifions que $p_a(\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}) = 0$. Comme, pour tout $\nu \geqslant 1$,

$$\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}\,(e^\nu_{i,1}) = e^\nu_{i+1,j+1}$$

et que, par définition de la suite $(n_\nu)_{\nu\geqslant 1}$, tous les entiers y apparaissent une infinité de fois, $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}$ est extérieurement conjugué à $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta} \otimes s^1_p$, pour tout $p \geqslant 2$, par définition des s^1_p ([7], proposition 1.6). Par le théorème 1 de [6], cela démontre que $p_a(\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}) = 0$.

Prouvons 3.1 (b). Soit p, un entier $\geqslant 2$ et posons $\mathscr{P} = \{\nu \in \mathbf{N} \mid n_\nu = p - 1\}$. Par définition de la suite $(n_\nu)_{\nu\geqslant 1}$, $\mathscr{P}$ est un ensemble infini. Pour $\nu \in \mathscr{P}$, soit $p^\nu_j = e^\nu_{j,j}$. Les $(p^\nu_j)_{0\leqslant j\leqslant p-1}$ forment une partition de l'unité dans M avec

$$\tilde{\alpha}\,(p^\nu_j) = p^\nu_{-j+1} \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}(p^\nu_j) = p^\nu_{-j}.$$

$\{(p^\nu_j)_{0\leqslant j\leqslant p-1}\}_{\nu\in\mathscr{P}}$ est clairement une suite ω-centralisante et donc représente une partition $(P_j)_{0\leqslant j\leqslant p-1}$ de l'unité dans M_ω. Comme $\tilde{\alpha}_\omega(P_j) = P_{-j+1}$ et $\tilde{\beta}_\omega(P_j) = P_{-j}$, le lemme est bien démontré. QED

LEMME 3.2. *Soient M, un facteur de McDuff, à prédual séparable et α,β deux transpositions de M, avec $\alpha \circ \beta \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$ et $p_a(\alpha \circ \beta) = 0$.*

Alors, il existe une suite $(z_p)_{p\in\mathbf{N}}$ d'unitaires de M telle que, quand $p \to \infty$,

(a) $\operatorname{Ad} z_p \to \alpha \circ \beta$ *dans* $\operatorname{Aut}(M)$.

(b) $(\alpha(z_p^k) - z_p^k) \to 0$, **-fortement et* $(\beta(z_p^k) - z_p^k) \to 0$, **-fortement, pour tout* $k \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. Par le lemme 3.1.1 de [6], il existe une suite $(y_p)_{p\in \mathbf{N}}$ d'unitaires de M telle que, quand $p \to \infty$,

(i) $\operatorname{Ad} y_p \to \alpha \circ \beta$ dans $\operatorname{Aut}(M)$;

(ii) $(\alpha \circ \beta(y_p^k)) - y_p^k) \to 0$ *-fortement, $\forall\, k \in \mathbf{Z}$.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, posons $w_p = y_p\alpha(y_p^*)$. C'est un unitaire de M. Comme par (i), $\operatorname{Ad} y_p \circ \alpha \to \alpha \circ \beta \circ \alpha$ dans $A(M)$, nous avons

$$\operatorname{Ad}(y_p\alpha(y_p^*)) = \operatorname{Ad} w_p \xrightarrow[p\to\infty]{} (\alpha \circ \beta \circ \alpha)^2 = 1 \text{ dans } \operatorname{Aut}(M).$$

Par conséquent, $(w_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite centralisante. Soient ω, un ultrafiltre libre sur $\mathbf{N}$ et W, l'unitaire de M_ω, représenté par $(w_p)_{p\in\mathbf{N}}$. Il appartient à $(M_\omega)^{\alpha_\omega\circ\beta_\omega}$ la sous-algèbre des points fixes de M_ω sous $\alpha_\omega \circ \beta_\omega$. En effet, la suite $(\alpha \circ \beta(w_p))_{p\in\mathbf{N}}$ est équivalente à la suite $(w_p)_{p\in\mathbf{N}}$, car, comme, par (ii),

$$(\alpha \circ \beta(y_p) - y_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad (\alpha \circ \beta \circ \alpha(y_p^*) - \alpha(y_p^*)) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0, \text{ *-fortement}$$

et que, par (i), $\operatorname{Ad}\alpha(y_p^*) \xrightarrow[p\to\infty]{} \beta \circ \alpha$ dans $\operatorname{Aut}(M)$, nous obtenons, par le lemme B.4.2), que:

$$(\alpha \circ \beta(y_p)\alpha \circ \beta \circ \alpha(y_p^*) - y_p\alpha(y_p^*)) = (\alpha \circ \beta(w_p) - w_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \quad \text{*-fortement.}$$

Si $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite ω-centralisante, il en est de même de la suite $(\operatorname{Ad} y_p \circ \alpha(x_p))_{p\in\mathbf{N}}$, par (i) et le lemme B.4.1). Ceci nous permet d'énoncer l'assertion suivante.

ASSERTION. *L'application, qui, à toute suite représentative* $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ *de* $X \in M_\omega$, *associe l'élément de* M_ω, *représenté par la suite* $(\operatorname{Ad} y_p \circ \alpha(x_p))_{p\in\mathbf{N}}$, *induit un antiautomorphisme* γ *de* M_ω *ayant les propriétés suivantes:*

(1) γ *laisse* $(M_\omega)^{\alpha_\omega\circ\beta_\omega}$ *globalement invariant et donc définit, par restriction, un élément* $\tilde{\gamma} \in \operatorname{Ant}((M_\omega)^{\alpha_\omega\circ\beta_\omega})$;

(2) $\gamma^2 = \operatorname{Ad} W$ *et donc,* $\tilde{\gamma}^2 = \operatorname{Ad} W \in \operatorname{Int}((M_\omega)^{\alpha_\omega\circ\beta_\omega})$;

(3) $\tilde{\gamma}(W) = W^*$.

Démonstration de l'assertion. γ est bien défini, car, si $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite ω-centralisante de M, qui tend vers 0, *-fortement, il en est de même, par le lemme B.4.2) de la suite $(\operatorname{Ad} y_p \circ \alpha(x_p))_{p\in\mathbf{N}}$.

Il est clair que γ est un antiautomorphisme de M_ω, car, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\operatorname{Ad} y_p \circ \alpha \in \operatorname{Ant}(M)$.

Soit $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$, une suite représentative de $X \in (M_\omega)^{\alpha_\omega \circ \beta_\omega}$. Pour démontrer (1), il suffit de vérifier que les deux suites ω-centralisantes

$$(\operatorname{Ad}(\alpha \circ \beta(y_p))(\alpha(x_p)))_{p\in\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad (\operatorname{Ad} y_p(\alpha(x_p)))_{p\in\mathbf{N}}$$

sont équivalentes, car par le lemme B.4.2),

$$(\alpha \circ \beta(\operatorname{Ad} y_p \circ \alpha(x_p)) - \operatorname{Ad}(\alpha \circ \beta(y_p)) \circ \alpha(x_p)) \underset{p\to\omega}{\longrightarrow} 0, \ ^*\text{-fortement.}$$

Comme $\alpha_\omega(X) \in M_\omega$ et que, par (i), $(\alpha \circ \beta(y_p) - y_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite ω-centralisante, qui tend vers 0, *-fortement, $((\alpha \circ \beta(y_p) - y_p)\alpha(x_p)) \underset{p\to\omega}{\longrightarrow} 0$, *-fortement. Par le lemme B.4.2), nous obtenons:

$$(\alpha \circ \beta(y_p) - y_p)\alpha(x_p)\, \alpha \circ \beta(y_p^*) \underset{p\to\omega}{\longrightarrow} 0, \quad ^*\text{-fortement.}$$

On montre de la même manière, que:

$$y_p\alpha(x_p)(\alpha \circ \beta(y_p^*) - y_p^*) \underset{p\to\omega}{\longrightarrow} 0, \quad ^*\text{-fortement}$$

ce qui termine la démonstration de (1).

Comme $(w_p)_{p\in\mathbf{N}} = (y_p\alpha(y_p^*))_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite représentative de W, (2) est clair. $\tilde{\gamma}(W)$ est représenté par

$$(\operatorname{Ad} y_p \circ \alpha(w_p))_{p\in\mathbf{N}} = (\alpha(y_p)y_p^*)_{p\in\mathbf{N}} = (w_p^*)_{p\in\mathbf{N}}$$

ce qui prouve (3) et termine la démonstration de l'assertion.

Fin de la démonstration du lemme. Comme, par hypothèse, $p_a(\alpha \circ \beta) = 0$, le théorème 2.1.3 de [6] implique que $\alpha_\omega \circ \beta_\omega$ est stable et donc, par le lemme 2.3.3 de [6] et le lemme 2.0, $(M_\omega)^{\alpha_\omega \circ \beta_\omega}$ est une algèbre de type II_1. Par le lemme 1.6, il existe un unitaire V de $(M_\omega)^{\alpha_\omega \circ \beta_\omega}$ avec $W^* = V\tilde{\gamma}(V^*)$. Soit $(v_p)_{p\in\mathbf{N}}$, une suite d'unitaires de M, représentant V (existence par la proposition 1.1.3 de [6]) et posons $z_p = v_p y_p$, pour tout $p \in \mathbf{N}$.

