

L'OPÉRATEUR DE CO-BORD TORDU SUR UN ARBRE, ET LE PRINCIPE DE SELBERG. II

PIERRE JULG et ALAIN VALETTE

0. INTRODUCTION

Dans [5], on a vu qu'à toute action d'un groupe G localement compact sur un arbre, on pouvait associer une famille γ_t ($t > t_0 \geq 0$) de G -modules de Fredholm, de telle manière que le caractère de Chern de γ_t (au sens de [1]) soit donné par la fonction centrale $\tau_t(g) = \exp(-tp(g))$, où $p(g)$ désigne la distance minimale entre x et gx sur l'arbre. On fait agir τ_t sur les distributions centrales sur G , cette-à-dire les traces χ sur l'algèbre $C_c^\infty(G)$ des fonctions localement constantes à support compact sur G . Par invariance par homotopie, la classe de $\tau_t\chi$ dans la cohomologie cyclique stabilisée de $C_c^\infty(G)$ ne dépend pas de t ; en particulier, si χ est supportée dans l'ensemble des éléments sans point fixe de G , on a $\chi = 0$ en cohomologie cyclique: c'est le principe de Selberg "abstrait". On en déduit ([5], Corollary 4) le principe de Selberg usuel pour un groupe algébrique simple G de rang déployé 1 sur un corps p -adique F : si f est un coefficient de représentation supercuspidale de G , si $\gamma \in G$ agit sans point fixe sur l'immeuble de Bruhat-Tits de G — qui est un arbre [7] — alors l'intégrale de f sur la classe de conjugaison de γ est nulle. Or, on sait ([3, Theorem 29]; [2, A.3.e]) qu'il existe une version semblable du principe de Selberg pour les représentations à carré intégrable de G . Le but de cet article, qui fait naturellement suite à [5], est de démontrer cette version du principe de Selberg par des techniques de cohomologie cyclique, la principale difficulté étant de remplacer la démonstration algébrique du § 4 de [5] par une démonstration analytique.

A cette fin, nous allons introduire au § 1, pour tout groupe G algébrique réductif sur un corps p -adique F , une algèbre de Fréchet $\mathcal{S}(G)$ que nous appellerons l'algèbre des *fonctions rapidement décroissantes* sur G , qui contiendra les coefficients de série discrète de G , et sera stable par multiplication ponctuelle par τ_t . (Cette algèbre n'est pas l'espace de Schwartz $\mathcal{C}(G)$ de Harish-Chandra, quoiqu'elle lui soit reliée. Le lien exact sera donné en remarque au § 1). Au § 2, on démontrera le résultat suivant:

THÉOREME. *Si G est quasi-simple de rang déployé 1, et si χ est une trace continue sur $\mathcal{S}(G)$, alors la classe de $\tau_t \chi$ est indépendante de t dans la cohomologie cyclique stabilisée $H^0(\mathcal{S}(G))$.*

Ce théorème est l'analogue pour $\mathcal{S}(G)$ du résultat rappelé ci-dessus pour $C_c^\infty(G)$. Comme au Lemma 6 de [5], la démonstration exploite une idée de "caractère de Chern bivariant", à la différence près que, dans le cadre purement algébrique de [5], on n'avait à considérer que des opérateurs de rang fini sur des $C_c^\infty(G)$ -modules, tandis qu'ici s'introduisent des opérateurs appartenant à l'espace $\mathcal{S}(G, \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$, défini au § 1, qui jouent le rôle d'"opérateurs à trace" sur les $\mathcal{S}(G)$ -modules considérés. De ce théorème, on déduit immédiatement le principe de Selberg "abstrait" pour $\mathcal{S}(G)$:

COROLLAIRE 1. *Si de plus χ est supportée dans l'ensemble des éléments agissant sans point fixe sur l'immeuble de G , alors $\chi = 0$ dans $H^0(\mathcal{S}(G))$.*

Ceci entraîne la version suivante du principe de Selberg: si π est une représentation de carré intégrable de G , f un coefficient de π , alors

$$(*) \quad \int_{T \backslash G} f(g^{-1} \gamma g) dg^* = 0$$

où T est un tore maximal non elliptique de G , γ un élément régulier de T agissant sans point fixe sur l'immeuble de G , et dg^* une mesure G -invariante sur $T \backslash G$. Pour déduire (*) du corollaire 1, il suffit de montrer que les intégrales orbitales associées aux éléments non elliptiques réguliers de G définissent des traces continues sur $\mathcal{S}(G)$; cette vérification — assez standard — sera faite au § 3.