Comme $\operatorname{Ad} v_p \to 1$ dans $\operatorname{Aut}(M)$, $\operatorname{Ad} z_p \to \alpha \circ \beta$ dans $\operatorname{Aut}(M)$, quand $p \to \omega$. Vérifions que les suites

$$(\alpha(z_p) - z_p)_{p\in\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad (\beta(z_p) - z_p)_{p\in\mathbf{N}}$$

tendent vers 0, *-fortement, lorsque $p \to \omega$. Par construction de la suite $(v_p)_{p\in\mathbf{N}}$, nous avons:

$$(v_p y_p \alpha(v_p^*) y_p^* - w_p^*) = [(v_p y_p \alpha(v_p^*) - \alpha(y_p))y_p^*] \underset{p\to\omega}{\longrightarrow} 0, \quad ^*\text{-fortement,}$$

et donc, par (i) et le lemme B.4.2),

$$(v_p y_p - \alpha(v_p y_p)) = (z_p - \alpha(z_p)) \xrightarrow[p\to\omega]{} 0, \quad \text{*-fortement}$$

car

$$\operatorname{Ad}\alpha(v_p^*) \to 1 \quad \text{dans } \operatorname{Aut}(M).$$

Comme $(v_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite représentative de $V \in (M_\omega)^{\alpha_\omega\circ\beta_\omega}$ les deux suites ω-centralisantes $(v_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(\alpha\circ\beta\,(v_p))_{p\in\mathbf{N}}$ sont équivalentes. Donc,

$$(\alpha\circ\beta(v_p) - v_p) \to 0, \quad \text{*-fortement, quand } p\to\omega$$

et par conséquent, $(\alpha\circ\beta(z_p) - z_p) = (\alpha\circ\beta(v_p y_p) - v_p y_p)$ aussi, car, par (ii) et le lemme B.4.2), tant $(\alpha\circ\beta(v_p)\,(\alpha\circ\beta(y_p) - y_p))_{p\in\mathbf{N}}$ que $((\alpha\circ\beta(v_p) - v_p)y_p)_{p\in\mathbf{N}}$ convergent *-fortement vers 0. Comme α est involutif, $(\alpha(z_p) - \beta(z_p))_{p\in\mathbf{N}}$ et donc $(\beta(z_p) - z_p)_{p\in\mathbf{N}}$ tendent vers 0 *-fortement.

Nous avons ainsi montré comment construire une suite d'unitaires $(z_p)_{p\in\mathbf{N}}$, vérifiant 3.2(a) et $(\alpha(z_p) - z_p)\to 0$, *-fortement, $(\beta(z_p) - z_p)\to 0$, *-fortement, quand $p\to\infty$.

Soit $r\in\mathbf{N}$ et supposons que $(\alpha(z_p^r) - z_p^r) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$, *-fortement. Comme $((\alpha(z_p^r) - z_p^r)\alpha(z_p))_{p\in\mathbf{N}}$ et $(z_p^r(\alpha(z_p) - z_p))_{p\in\mathbf{N}}$ convergent vers 0 *-fortement et que

$$\alpha(z_p^{r+1}) - z_p^{r+1} = (\alpha(z_p^r) - z_p^r)\alpha(z_p) + z_p^r(\alpha(z_p) - z_p),$$

$$(\alpha(z_p^{r+1}) - z_p^{r+1}) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0, \quad \text{*-fortement.}$$

La condition 3.2(b) se démontre alors par induction. QED

LEMME 3.3. *Soient M, comme ci-dessus et α, β deux transpositions de M, satisfaisant les conclusions de* 3.1. *Alors, pour tout $n\geqslant 2$, il existe une suite de partitions de l'unité $\{(p_j^k)_{0\leqslant j\leqslant n-1}\}_{k\in\mathbf{N}}$ et deux suites d'unitaires de M, $(c_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(d_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telles que:*

(i) $\|[\psi, p_j^k]\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ *pour* $0\leqslant j\leqslant n-1$ *et tout* $\psi\in M_*$;

(ii) *Pour tout* $k\in\mathbf{N}$, $\operatorname{Ad}c_k\circ\alpha$ *et* $\operatorname{Ad}d_k\circ\beta$ *sont des transpositions de M, satisfaisant:*

a) $\operatorname{Ad}c_k\circ\alpha(p_j^k) = p_{-j+1}^k$ *et* $\operatorname{Ad}d_k\circ\beta(p_j^k) = p_{-j}^k$ $(0\leqslant j\leqslant n-1)$;

b) $\alpha(c_k) = c_k$ et $\beta(d_k) = d_k$;

(iii) $(c_k - 1) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, **-fortement,*

$(d_k - 1) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, **-fortement.*

Démonstration. Par 3.1 et la proposition 1.1.3 (c) de [6], il existe une suite de partitions de l'unité dans $M, \{(p_j^k)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}\}_{k \in \mathbf{N}}$ telle que, quand $k \to \infty$,

(a) $(\alpha(p_j^k) - p_{-j+1}^k) \to 0$, *-fortement;

(b) $(\beta(p_j^k) - p_{-j}^k) \to 0$, *-fortement;

(c) $\|[\psi, p_j^k]\| \to 0$, pour tout $\psi \in M_*$.

Par (c), la vérification de (i) est triviale.

Pour tout $0 \leqslant j \leqslant n-1$ et tout $k \in \mathbf{N}$, $\alpha(p_j^k)$ et p_{-j+1}^k sont des projecteurs équivalents. Par (a) et le lemme 1.1.4 de [6], il existe, alors, n suites d'opérateurs partiellement isométriques $\{(z_j^k)_{k \in \mathbf{N}}\}_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$ de M avec $z_j^k (z_j^k)^* = \alpha(p_j^k)$, $(z_j^k)^* z_j^k = p_{-j+1}^k$ et $(z_j^k - \alpha(p_j^k)) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, *-fortement.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, posons $c_1^k = \sum_{j=0}^{n-1} (z_j^k)^*$. C'est un unitaire de M tel que, pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$\operatorname{Ad} c_1^k \circ \alpha(p_j^k) = p_{-j+1}^k .$$

De plus, la suite d'unitaires $(c_1^k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers 1, *-fortement, quand $k \to \infty$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'antiautomorphisme $\operatorname{Ad} c_1^k \circ \alpha$ laisse globalement fixe le commutant relatif dans M des p_j^k, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, et définit donc, par restriction, un antiautomorphisme de $\{p_j^k, 0 \leqslant j \leqslant n-1\}' \cap M$, qui est une algèbre continue, par le lemme 3.0. De plus, $(\operatorname{Ad} c_1^k \circ \alpha)^2 = \operatorname{Ad}(c_1^k \alpha(c_1^k)^*)$ est un automorphisme intérieur de $\{p_j^k, 0 \leqslant j \leqslant n-1\}' \cap M$, car, comme

$$c_1^k \alpha(c_1^k)^* p_j^k \alpha(c_1^k)(c_1^k)^* = c_1^k \alpha(c_1^k \alpha(p_j^k)(c_1^k)^*)(c_1^k)^* =$$

$$= c_1^k \alpha(p_{-j+1}^k)(c_1^k)^* = p_j^k \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant n-1,$$

$$c_1^k \alpha(c_1^k)^* \in \{p_j^k, \ 0 \leqslant j \leqslant n-1\}' \cap M.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\operatorname{Ad} c_1^k \circ \alpha(c_1^k \alpha(c_1^k)^*) = (c_1^k \alpha(c_1^k)^*)^*$ et $(c_1^k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers 1, *-fortement, quand $k \to \infty$. Il existe, donc, par le lemme 1.6, une suite d'unitaires $(c_2^k)_{k \in \mathbf{N}}$ de M telle que:

(0) $(c_2^k - 1) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, *-fortement;

(1) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $c_2^k \in \{p_j^k, \ 0 \leqslant j \leqslant n-1\}' \cap M$ et

$$(c_1^k \alpha(c_1^k)^*)^* = c_2^k \operatorname{Ad} c_1^k \circ \alpha((c_2^k)^*).$$

Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $c_k = c_2^k c_1^k$. Par construction, la suite $(c_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'unitaires de M satisfait la première partie de (ii) et (iii). La démonstration de la deuxième partie se fait de la même manière. QED

LEMME 3.4. *Soient M comme ci-dessus et α, β deux transpositions de M satisfaisant les conditions de 3.2. Soient de plus, n un entier $\geqslant 2$ et $(p_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$, une partition de l'unité dans M telle que:*

$$\alpha(p_j) = p_{-j+1} \quad et \quad \beta(p_j) = p_{-j}, \qquad \forall\, 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Alors, il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'unitaires de M telle que, quand $k \to \infty$,

(a) $\operatorname{Ad} u_k \to \alpha \circ \beta$ *dans* $\operatorname{Aut}(M)$*;*

(b) $(\alpha(u_k^r) - u_k^r) \to 0$ **-fortement et* $(\beta(u_k^r) - u_k^r) \to 0$ **-fortement, pour tout* $r \in \mathbf{Z}$*;*

(c) *Pour tout* $k \in \mathbf{N}$, $u_k p_j u_k^* = p_{j+1}$, *pour* $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Démonstration. Soit $(z_k)_{k \in \mathbf{N}}$, une suite d'unitaires de M, satisfaisant les conclusions du lemme 3.2. Comme, pour tout $k \in \mathbf{N}, p_{j+1} = \alpha(p_j)$ et $z_k p_j z_k^*$ sont des projecteurs de M, équivalents et que, par 3.2 (a),

$$(\operatorname{Ad} z_k(p_j) - p_{j+1}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{*-fortement,}$$

il existe, par le lemme 1.1.4 (b) de [6], une suite d'opérateurs partiellement isométriques $(x_j^k)_{k \in \mathbf{N}}$ telle que

$$(x_j^k)^* x_j^k = z_k p_j z_k^*, \quad x_j^k (x_j^k)^* = p_{j+1} \quad \text{et} \quad (x_j^k - p_{j+1}) \to 0, \quad \text{*-fortement.}$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $x_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j^k$ est un unitaire de M, tel que:

(1) $$x_k z_k p_j z_k^* x_k^* = p_{j+1} \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant n-1;$$

(2) $$(x_k - 1) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{*-fortement.}$$

Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_k = x_k z_k$. Par (2), la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'unitaires de M satisfait (a) et par (1), l'affirmation (c) est vérifiée, pour tout $k \in \mathbf{N}$. Pour vérifier (b), remarquons, tout d'abord, que, pour $r \in \mathbf{Z}$

(3) $$((x_k z_k)^r - z_k^r) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{*-fortement.}$$

Soit $r \in \mathbf{N}$ et supposons que

$$((x_k z_k)^r - z_k^r) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{*-fortement.}$$

Comme, pour tout $k \in \mathbf{N}$, nous avons

$$(x_k z_k)^{r+1} - z_k^{r+1} = (x_k - 1) z_k^{r+1} + x_k z_k ((x_k z_k)^r - z_k^r),$$

nous obtenons, par le lemme B.4.2), que

$$((x_k z_k)^{r+1} - z_k^{r+1}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad {}^*\text{-fortement.}$$

L'assertion (3) se démontre alors par induction.

Comme, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $\gamma \in A(M)$,

$$\gamma((x_k z_k)^r) - (x_k z_k)^r = \gamma((x_k z_k)^r - z_k^r) + \gamma(z_k^r) - z_k^r + z_k^r - (x_k z_k)^r,$$

nous obtenons (b), par 3.2 (b) et (3). QED

Rappelons l'énoncé du lemme 3.1.3 de [6], que nous utiliserons dans la démonstration du lemme 3.6.

LEMME 3.5. *Soient M, une algèbre de von Neumann; φ, un état sur M et $u \in M$, un unitaire, dont la mesure spectrale à valeur projecteur est dénotée par $J \mapsto e(J)$ (J sous-ensemble borélien de $\mathbf{T}$).*

Alors, $A(\varphi, u) = \{\lambda \in \mathbf{T} \mid \varphi(e(J_{\lambda,q})) \leqslant 2^{-q}, \ \forall\ q \in \mathbf{N}, q > 2\}$ est non vide, où $J_{\lambda,q}$ est l'intervalle de $\mathbf{T}$, de centre λ et de mesure de Haar 2^{-2q}.

Comme dans [6], nous dénoterons par f_n, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, la fonction borélienne de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{T}$, définie par:

$$f_n(e^{i\theta}) = e^{i\theta/n}, \ \forall\ \theta, \ -\pi < \theta \leqslant \pi.$$

Le lemme suivant est l'aboutissement de la deuxième partie de la preuve du théorème 1.

LEMME 3.6. *Soient M, un facteur de McDuff, à prédual séparable et α, β deux transpositions de M, satisfaisant les conclusions de 3.1. Soient φ, un état normal, fidèle sur M et $\psi_1, \ldots, \psi_q$, q éléments de M_*^+.*

Alors, pour tout $n \geqslant 2$, $0 < \varepsilon < 1$, il existe une partition $(p_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$ de l'unité dans M et trois unitaires a, b et u de M tels que:

(0) $-1 \in A(\varphi, u^n)$;

(1) $\|[\psi_s, p_j]\| \leqslant \varepsilon$ *pour* $s = 1, \ldots, q$ *et* $0 \leqslant j \leqslant n-1$;

(2) $\|\psi_s \circ (\alpha \circ \beta)^{-1} - \psi_s \circ \operatorname{Ad} u^{-1}\| \leqslant \varepsilon$ *pour* $s = 1, \ldots, q$;

(3) $\alpha(a) = a$ *et* $\beta(b) = b$;

(4) $\|a - 1\|_\varphi \leqslant \varepsilon$ *et* $\|b - 1\|_\varphi \leqslant \varepsilon$.

Posons $P = f_n(u^n)^*$ et $\tilde{u} = uP$.

(5) $\{e_{i,j} = \tilde{u}^{i-j}p_j \mid 0 \leqslant i,j \leqslant n-1\}$ *est un* s.u.m. *du sous-facteur K, engendré par les p_j et $\tilde{u}$, tel que, pour* $0 \leqslant i,j \leqslant n-1$,

(a) $\operatorname{Ad} a \circ \alpha(e_{i,j}) = e_{-j+1,-i+1}$;

(b) $\operatorname{Ad} b \circ \beta(e_{i,j}) = e_{-j,-i}$;

(6) $\|P \operatorname{Ad} a \circ \alpha(P^*) - 1\|_{\varphi \circ \operatorname{Ad} P^*} \leqslant \varepsilon$.

Démonstration. Soient $0 < \varepsilon \leqslant 1$ et $n \geqslant 2$ fixés. Choisissons $\varepsilon_1 > 0$ avec $16\,\varepsilon_1^{1/2} \leqslant \varepsilon$. Comme φ est fidèle, il existe $0 < \varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$ tels que si $x \in M_3 = \{x \in M \mid \|x\| \leqslant 3\}$ nous ayons d'une part,

$$\|x\|_\varphi \leqslant \frac{\varepsilon_3}{4n} \Rightarrow \|x\|_{\varphi\circ\alpha} \leqslant \frac{\varepsilon_2}{4n} \text{ et } \|x\|_{\varphi\circ\beta} \leqslant \frac{\varepsilon_2}{4n}$$

et d'autre part,

$$\|x\|_\varphi \leqslant 5\varepsilon_2 \Rightarrow \|x\|_{\varphi\circ\alpha\circ\beta} \leqslant \varepsilon_1.$$

Choisissons $m \in \mathbf{N}$ tel que $3(2^{-m})^{1/2} \leqslant \dfrac{\varepsilon_3}{8n}$. Alors, pour $p = 1, \ldots, n$, choisissons des polynômes (en z et z^{-1}) $R_p(z) = \sum\limits_{|t| \leqslant k} a_{p,t} z^t$ tels que:

$$|R_p(z) - (zf_n(z^n)^{-1})^p| \leqslant \frac{\varepsilon_3}{8n}, \quad \forall z \in \mathbf{T},\ z^n \notin J_{-1,m};$$

(i)

$$|R_p(z)| \leqslant 2 \quad \forall z \in \mathbf{T}.$$

Soient $A = \sum\limits_{p,t} |a_{p,t}|$ et prenons $\delta > 0$, tel que:

$$3\sqrt{2}\,\delta^{1/2} + A\delta + \frac{\varepsilon_2}{2n} \leqslant \frac{\varepsilon_2}{n}.$$

Par 3.3, il existe une partition $(p_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$ de l'unité dans M et deux unitaires c et d de M tels que, si nous posons $\alpha_1 = \operatorname{Ad} c \circ \alpha$ et $\beta_1 = \operatorname{Ad} d \circ \beta$,

(a) $\|[\psi_s, p_j]\| \leqslant \varepsilon$ pour $s = 1, \ldots, q$ et $0 \leqslant j \leqslant n-1$;

(b) $\alpha_1(p_j) = p_{-j+1}$ et $\beta_1(p_j) = p_{-j}$, pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$;

(c) $\|c - 1\|_\varphi \leqslant \delta$ et $\|d - 1\|_\varphi \leqslant \delta$;

(d) $\alpha(c) = c$ et $\beta(d) = d$;

(e) $\|\psi_s \circ (\alpha_1 \circ \beta_1)^{-1} - \psi_s \circ (\alpha \circ \beta)^{-1}\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $1 \leqslant s \leqslant q$;

(f) $\|\varphi \circ (\alpha_1 \circ \beta_1) - \varphi \circ (\alpha \circ \beta)\| \leqslant \dfrac{\delta}{2}$.

Comme $\varepsilon_M(\alpha_1 \circ \beta_1) = \varepsilon_M(\alpha \circ \beta)$, nous avons $\alpha_1 \circ \beta_1 \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$ et $p_a(\alpha_1 \circ \beta_1) = p_a(\alpha \circ \beta)$ et donc α_1 et β_1, ainsi que la partition de l'unité $(p_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$, satisfont les hypothèses du lemme 3.4. Par conséquent, il existe un unitaire $u \in M$, avec

(1) $up_ju^* = p_{j+1}$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$;

(2) $\|\alpha_1(u^r) - u^r\|_\varphi \leqslant \delta$ et $\|\beta_1(u^r) - u^r\|_\varphi \leqslant \delta$ $(|r| \leqslant k)$;

(3) $\|\psi_s \circ (\alpha_1 \circ \beta_1)^{-1} - \psi_s \circ \mathrm{Ad}\, u^{-1}\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $1 \leqslant s \leqslant q$;

(4) $\|\varphi \circ \alpha_1 \circ \beta_1 - \varphi \circ \mathrm{Ad}\, u\| \leqslant \dfrac{\delta}{2}$ et donc, par (f), $\|\varphi \circ \alpha \circ \beta - \varphi \circ \mathrm{Ad}\, u\| \leqslant \delta$.

Par 3.5, nous pouvons supposer que $-1 \in \Lambda(\varphi, u^n)$ et donc, comme

$$\|\psi_s \circ (\alpha \circ \beta)^{-1} - \psi_s \circ \mathrm{Ad}\, u^{-1}\| \leqslant \|\psi_s \circ (\alpha \circ \beta)^{-1} - \psi_s \circ (\alpha_1 \circ \beta_1)^{-1}\| + $$
$$+ \|\psi_s \circ (\alpha_1 \circ \beta_1)^{-1} - \psi_s \circ \mathrm{Ad}\, u^{-1}\|$$

les points (0), (1) et (2) de 3.6 sont vérifiés.

Soit e, le projecteur spectral de u^n pour $J_{-1,m}$. Comme $\varphi(e) \leqslant 2^{-m}$, nous avons, par (i), en posant $\tilde{u} = uf_n(u^n)^*$

(ii) $$\|R_p(u) - \tilde{u}^p\|_\varphi \leqslant \frac{\varepsilon_3}{4n} \quad \text{pour } p = 1, .., n.$$

Comme $R_p(u) - \tilde{u}^p$ est un opérateur normal, nous avons aussi

(iii) $$\|(R_p(u) - \tilde{u}^p)^*\|_\varphi \leqslant \frac{\varepsilon_3}{4n} \quad \text{pour } p = 1, \ldots, n.$$

Evaluons $\|\alpha_1(\tilde{u}^p) - \tilde{u}^p\|_\varphi$. Par (iii) et comme $\|R_p(u) - \tilde{u}^p\| \leqslant 3$, nous avons:

(iv) $$\begin{aligned} &\|\alpha_1(\tilde{u}^p) - \alpha_1(R_p(u))\|_\varphi \leqslant \\ &\leqslant 3\|\varphi \circ \alpha_1 - \varphi \circ \alpha\|^{1/2} + \|(R_p(u) - \tilde{u}^p)^*\|_{\varphi \circ \alpha} \leqslant \\ &\leqslant 3\sqrt{2}\, \|c - 1\|_\varphi^{1/2} + \|(R_p(u) - \tilde{u}^p)^*\|_{\varphi \circ \alpha} \leqslant \\ &\leqslant 3\sqrt{2}\,\delta^{1/2} + \frac{\varepsilon_2}{4n}\,. \end{aligned}$$

De plus, par (2), $\|\alpha_1(u^r) - u^r\|_\varphi \leqslant \delta$, $|r| \leqslant k$ et donc, par le choix de A,

(v) $$\|R_p(\alpha_1(u)) - R_p(u)\|_\varphi \leqslant A\delta.$$

Par (ii), (iv) et (v), nous obtenons, pour $p = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \|\alpha_1(\tilde{u}^p) - \tilde{u}^p\|_\varphi &\leqslant \|\alpha_1(\tilde{u}^p) - \alpha_1(R_p(u))\|_\varphi + \\ \text{(vi)} \qquad &+ \|R_p(\alpha_1(u)) - R_p(u)\|_\varphi + \|R_p(u) - \tilde{u}^p\|_\varphi \leqslant \\ &\leqslant 3\sqrt{2}\,\delta^{1/2} + \frac{\varepsilon_2}{4n} + A\delta + \frac{\varepsilon_2}{4n} \leqslant \frac{\varepsilon_2}{n}. \end{aligned}$$

On montre de même, que:

$$\text{(vii)} \qquad \|\beta_1(\tilde{u}^p) - \tilde{u}^p\|_\varphi \leqslant \frac{\varepsilon_2}{n}.$$

Démontrons, maintenant, (3), (4) et (5). Par construction, $\tilde{u}^n = 1$ et comme u^n commute aux p_j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, il en est de même de $P = f_n(u^n)^*$, d'où $\tilde{u} p_j \tilde{u}^* = p_{j+1}$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$. On vérifie immédiatement que $\{e_{i,j} = \tilde{u}^{i-j} p_j \mid 0 \leqslant i, j \leqslant n-1\}$ est un s.u.m. de K, le sous-facteur de type I_n, engendré par $\tilde{u}$ et les p_j.

Posons $a_1 = \sum_{j=0}^{n-1} e_{-j+1,1}\alpha_1(e_{j,0})$. C'est un unitaire de M qui, par construction, satisfait:

$$\operatorname{Ad} a_1 \circ \alpha_1(e_{s,t}) = e_{-t+1,-s+1}, \quad \forall\ s, t,\ 0 \leqslant s, t \leqslant n-1.$$

De plus, nous avons:

$$\text{(viii)} \qquad \|a_1 - 1\|_\chi \leqslant \varepsilon_2 \quad \text{pour} \quad \chi = \varphi \text{ et } \chi = \varphi \circ \alpha_1.$$

En effet, par (vi), comme

$$\begin{aligned} \|a_1 - 1\|_\chi &\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \|e_{-j+1,1}\alpha_1(e_{j,0}) - e_{-j+1,-j+1}\|_\chi \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \|e_{-j+1,1}(\alpha_1(e_{j,0}) - e_{1,-j+1})\|_\chi \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \|p_1(\alpha_1(\tilde{u}^j) - \tilde{u}\,)\|_\chi \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \|\alpha_1(\tilde{u}^j) - \tilde{u}^j\|_\chi. \end{aligned}$$

Nous obtenons (viii), car, pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$\|\alpha_1(\tilde{u}^j) - \tilde{u}^j\|_{\varphi\circ\alpha_1} = \|\alpha_1(\tilde{u}^{-j}) - \tilde{u}^{-j}\|_\varphi = \|\alpha_1(\tilde{u}^{n-j}) - \tilde{u}^{n-j}\|_\varphi .$$

L'antiautomorphisme $\operatorname{Ad} a_1 \circ \alpha_1$ laisse globalement fixe le commutant relatif de K dans M et définit donc, par restriction, un antiautomorphisme de $K' \cap M$, qui est un facteur continu. De plus, $(\operatorname{Ad} a_1 \circ \alpha_1)^2 = \operatorname{Ad}(a_1\alpha_1(a_1^*))$ est un automorphisme intérieur de $K' \cap M$, car, comme

$$\operatorname{Ad}(a_1\alpha_1(a_1^*))(e_{s,t}) = (\operatorname{Ad} a_1 \circ \alpha_1)^2(e_{s,t}) = e_{s,t}, \quad \forall\ 0 \leqslant s, t \leqslant n-1 ,$$

$a_1\alpha_1(a_1^*) \in K' \cap M$. Comme, de plus,

$$\operatorname{Ad} a_1 \circ \alpha_1(a_1\alpha_1(a_1^*)) = (a_1\alpha_1(a_1^*))^*$$

et que, par (viii),

$$\|a_1\alpha_1(a_1^*) - 1\|_\varphi \leqslant \|a_1 - 1\|_{\varphi\circ\alpha_1} + \|a_1 - 1\|_\varphi \leqslant 2\varepsilon_2 ,$$

il existe, par le lemme 1.6, un unitaire $a_2 \in K' \cap M$ tel que

$$\alpha_1(a_2a_1) = a_2a_1 \quad \text{et} \quad \|a_2 - 1\|_\varphi \leqslant 4\varepsilon_2 .$$

Posons $a = a_2a_1c$. C'est un unitaire de M et, par construction, comme $\alpha(c) = c$, les premières parties de (3) et (5) sont vérifiées. Par le choix de ε_2 et comme

$$\|a - 1\|_\varphi \leqslant \|c - 1\|_\varphi + \|a_1 - 1\|_\varphi + \|a_2 - 1\|_\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \delta + \varepsilon_2 + 4\varepsilon_2 \leqslant 6\varepsilon_2 ,$$

la première partie de (4) est prouvée.

Posons $b_1 = \sum_{j=0}^{n-1} e_{-j,0}\beta_1(e_{j,0})$. C'est un unitaire de M, qui par définition, satisfait:

$$\operatorname{Ad} b_1 \circ \beta_1(e_{s,t}) = e_{-t,-s} , \quad \forall\ 0 \leqslant s, t \leqslant n-1 .$$

Comme ci-dessus pour (viii), nous avons:

(ix) $\|b_1 - 1\|_\chi \leqslant \varepsilon_2$, pour $\chi = \varphi$ et $\chi = \varphi \circ \beta_1$

et par le lemme 1.6, il existe un unitaire $b_2 \in K' \cap M$ tel que

$$\beta_1(b_2b_1) = b_2b_1 \quad \text{et} \quad \|b_2b_1 - 1\|_\varphi \leqslant 4\varepsilon_2 .$$

Posons $b = b_2 b_1 d$. Les points (3), (4) et (5) de 3.6 sont alors totalement démontrés.

Pour vérifier (6), montrons, tout d'abord, que:

$$\text{(x)} \qquad \|\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(u^*) - u^*\|_\varphi \leqslant \varepsilon.$$

En effet, nous avons, en posant $\tilde{a} = a_2 a_1$,

$$\|\mathrm{Ad}\, \tilde{a}(u^*) - u^*\|_\varphi \leqslant \|\tilde{a} u^*(\tilde{a}^* - 1)\|_\varphi + \|(\tilde{a} - 1)u^*\|_\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \|\tilde{a} - 1\|_\varphi + \|\tilde{a} - 1\|_{\varphi \circ \mathrm{Ad}\, u} \leqslant$$

$$\leqslant \|\tilde{a} - 1\|_\varphi + 2\,\|\varphi \circ \mathrm{Ad}\, u - \varphi \circ \alpha \circ \beta\|^{1/2} + \|\tilde{a} - 1\|_{\varphi \circ \alpha \circ \beta} \leqslant$$

$$\leqslant 5\varepsilon_2 + 2\delta^{1/2} + \varepsilon_1 \leqslant 8\varepsilon_1$$

car $\|\tilde{a} - 1\|_\varphi = \|a_2 a_1 - 1\|_\varphi \leqslant 5\varepsilon_2$ et donc $\|\tilde{a} - 1\|_{\varphi \circ \alpha \circ \beta} \leqslant \varepsilon_1$, par le choix de ε_2. D'où

$$\|\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(u^*) - u^*\|_\varphi \leqslant \|\mathrm{Ad}\, \tilde{a}(\alpha_1(u^*) - u^*)\|_\varphi + \|\mathrm{Ad}\, \tilde{a}(u^*) - u^*\|_\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\varphi \circ \mathrm{Ad}\, \tilde{a} - \varphi\|^{1/2} + \|\alpha_1(u^*) - u^*\|_\varphi + \|\mathrm{Ad}\, \tilde{a}(u^*) - u^*\|_\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\, \|\tilde{a} - 1\|_\varphi^{1/2} + \|\alpha_1(u^*) - u^*\|_\varphi + \|\mathrm{Ad}\, \tilde{a}(u^*) - u^*\|_\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\sqrt{5\varepsilon_2} + \delta + 8\varepsilon_1 \leqslant (2\sqrt{10} + 1 + 8)\varepsilon_1^{1/2} \leqslant 16\varepsilon_1^{1/2} \leqslant \varepsilon$$

et ainsi (x) est vérifié. Comme $\|P\,\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(P^*) - 1\|_{\varphi \circ \mathrm{Ad}\, P^*} = \|(\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(P^*) - P^*)P\|_\varphi$ et que $\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(\tilde{u}) = \tilde{u}$, nous avons:

$$0 = \|\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(\tilde{u}^*) - \tilde{u}^*\|_{\varphi \circ \mathrm{Ad}\, P^*} = \|\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(P^* u^*) - u^* P^*\|_{\varphi \circ \mathrm{Ad}\, P^*} \geqslant$$

$$\geqslant \big|\, \|\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(u^*)\,(\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(P^*) - P^*)\|_{\varphi \circ \mathrm{Ad}\, P^*} -$$

$$- \|(\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(u^*) - u^*)P^*\|_{\varphi \circ \mathrm{Ad}\, P^*} \big|$$

et donc $\|P\,\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(P^*) - 1\|_{\varphi \circ \mathrm{Ad}\, P^*} = \|\mathrm{Ad}\, a \circ \alpha(u^*) - u^*\|_\varphi$. Par (x), le point (6) est prouvé, ce qui termine la démonstration du lemme 3.6. QED

Troisième partie de la démonstration du théorème 1. Soient M, un facteur de McDuff, à prédual séparable et $(n_\nu)_{\nu \geqslant 1}$, une suite d'entiers $\geqslant 2$ telle que

$$\sum_{\nu \geqslant 1} \frac{1}{n_\nu} < \infty.$$

Comme dans [6], déterminons deux suites $(\delta_\nu)_{\nu\geq 1}$ et $(\varepsilon_\nu)_{\nu\geq 1}$ de nombres réels positifs, à l'aide des lemmes 3.2.2 et 3.2.3 de [6]. Rappelons l'énoncé de ces deux lemmes, ainsi que la notation suivante: Si N est une algèbre de von Neumann, K un sous-facteur de type I_n de N, alors, pour chaque $\psi \in N_*$, nous noterons $\psi_{|K'\cap N} \otimes \tau_K$, l'élément de N_*, qui est égal, lorsque N est identifiée avec $(K' \cap N) \otimes K$, au produit tensoriel de ψ sur $K' \cap N$, par la trace normalisée τ_K de K.

Posons $\delta_\nu = 2^{-\nu} n_\nu^{-2}(n_\nu + 1)^{-1}$, pour $\nu \geq 1$. Nous avons alors:

LEMME 3.7. ([6], 3.2.2). *Pour chaque $\nu \geq 1$, δ_ν est tel que si $(F_j)_{0\leq j\leq n_\nu - 1}$ est une partition de l'unité dans M et $u \in M$, un unitaire de M avec $u^{n_\nu} = 1$, $uF_ju^* = F_{j+1}$, pour $0 \leq j \leq n_\nu - 1$, alors:*

$$\psi \in M_*, \ \|[\psi, u]\| \leq \delta_\nu, \quad \|[\psi, F_j]\| \leq \delta_\nu, \quad 0 \leq j \leq n_\nu - 1$$

implique $\|\psi - \psi_{|K'\cap N} \otimes \tau_K\| \leq 2^{-\nu}$, où K est le sous-facteur de M engendré par u et les F_j.

LEMME 3.8. ([6],3.2.3). *Pour chaque $\nu \geq 1$, il existe $0 < \varepsilon_\nu \leq 1/n_\nu$ et satisfaisant la condition suivante: si φ est un état normal, fidèle sur M et u, un unitaire de M tel que $-1 \in A(\varphi, u^{n_{\nu+1}})$, alors $(\psi \in M_*^+, \psi \leq \varphi, \|[\psi, u]\| \leq 2\varepsilon_\nu)$ implique*

$$\|[\psi, \tilde{u}]\| \leq \delta_{\nu+1}, \quad \text{où } \tilde{u} = u(f_{n_{\nu+1}}(u^{n_{\nu+1}}))^*.$$

Fixons définitivement, une suite $(\varepsilon_\nu)_{\nu\geq 1}$, satisfaisant 3.8 et telle que $\varepsilon_{\nu+1} \leq \varepsilon_\nu$, $\forall \nu$. Rappelons encore l'énoncé du lemme 3.2.6 de [6].

LEMME 3.9. *Soit $P = Q \otimes N$, le produit tensoriel d'un facteur Q, de dimension finie, par un facteur N. Pour tout $\psi \in P_*$, il existe alors m éléments (m = dimension de Q) de N_*, $\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^m$, tels que:*

(a) $\forall x \in N$, $\|[\psi, 1 \otimes x]\| \leq \sup_j \|[\psi^j, x]\|$;

(b) $\forall u \in U(Q)$, $v \in U(N)$, $\theta \in \mathrm{Aut}(N)$, *on a:*

$$\|\psi \circ (\mathrm{Ad}\, u \otimes \theta) - \psi \circ \mathrm{Ad}(u \otimes v)\| \leq \sup_j \|\psi^j \circ \theta - \psi^j \circ \mathrm{Ad}\, v\|.$$

LEMME 3.10. *Soient M, comme ci-dessus et α, β satisfaisant les conclusions de 3.1; φ, un état normal, fidèle sur M et $(\psi_j)_{j\geq 1}$, une suite d'éléments de $[0, \varphi]_{M_*}$. Il existe une suite de triples $(K_\nu, v_\nu, w_\nu)_{\nu\geq 1}$, où K_ν est un sous-facteur de M; v_ν, w_ν des unitaires de M, telle que, pour tout $\nu \geq 1$,*

(a) *K_ν commute avec les K_j, $j < \nu$;*

(b) *K_ν est engendré par une partition de l'unité $(p_j^\nu)_{0\leq j\leq n_\nu - 1}$ et un unitaire u_ν, $u_\nu^{n_\nu} = 1$; $u_\nu p_j^\nu u_\nu^* = p_{j+1}^\nu$, pour $0 \leq j \leq n_\nu - 1$;*

(c) *$\|[\psi_r, u_\nu]\| \leq \delta_\nu$, $\|[\psi_r, p_j^\nu]\| \leq \delta_\nu$ pour $r < \nu$ et $0 \leq j \leq n_\nu - 1$;*

(d) v_ν *et* w_ν *commutent avec* $K_1, K_2, \ldots, K_{\nu-1}$;

(e)
$$\|(v_\nu - 1)v_{\nu-1} \ldots v_1\|_\varphi^\# \leqslant \frac{9}{n_\nu}$$
$$\|(w_\nu - 1)w_{\nu-1} \ldots w_1\|_\varphi^\# \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n_\nu}.$$

Posons $\alpha_\nu = \mathrm{Ad}(v_\nu \ldots v_1) \circ \alpha$ *et* $\beta_\nu = \mathrm{Ad}(w_\nu \ldots w_1) \circ \beta$ *pour* $\nu \geqslant 1$ *et, par convention,* $\alpha_0 = \alpha$ *et* $\beta_0 = \beta$.

(f) α_ν *et* β_ν *sont des transpositions de* M, *qui laissent globalement invariant* K_r, *pour* $r \leqslant \nu$. *Plus précisément,* $\{e^r_{i,j} = u_r^{i-j} p_j^r \mid 0 \leqslant i,j \leqslant n_r - 1\}$ *est un* s.u.m. *tel que, pour* $0 \leqslant i,j \leqslant n_r - 1$,

(1) $$\alpha_\nu(e^r_{i,j}) = e^r_{-j+1,-i+1}$$

(2) $$\beta_\nu(e^r_{i,j}) = e^r_{-j,-i};$$

(g) $\alpha_{\nu-1}(v_\nu) = v_\nu$ *et* $\beta_{\nu-1}(w_\nu) = w_\nu$;

(h) *Pour* $k \leqslant \nu$, $\|\psi_k \circ (\alpha_\nu \circ \beta_\nu)^{-1} - \psi_k \circ \mathrm{Ad}(u_\nu \ldots u_1)^{-1}\| \leqslant \varepsilon_\nu$.

Démonstration. Supposons $(K_1, v_1, w_1), \ldots, (K_\nu, v_\nu, w_\nu)$ construits et déterminons $(K_{\nu+1}, v_{\nu+1}, w_{\nu+1})$.

Soient Q, le sous-facteur engendré par les $K_j, j \leqslant \nu$; m, la dimension du sous-facteur Q; $N = Q' \cap M$ et $U = u_\nu \ldots u_1$. Pour $1 \leqslant r \leqslant \nu + 1$, soient ψ_r^s, $1 \leqslant s \leqslant m$, des éléments de N_*, qui satisfont les conditions de 3.9, relativement *à* ψ_r.

Choisissons $0 < \varepsilon < \delta_{\nu+1}$ tel que si $x \in M_2 = \{x \in M \mid \|x\| \leqslant 2\}$

(o)
$$\|x\|_\varphi \leqslant 2\varepsilon \Rightarrow \|x\|_\chi \leqslant \left(\frac{\varepsilon_{\nu+1}}{18}\right)^2 \quad \text{pour } \chi \in \{\varphi, \varphi \circ \alpha_\nu, \varphi \circ \beta_\nu, \varphi \circ (\beta_\nu \circ \alpha_\nu)\};$$
$$\|x\|_\varphi \leqslant 2\varepsilon \Rightarrow \sup(\|xv_\nu \ldots v_1\|_\varphi, \|xw_\nu \ldots w_1\|_\varphi) \leqslant \frac{1}{n_{\nu+1}}.$$

Soit ω, un ultrafiltre libre sur $\mathbf{N}$. Par restriction, α_ν et β_ν définissent des transpositions de N, qui satisfont les conclusions du lemme 3.1. En effet, si nous identifions M avec $Q \otimes N$, nous avons $\alpha_\nu \circ \beta_\nu = \mathrm{Ad}\, U \otimes \alpha_\nu \circ \beta_\nu|_N$, d'où par le théorème 1 de [6], $\alpha_\nu \circ \beta_\nu$ est extérieurement conjugué à $\alpha_\nu \circ \beta_\nu|_N$ et donc, $\alpha_\nu \circ \beta_\nu|_N \in \overline{\mathrm{Int}}(N)$ et
$$p_a(\alpha_\nu \circ \beta_\nu|_N) = p_a(\alpha_\nu \circ \beta_\nu) = p_a(\alpha \circ \beta) = 0.$$
De plus, comme $\alpha_\nu = \mathrm{Ad}(v_\nu \ldots v_1) \circ \alpha$, $\beta_\nu = \mathrm{Ad}(w_\nu \ldots w_1) \circ \beta$ et que α_ω et β_ω satisfont 3.1 (b), il existe par le lemme B.5, une partition $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant n_{\nu+1}-1}$ de l'unité de N_ω, telle que:
$$(\alpha_\nu)_\omega(P_j) = P_{-j+1} \quad \text{et} \quad (\beta_\nu)_\omega(P_j) = P_{-j} \quad (0 \leqslant j \leqslant n_{\nu+1} - 1).$$

Comme $\varphi|_N$ est un état normal, fidèle sur N, il existe par le lemme 3.6, une partition de l'unité $(p_j)_{0 \leqslant j \leqslant n_{\nu+1}-1}$ dans N et trois unitaires a, b et u de N tels que:

(1) $$-1 \in \Lambda(\varphi|_N, u^{n_{\nu+1}});$$

(2) $$\| [\psi_r^s, p_j] \| \leqslant \delta_{\nu+1}$$

pour $1 \leqslant s \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant n_{\nu+1} - 1$ et $r = 1, \ldots, \nu + 1$;

(3) $$\| \psi_r^s \circ (\alpha_\nu \beta_\nu)^{-1} - \psi_r^s \circ \operatorname{Ad} u^{-1} \| \leqslant \frac{\varepsilon_{\nu+1}}{2}$$

pour $1 \leqslant s \leqslant m$, $r = 1, \ldots, \nu + 1$;

(4) $$\alpha_\nu(a) = a \quad \text{et} \quad \beta_\nu(b) = b;$$

(5) $$\|a - 1\|_\varphi \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|b - 1\|_\varphi \leqslant \varepsilon.$$

Posons $P = f_{n_{\nu+1}}(u^{n_{\nu+1}})^*$, $\tilde{u} = uP$ et K, le sous-facteur de type $I_{n_{\nu+1}}$, engendré par $\tilde{u}$ et les p_j.

(6) $\{e_{i,j} = \tilde{u}^{i-j} p_j \mid 0 \leqslant i, j \leqslant n_{\nu+1} - 1\}$ est un s.u.m. de K tel que pour $0 \leqslant i, j \leqslant n_{\nu+1} - 1$,

(a) $\operatorname{Ad} a \circ \alpha_\nu(e_{i,j}) = e_{-j+1,-i+1}$

(b) $\operatorname{Ad} b \circ \beta_\nu(e_{i,j}) = e_{-j,-i}$.

(7) $$\|P \operatorname{Ad} a \circ \alpha_\nu(P^*) - 1\|_{\varphi \circ \operatorname{Ad} P^*} \leqslant \varepsilon.$$

Posons $p_j^{\nu+1} = p_j$ pour $0 \leqslant j \leqslant n_{\nu+1} - 1$, $K_{\nu+1} = K$, $w_{\nu+1} = b$ et $u_{\nu+1} = \tilde{u}$. Comme $\alpha_\nu \beta_\nu = \operatorname{Ad} U \otimes \alpha_\nu \beta_\nu|_N$, nous obtenons par (3) et 3.9:

(8) $$\| \psi_r \circ (\alpha_\nu \beta_\nu)^{-1} - \psi_r \circ \operatorname{Ad}(uU)^{-1} \| \leqslant \frac{\varepsilon_{\nu+1}}{2}$$

pour $1 \leqslant r \leqslant \nu + 1$ et, par hypothèse d'induction,

$$\|\psi_r \circ (\alpha_\nu \beta_\nu)^{-1} - \psi_r \circ \operatorname{Ad} U^{-1}\| \leqslant \varepsilon_\nu, \quad \text{pour } 1 \leqslant r \leqslant \nu.$$

Comme u et U commutent, nous avons:

$$\|\psi_r \circ \operatorname{Ad} u^{-1} - \psi_r\| \leqslant \varepsilon_\nu + \frac{\varepsilon_{\nu+1}}{2}$$

d'où,

$$\|[\psi_r, u]\| \leqslant 2\varepsilon_\nu \quad \text{pour } 1 \leqslant r \leqslant \nu.$$

Comme $\psi_r \leqslant \varphi$, la condition (1) et 3.8 montrent que:

$$\|[\psi_r, \tilde{u}]\| \leqslant \delta_{\nu+1} \quad \text{pour } 1 \leqslant r \leqslant \nu.$$

Les conditions (a), (b) et (c) du lemme 3.10 sont donc vérifiées. Construisons maintenant $v_{\nu+1}$. Posons, pour simplifier les notations, $\tilde{\alpha} = \operatorname{Ad} a \circ \alpha_\nu$. L'antiautomorphisme $\operatorname{Ad} P \circ \tilde{\alpha}$ laisse globalement fixe $K'_{\nu+1} \cap N$ et donc définit par restriction, un antiautomorphisme de $K'_{\nu+1} \cap N$, qui est un facteur continu. Comme $P \in N$ et P commute à $u_{\nu+1}$ et aux $p_j^{\nu+1}$, $0 \leqslant j \leqslant n_{\nu+1} - 1$, $P\tilde{\alpha}(P^*) \in K'_{\nu+1} \cap N$ et donc

$$(\operatorname{Ad} P \circ \tilde{\alpha})^2 = \operatorname{Ad}(P\tilde{\alpha}(P^*))$$

est un automorphisme intérieur de $K'_{\nu+1} \cap N$. De plus, par (7), et comme $\operatorname{Ad} P \circ \tilde{\alpha}(P\tilde{\alpha}(P^*)) = (P\tilde{\alpha}(P^*))^*$, il existe par le lemme 1.6, un unitaire $v \in K'_{\nu+1} \cap N$ tel que

$$\tilde{\alpha}(vP) = vP \quad \text{et} \quad \|v - 1\|_{\varphi \circ \operatorname{Ad} P^*} \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Posons $v_{\nu+1} = vPa$. Par construction, $v_{\nu+1}$ et $w_{\nu+1}$ commutent à $K_1, \ldots, K_\nu$ et donc (d) est vérifié. Remarquons que, d'une part, comme $w_{\nu+1} = b$, nous avons, par (5), $\beta_\nu(w_{\nu+1}) = w_{\nu+1}$ et que, d'autre part, comme $\alpha_\nu(a) = a$ et $\tilde{\alpha}(vP) =$ $= \operatorname{Ad} a \circ \alpha_\nu(vP) = vP$, $\alpha_\nu(v_{\nu+1}) = v_{\nu+1}$ et (g) est prouvé.

Démontrons (e). Comme $\|w_{\nu+1} - 1\|_\varphi = \|b - 1\|_\varphi \leqslant \varepsilon$, par (o), nous avons

$$\|(w_{\nu+1} - 1)w_\nu \ldots w_1\|_\varphi^\# \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n_{\nu+1}}$$

car $\|(w_{\nu+1} - 1)w_\nu \ldots w_1\|_\varphi \leqslant 1/n_{\nu+1}$ et

$$\|[(w_{\nu+1} - 1)w_\nu \ldots w_1]^*\|_\varphi = \|w_1^* \ldots w_\nu^*(w_{\nu+1}^* - 1)\|_\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \|w_{\nu+1}^* - 1\|_\varphi \leqslant \varepsilon \leqslant 1/n_{\nu+1}\,.$$

Posons $V = v_\nu \ldots v_1$. Nous avons alors:

$$\|(v_{\nu+1} - 1)V\|_\varphi = \|(vPa - 1)V\|_\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \|(a - 1)V\|_\varphi + \|(v - 1)PV\|_\varphi + \|(P - 1)V\|_\varphi\,.$$

Or, comme $P = f_{n_{\nu+1}}(u^{n_{\nu+1}})^*$, nous avons $\|P - 1\| \leqslant \dfrac{\pi}{n_{\nu+1}}$ et donc

$$\|(P - 1)V\|_\varphi \leqslant \|(P - 1)V\| \leqslant \frac{\pi}{n_{\nu+1}}\,.$$

De plus, comme $\|a-1\|_\varphi \leqslant \varepsilon$ et

$$\|(v-1)P\|_\varphi = \|v-1\|_{\varphi\circ \mathrm{Ad}\, P^*} \leqslant 2\varepsilon$$

nous avons, par (o),

$$\|(v_{\nu+1}-1)v_\nu \dots v_1\|_\varphi \leqslant \frac{2+\pi}{n_{\nu+1}}.$$

Par ailleurs,

$$\|V^*(v_{\nu+1}^*-1)\|_\varphi = \|v_{\nu+1}-1\|_\varphi \leqslant \|a-1\|_\varphi + \|(v-1)P\|_\varphi + \|P-1\|_\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 3\varepsilon + \frac{\pi}{n_{\nu+1}} \leqslant \frac{3+\pi}{n_{\nu+1}}.$$

Finalement, nous obtenons: $\|(v_{\nu+1}-1)v_\nu \dots v_1\|_\varphi^\# \leqslant \dfrac{9}{n_{\nu+1}}$. Comme par construction, $\alpha_{\nu+1} = \mathrm{Ad}\, v_{\nu+1}\circ\alpha_\nu$ et $\beta_{\nu+1} = \mathrm{Ad}\, w_{\nu+1}\circ\beta_\nu$ vérifient (f), il ne reste plus qu'à prouver (h). Remarquons, auparavant, que si $x \in M_2$,

$$\|\beta_{\nu+1}\circ\tilde\alpha\circ \mathrm{Ad}\, P^*(x)\|_\varphi = \|\mathrm{Ad}(w_{\nu+1}\beta_\nu(a^*))\circ\beta_\nu\alpha_\nu\circ\mathrm{Ad}\, P^*(x)\|_\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\varphi\circ\mathrm{Ad}(b\beta_\nu(a^*)) - \varphi\|^{1/2} + \|xP\|_{\varphi\circ\beta_\nu\alpha_\nu} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\,\|b\beta_\nu(a^*)-1\|_\varphi^{1/2} + \|xP\|_{\varphi\circ\beta_\nu\alpha_\nu} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\,(\|b-1\|_\varphi + \|a-1\|_{\varphi\circ\beta_\nu})^{1/2} + \|xP\|_{\varphi\circ\beta_\nu\alpha_\nu} \leqslant$$

$$\leqslant 4\,\frac{\varepsilon_{\nu+1}}{18} + \|xP\|_{\varphi\circ\beta_\nu\alpha_\nu}.$$

Comme $\|(v-1)P\|_\varphi \leqslant 2\varepsilon$, nous avons, par (o) et pour $r \leqslant \nu+1$,

$$\|\psi_r\circ(\alpha_{\nu+1}\circ\beta_{\nu+1})^{-1} - \psi_r\circ(\mathrm{Ad}\, P\circ\tilde\alpha\circ\beta_{\nu+1})^{-1}\| =$$

$$= \|\psi_r\circ\beta_{\nu+1}\circ\tilde\alpha\circ\mathrm{Ad}\, P^*\circ\mathrm{Ad}\, v^* - \psi_r\circ\beta_{\nu+1}\circ\tilde\alpha\circ\mathrm{Ad}\, P^*\| =$$

$$(9) \qquad = \|\psi_r\circ\mathrm{Ad}(\beta_{\nu+1}\circ\tilde\alpha\circ\mathrm{Ad}\, P^*(v^*)) - \psi_r\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\beta_{\nu+1}\circ\tilde\alpha\circ\mathrm{Ad}\, P^*(v-1)\|_\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 4\,\frac{\varepsilon_{\nu+1}}{18} + \|(v-1)P\|_{\varphi\circ\beta_\nu\circ\alpha_\nu} \leqslant 5\,\frac{\varepsilon_{\nu+1}}{18}.$$

De plus,

$$\|\psi_r \circ (\operatorname{Ad} P \circ \tilde{\alpha} \circ \beta_{\nu+1})^{-1} - \psi_r \circ \operatorname{Ad}(u_{\nu+1}U)^{-1}\| =$$

$$= \|\psi_r \circ (\tilde{\alpha} \circ \beta_{\nu+1})^{-1} \circ \operatorname{Ad} P^* - \psi_r \circ \operatorname{Ad}(uU)^* \circ \operatorname{Ad} P^*\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi_r \circ \beta_{\nu+1} \circ \tilde{\alpha} - \psi_r \circ \beta_\nu \circ \alpha_\nu\| + \|\psi_r \circ (\alpha_\nu \circ \beta_\nu)^{-1} - \psi_r \circ \operatorname{Ad}(uU)^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi_r \circ \operatorname{Ad}(b\beta_\nu(a^*)) - \psi_r\| + \|\psi_r \circ (\alpha_\nu \circ \beta_\nu)^{-1} - \psi_r \circ \operatorname{Ad}(uU)^{-1}\|.$$

Par (8), (9) et comme

$$\|\psi_r \circ \operatorname{Ad}(b\beta_\nu(a^*)) - \psi_r\| \leqslant 2\|b\beta_\nu(a^*) - 1\|_\varphi \leqslant \frac{4\,\varepsilon_{\nu+1}}{18}$$

nous obtenons:

$$\|\psi_r \circ (\alpha_{\nu+1} \circ \beta_{\nu+1})^{-1} - \psi_r \circ \operatorname{Ad}(u_{\nu+1}u_\nu \ldots u_1)^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi_r \circ (\alpha_{\nu+1} \circ \beta_{\nu+1})^{-1} - \psi_r \circ (\operatorname{Ad} P \circ \tilde{\alpha} \circ \beta_{\nu+1})^{-1}\| +$$

$$+ \|\psi_r \circ (\operatorname{Ad} P \circ \tilde{\alpha} \circ \beta_{\nu+1})^{-1} - \psi_r \circ \operatorname{Ad}(u_{\nu+1}U)^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant 5\,\frac{\varepsilon_{\nu+1}}{18} + 4\,\frac{\varepsilon_{\nu+1}}{18} + \frac{\varepsilon_{\nu+1}}{2} \leqslant \varepsilon_{\nu+1}.$$

Pour terminer la démonstration de 3.10, remarquons que pour $\nu = 1$, les conditions (a), (c) et (d) sont vides. La construction de (K_1, v_1, w_1) s'effectue de la même manière que ci-dessus avec $\nu = 0$ et $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$. QED

Fin de la démonstration du théorème 1. Par le lemme 3.1, nous pouvons supposer que α et β satisfont les conditions d'application du lemme 3.10. Choisissons un état normal, fidèle φ sur M et une suite $(\psi_j)_{j\geqslant 1}$ de $[0, \varphi]_{M_*}$, qui est totale dans M_*. Nous construisons alors, comme dans le lemme 3.10, une suite de triples $(K_\nu, v_\nu, w_\nu)_{\nu\geqslant 1}$ et nous obtenons:

(1) Les K_ν engendrent un sous-facteur K de type II_1 de M et M est égal au produit tensoriel de K par $K' \cap M$ (appliquer 3.10 (a), (c), les lemmes 3.7 et [6], 2.3.6).

(2) Les unitaires $a_\nu = v_\nu v_{\nu-1} \ldots v_1$ et $b_\nu = w_\nu w_{\nu-1} \ldots w_1$ convergent *-fortement vers deux unitaires a et b de M. De plus, $\alpha(a) = a$ et $\beta(b) = b$ $\Bigg($par 3.10 (e), $\|a_\nu - a_{\nu-1}\|_\varphi^\# \leqslant \dfrac{9}{n_\nu}$ et $\|b_\nu - b_{\nu-1}\|_\varphi^\# \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{n_\nu}$ et par hypothèse, $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{n_\nu} < \infty\Bigg)$.

De plus, pour tout $\nu \geqslant 1$, $\alpha(a_\nu) = a_\nu$ et donc, $\alpha(a) = a$. En effet, par 3.10 (g), nous avons, d'une part,

$$\alpha(a_1) = \alpha_0(v_1) = v_1 = a_1$$

et d'autre part, si $\alpha(a_{\nu-1}) = a_{\nu-1}$, alors

$$\alpha(a_\nu) = \alpha(v_\nu a_{\nu-1}) = \alpha(a_{\nu-1})\alpha(v_\nu) = (a_{\nu-1}\alpha(v_\nu)a_{\nu-1}^*)a_{\nu-1} =$$

$$= \alpha_{\nu-1}(v_\nu)a_{\nu-1} = v_\nu a_{\nu-1} = a_\nu .$$

On vérifie de même, que $\beta(b_\nu) = b_\nu$, pour tout $\nu \geqslant 1$. Posons $\alpha_\infty = \operatorname{Ad} a \circ \alpha$ et $\beta_\infty = \operatorname{Ad} b \circ \beta$. Par (2), ce sont des transpositions de M et par la proposition 1.2, α_∞ (resp. β_∞) est $\operatorname{Int}(M)$ - équivalent à α (resp. β).

Comme $\alpha_\infty = \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu$ et $\beta_\infty = \lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu$, nous avons:

(3) $$\alpha_\infty = \operatorname{Ad} u_\nu \circ \beta_\infty \text{ sur } K_\nu \text{ et } \beta_\infty(u_\nu) = u_\nu \text{ pour tout } \nu \geqslant 1.$$

En effet, par 3.10 (d) et (f), nous avons, pour $0 \leqslant s, t \leqslant n_\nu - 1$,

$$\operatorname{Ad} u_\nu \circ \beta_\infty(e^\nu_{s,t}) = \operatorname{Ad} u_\nu \circ \beta_\nu(e^\nu_{s,t}) = \operatorname{Ad} u_\nu(e^\nu_{-t,-s}) =$$

$$= \sum_{k,r} e^\nu_{k+1,k} e^\nu_{-t,-s} e^\nu_{r,r+1} = e^\nu_{-t+1,-s+1} =$$

$$= \alpha_\nu(e^\nu_{s,t}) = \alpha_\infty(e^\nu_{s,t})$$

et

$\beta_\infty(u_\nu) = \beta_\nu\left(\sum_{k=0}^{n_\nu-1} e^\nu_{k+1,k}\right) = \sum_{k=0}^{n_\nu-1} e^\nu_{-k,-(k+1)} = u_\nu$. Par (3) et le lemme 1.1, il existe, pour tout $\nu \geqslant 1$, un unitaire z_ν de K_ν tel que $u_\nu = z_\nu\beta_\infty(z_\nu)$. Si $\psi \in M_*$, nous avons:

$$\|\psi \circ \operatorname{Ad} z_\nu - \psi\| = \|[\psi, z_\nu]\| \leqslant n_\nu^2 \sup_{i,j} \|[\psi, e^\nu_{i,j}]\|$$

car $z_\nu \in U(K_\nu)$. Par 3.10 (c) et le choix de δ_ν, nous obtenons, alors, pour $r < \nu$

(4) $$\|\psi_r \circ \operatorname{Ad} z_\nu - \psi_r\| \leqslant 2^{-\nu} \quad \text{et} \quad \|\psi_r \circ \operatorname{Ad} z_\nu^{-1} - \psi_r\| \leqslant 2^{-\nu}$$

car, pour $\psi \in M_*$ et $0 \leqslant i, j \leqslant n_{\nu-1}$,

$$\|[\psi, e^\nu_{i,j}]\| = \|[\psi, u_\nu^{i-j} p^\nu_j]\| \leqslant \|[\psi, p^\nu_j]\| + \|[\psi, u_\nu^{i-j}]\| \leqslant$$

$$\leqslant \|[\psi, p^\nu_j]\| + n_\nu\|[\psi, u_\nu]\|.$$

Posons $\theta = \lim_{\nu\to\infty} \mathrm{Ad}(z_\nu z_{\nu-1} \ldots z_1)$. Par (4), $\theta \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$ et $\theta|_{K'\cap M} = 1$. De plus par construction,

$$\alpha_\infty|_K = \theta \circ \beta_\infty \circ \theta^{-1}|_K.$$

Comme, par 3.10 (h), $\alpha_\infty|_{K'\cap M} = \beta_\infty|_{K'\cap M}$, nous obtenons

$$\alpha_\infty(x) = \theta \circ \beta_\infty \circ \theta^{-1}(x), \quad \forall\, x \in M.$$

Comme α (resp. β) est $\mathrm{Int}(M)$ - équivalent à α_∞ (resp. β_∞), le théorème est ainsi démontré.

4. CLASSIFICATION, A ÉQUIVALENCE PRÉS, DES TRANSPOSITIONS DES FACTEURS INJECTIFS, AGISSANT DANS UN ESPACE DE HILBERT SÉPARABLE, DE TYPE II

Comme R, le facteur hyperfini de type II_1 est à isomorphisme près, le seul facteur injectif de type II_1 ([4], théorème 7.1) et que $\mathrm{Aut}(R) = \overline{\mathrm{Int}}(R)$ ([14], théorème 4), le résultat suivant est un corollaire direct du théorème 1.

THÉORÈME 4.0. *Deux transpositions du facteur injectif de type* II_1 *sont équivalentes.*

Remarquons que si N est un facteur de type II_∞, la définition, donnée par A. Connes dans [5], de l'homomorphisme mod: $\mathrm{Aut}(N) \to \mathbf{R}_+^*$ s'étend de manière naturelle en un homomorphisme $A(N) \to \mathbf{R}_+^*$ que nous noterons encore mod et qui prend évidemment la valeur 1 sur toute transposition de N.

Soient α et β deux transpositions de $R_{0,1}$, le facteur injectif de type II_∞. Par la remarque ci-dessus, $\mathrm{mod}(\alpha \circ \beta) = \mathrm{mod}(\alpha)\mathrm{mod}(\beta) = 1$ et donc, $\alpha \circ \beta \in \overline{\mathrm{Int}}(R_{0,1})$, en utilisant [3], 3.11. Par le théorème 1, nous avons alors:

THÉORÈME 4.1. *Deux transpositions de* $R_{0,1}$ *sont* $\overline{\mathrm{Int}}(R_{0,1})$*-équivalentes.*

APPENDICES

A. SUR LES SEMI-NORMES DÉFINIES PAR UNE FORME NORMALE. Soient M, une algèbre de von Neumann et M_*, son prédual. Rappelons les définitions suivantes:

DÉFINITION A.1. Si $x \in M$ et $\varphi \in M_*$, les formes normales $x\cdot\varphi$, $\varphi\cdot x$ et $[\varphi, x]$ sont définies par: $(x\cdot\varphi)(y) = \varphi(yx)$, $(\varphi\cdot x)(y) = \varphi(xy)$ et $[\varphi, x](y) = (\varphi\cdot x - x\circ\varphi)(y) = \varphi([x, y])$ pour tout $y \in M$.

DÉFINITION A. 2. Pour tout $\varphi \in M_*^+$, les semi-normes $\|\cdot\|_\varphi$ et $\|\cdot\|_\varphi^\#$ sont définies pour tout $x \in M$, par:

$$\|x\|_\varphi = \varphi(x^*x)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\varphi^\# = \varphi(x^*x + xx^*)^{1/2}.$$

Complètons l'ensemble des inégalités, énoncées dans [2], lemme 2.1, par celles du lemme ci-dessous:

LEMME A.3. *Pour $x, y \in M$; u, un unitaire de M et $\varphi \in M_*^+$, nous avons:*

1) $\|yx\|_\varphi \leqslant \|y\| \|x\|_\varphi$ *et* $\|ux\|_\varphi = \|x\|_\varphi$;

2) $\|xu\|_\varphi = \|\mathrm{Ad}\, u^*(x)\|_\varphi = \|x\|_{\varphi \circ \mathrm{Ad}\, u^*}$;

3) *si x est normal,* $\|x\|_\varphi = \|x^*\|_\varphi$;

4) $\|[x - y, \varphi]\| \leqslant \|\varphi\|(\|x - y\|_\varphi + \|x^* - y^*\|_\varphi)$;

5) *si* $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$, $\|\alpha(x)\|_\varphi = \|x\|_{\varphi \circ \alpha}$ *et si* $\beta \in \mathrm{Ant}(M)$, $\|\beta(x)\|_\varphi = \|x^*\|_{\varphi \circ \beta}$;

6) *si* $\alpha \in A(M)$, $\|[\varphi, \alpha(x)]\| = \|[\varphi \circ \alpha, x]\|$;

7) $\|\varphi \circ \mathrm{Ad}\, u - \varphi\| = \|\varphi \circ \mathrm{Ad}\, u^* - \varphi\| = \|[\varphi, u]\| \leqslant \|\varphi \cdot (u - 1)\| + \|(u - 1) \cdot \varphi\| \leqslant 2\|\varphi\| \|u - 1\|_\varphi$.

Nous laissons la vérification de ce lemme au lecteur. Rappelons le lemme suivant, qui est un cas particulier de la proposition I.4.5 de [19].

LEMME A.4. *Soient M, une algèbre de von Neumann et φ, ψ deux formes positives, normales, fidèles sur M. Alors, sur la boule unitée M_1 de M, la topologie définie par la semi-norme $\|\cdot\|_\varphi$ est équivalente à celle, définie par $\|\cdot\|_\psi$.*

B. CENTRALISATEUR ASYMPTOTIQUE D'UNE ALGÈBRE DE VON NEUMANN. Soient M, und algèbre de von Neumann de genre dénombrable et ω, un ultrafiltre libre sur $\mathbf{N}$. Rappelons la définition et le résultat suivants de [2].

DÉFINITION B.1. Une *suite centralisante* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de M (resp. une *suite ω-centralisante*) est un élément de la C^*-algèbre $L^\infty(\mathbf{N}, M)$ tel que:

$$\|[\psi, x_n]\| \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty \text{ (resp. } \omega) \quad \forall \psi \in M_*.$$

PROPOSITION B.2. *Soient M et ω comme ci-dessus.*

1) *Les suites ω-centralisantes forment une sous-C^*-algèbre M^ω de $L^\infty(\mathbf{N}, M)$.*

2) *Le quotient de M^ω par l'idéal bilatère des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ω-centralisantes convergeant $*$-fortement vers 0, lorsque $n \to \omega$, est une algèbre de von Neumann finie M_ω, appelée le centralisateur asymptotique de M.*

REMARQUE B.3. Pour tout automorphisme (resp. anti-) θ de M, l'application de M^ω sur elle-même, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (\theta(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$, définit un automorphisme (resp. un anti-) θ_ω de M_ω, et θ_ω ne dépend que de $\varepsilon_M(\theta)$ où ε_M est l'application canonique de $A(M)$ sur $A(M)/\mathrm{Int}(M)$.

LEMME B.4. *Soient M, ω comme ci-dessus et $(u_p)_{p\in\mathbf{N}}$, une suite d'unitaires de M telle que $\mathrm{Ad}\, u_p \to \theta$ dans $\mathrm{Aut}(M)$, quand $p \to \infty$.*

1) *Si $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite ω-centralisante, il en est de même de la suite $(\mathrm{Ad}\, u_p(x_p))_{p\in\mathbf{N}}$.*

2) *Si $(x_p)_{p\in\mathbf{N}} \in L^\infty(\mathbf{N}, M)$, les assertions suivantes sont équivalentes, quand $p \to \omega$:*

a) $x_p \to 0$, **-fortement;*

b) $u_p x_p \to 0$, **-fortement;*

c) $x_p u_p \to 0$, **-fortement.*

Démonstration Soit $\varphi \in M_*$. Nous avons, pour tout $p \in \mathbf{N}$ l'inégalité suivante:

$$\|[\mathrm{Ad}\, u_p(x_p)\,, \varphi]\| = \|[x_p\,, \varphi \circ \mathrm{Ad}\, u_p]\| \leqslant$$
$$\leqslant \|[x_p\,, \varphi \circ \mathrm{Ad}\, u_p - \varphi \circ \theta]\| + \|[x_p\,, \varphi \circ \theta]\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\|x_p\|\, \|\varphi \circ \mathrm{Ad}\, u_p - \varphi \circ \theta\| + \|[x_p\,, \varphi \circ \theta]\|$$

ce qui démontre (1).

Vérification de (2). Soit $\varphi \in M_*^+$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Comme $\|u_p^* x_p^*\|_\varphi = \|x_p^*\|_\varphi$, il reste à voir que $\|x_p u_p\|_\varphi \xrightarrow[p\to\omega]{} 0$. Or, pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$\|x_p u_p\|_\varphi = \|x_p\|_{\varphi \circ \mathrm{Ad}\, u_p^*} \leqslant \|x_p\|\, \|\varphi \circ \mathrm{Ad}\, u_p^* - \varphi \circ \theta^{-1}\|^{1/2} + \|x_p\|_{\varphi \circ \theta}$$

et donc (b) est prouvé.

(b) $\Rightarrow$ (a). Comme ci-dessus, il suffit de montrer que: $\|x_p\|_\varphi \xrightarrow[p\to\omega]{} 0$. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, nous avons l'inégalité:

$$\|x_p\|_\varphi = \|x_p u_p\|_{\varphi \circ \mathrm{Ad}\, u_p} \leqslant \|x_p\|\ \ \|\varphi \circ \mathrm{Ad}\, u_p - \varphi \circ \theta\|^{1/2} + \|x_p u_p\|_{\varphi \circ \theta}$$

et donc (a) este vérifié.

La preuve de (a) $\Rightarrow$ (c) este analogue. QED

LEMME B.5. *Soient $M = Q \otimes N$, le produit tensoriel d'un facteur de dimension finite Q, par une algèbre de von Neumann N, à prédual séparable et ω, un ultrafiltre libre sur $\mathbf{N}$.*

(a) *L'homomorphisme canonique Π_ω, correspondant à $\pi: x \in N \mapsto 1_Q \otimes x \in M$ est un isomorphisme de N_ω sur M_ω.*

(b) *Pour tout couple d'automorphismes* $\alpha \in \mathrm{Aut}(Q)$ *et* $\beta \in \mathrm{Aut}(N)$ *(resp. d'anti-automorphismes* $\alpha \in \mathrm{Ant}(Q)$ *et* $\beta \in \mathrm{Ant}(N)$*), on a:*

$$\Pi_\omega(\beta_\omega(X)) = (\alpha \otimes \beta)_\omega(\Pi_\omega(X), \quad \forall X \in N_\omega.$$

Démonstration. (a) Soient $(f_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, un s.u.m. de Q ($m^2 =$ dimension de Q) et τ, la trace canonique associée, $\left(\text{i.e. } \tau\left(\sum_{i,j=1}^{m} \lambda_{i,j} f_{i,j}\right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,i}\right)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in Q$ tels que $\|[x, f_{i,j}]\|_2 < \varepsilon$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant m$, nous avons:

$$\|x - \tau(x) \cdot 1\|_2 < m\varepsilon.$$

En effet,

$$\|x - \tau(x)\|_2 = \left\| x - \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^{m} f_{i,j} x f_{j,i} \right\|_2 =$$

$$= \frac{1}{m} \left\| \sum_{i,j=1}^{m} [x, f_{i,j}] f_{i,j} \right\|_2 \leqslant \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^{m} \|[x, f_{i,j}]\|.$$

Donc, (a) est un cas particulier du lemme 2.11 de [2]. Par définition de Π_ω, (b) est immédiat. QED

Cet article a pu être réalisé grâce à l'aide du Fonds national suisse de la recherche scientifique (requêtes no. 2237—079 et 2643—080).

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan, E., Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemanienne, *J. Math. Pures Appl.*, **8**:1(1929), 1—33.
2. Connes, A., Almost periodic states and factors of type III_1, *J. Functional Analysis*, **16**(1974), 415—445.
3. Connes, A., A factor not anti-isomorphic to itself, *Ann. of Math.*, **101**(1975), 536—554.
4. Connes, A., Classification of injective factors, *Ann. of Math.*, **104**(1976), 73—115.
5. Connes, A., Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **6**(1973), 133—252.
6. Connes, A., Outer conjugacy classes of automorphisms of factors, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **8**(1975), 383—420.
7. Connes, A., Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type II_1, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **39**(1977), 39—66.
8. Connes, A.; Takesaki, M., The flow of weights on factors of type III, *Tôhoku Math. J.*, **29**(1977), 473—575.
9. Dixmier, J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, 2ème éd., Gauthiers-Villars, Paris, 1969.
10. Fack, T.; de la Harpe, P., Sommes de commutateurs dans les algèbres de von Neumann finies continues, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **30**(1980), 49—73.

11. GIORDANO, T.; JONES, V., Antiautomorphismes involutifs du facteur hyperfini de type II_1, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A.*, **290**(1980), 29–31.
12. DE LA HARPE, P., Classical groups and classical Lie algebras of operators, à paraître dans Proceedings of A.M.S. Summer Institute on Operator Algebras, 1980.
13. KASPAROV, G. G., Hilbert C^*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu, *J. Operator Theory*, **4**(1980), 133–150.
14. SAKAI, S., On automorphisms groups of II_1-factors, *Tôhoku Math. J.*, **26**(1974), 423–430.
15. STRØMER, E., On anti-automorphisms of von Neumann algebras, *Pacific J. Math.*, **21**(1967), 349–370.
16. STRØMER, E., Real structure in the hyperfinite factor, *Duke Math. J.*, **47**(1980), 145–153.
17. STRĂTILĂ, Ş.; ZSIDÓ, L., *Lectures on von Neumann algebras*, Abacus Press, 1979.

T. GIORDANO
Institut de Mathématiques,
Université de Neuchâtel,
CH–2000, Neuchâtel,
Suisse.

Received March 4, 1982.