1. LES ESPACES $\mathcal{S}(G)$, $\mathcal{S}(G, E)$

Les résultats de ce paragraphe sont valables pour un groupe réductif G de rang déployé quelconque sur un corps p -adique F . On dira que deux fonctions f_1, f_2 sur G sont équivalentes s'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que, pour tout $g \in G$:

$$C_1 f_1(g) \leq f_2(g) \leq C_2 f_1(g).$$

Soient A_0 un tore déployé maximal de G , M_0 son centralisateur, et $P_0 = M_0 N_0$ un sous-groupe parabolique minimal. Soit K_0 un A_0 -bon sous-groupe compact maximal, au sens de [6, 0.6]. On introduit comme en [6, 4.2] la fonction sphérique

$$\Xi(g) = \langle \pi_0(g) \zeta_0, \zeta_0 \rangle$$

où $\pi_0 = \text{Ind}_{P_0}^G 1_{P_0}$ (induction unitaire 1), et ζ_0 est la fonction constante 1 sur G/P_0 . D'autre part, G étant linéaire, il est contenu dans un certain $\text{GL}_n(F)$, et on peut

introduire comme en [6, 4.1] la fonction

$$\sigma(g) = \log_q(\max(|g_{ij}|, |g_{ij}^{-1}|))$$

où q est le cardinal du corps résiduel de F . A équivalence près, Ξ ne dépend pas du choix de A_0 , K_0 , et σ ne dépend pas du plongement de G dans $\mathrm{GL}_n(F)$. En particulier, on peut choisir un plongement de G dans $\mathrm{GL}_n(F)$ tel que l'image de K_0 soit dans GL_n de l'anneau des entiers de F ([6, p. 150]); on peut donc supposer que σ est K_0 -bi-invariante.

Si E est un espace de Banach et ξ une fonction de G dans E , on pose, pour $r \geq 0$:

$$v_r(\xi) = \sup_{g \in G} \|\xi(g)\| \Xi(g)^{-1} (1 + \sigma(g))^r.$$

L'espace $\mathcal{S}(G, E)$ des fonctions rapidement décroissantes sur G à valeurs dans E sera l'espace des fonctions continues $\xi: G \rightarrow E$ telles que $v_r(\xi) < \infty$ pour tout $r \geq 0$. Si $E = \mathbb{C}$, on note plutôt $\mathcal{S}(G)$. On munit $\mathcal{S}(G, E)$ d'une topologie au moyen des semi-normes v_r . Il est facile de vérifier que $\mathcal{S}(G, E)$ est un espace de Fréchet dans lequel $C_c^\infty(G, E)$ est dense. Le lemme suivant est démontré en [6, 4.4.2]:

LEMME 1. Pour $r \geq 0$, $r_2 > r$, $r_1 - r_2$ assez grand:

$$v_r(\Xi(1 + \sigma)^{-r_1} * \Xi(1 + \sigma)^{-r_2}) < \infty.$$

COROLLAIRE 2. i) Si A est une algèbre de Banach, $\mathcal{S}(G, A)$ est une algèbre de Fréchet.

ii) Si E est un espace de Banach, $\mathcal{S}(G, E)$ est un module de Fréchet à droite sur $\mathcal{S}(G)$, en posant

$$\xi f(h) = \int_G \xi(g) f(g^{-1}h) dg \quad (\xi \in \mathcal{S}(G, E), f \in \mathcal{S}(G)).$$

iii) Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, $\mathcal{S}(G, \mathcal{H})$ est un pré- C^* -module sur la pré- C^* -algèbre $\mathcal{S}(G)$ en posant

$$\langle \xi, \eta \rangle(h) = \int_G \langle \xi(g), \eta(gh) \rangle dg \quad (\xi, \eta \in \mathcal{S}(G, \mathcal{H})).$$

Preuve. i) Si $\xi, \eta \in \mathcal{S}(G, A)$, on a pour $h \in G$:

$$\begin{aligned} \|\xi * \eta(h)\| &\leq \int_G \|\xi(g)\| \Xi(g)^{-1} (1 + \sigma(g))^{r_1} \|\eta(g^{-1}h)\| \Xi(g^{-1}h)^{-1} (1 + \sigma(g^{-1}h))^{r_2} \\ &\quad \cdot \Xi(g) (1 + \sigma(g))^{-r_1} \Xi(g^{-1}h) (1 + \sigma(g^{-1}h))^{-r_2} dg \leq \\ &\leq v_{r_1}(\xi) v_{r_2}(\eta) \int_G \Xi(g) (1 + \sigma(g))^{-r_1} \Xi(g^{-1}h) (1 + \sigma(g^{-1}h))^{-r_2} dg \end{aligned}$$

et, par le lemme 1, cette intégrale converge pour r_1, r_2 assez grands. De plus:

$$v_r(\check{\zeta}^* \eta) \leq C_{r_1, r_2} v_{r_1}(\check{\zeta}) v_{r_2}(\eta).$$

ii) et iii) se démontrent de manière analogue; pour iii), on utilise l'invariance de Ξ et σ pour $g \mapsto g^{-1}$.

REMARQUE. L'espace de Schwartz $\mathcal{U}(G)$ de Harish-Chandra est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}(G)$ pour lesquels il existe un sous-groupe compact ouvert K de G tel que f soit K -bi-invariante. La fonction p ne vérifie pas cette dernière propriété (quoique p soit localement constante), donc $\mathcal{U}(G)$ n'est pas stable par multiplication ponctuelle par τ_i ; c'est la principale raison de l'introduction de l'algèbre $\mathcal{S}(G)$. (Il eût été naturel dans notre contexte d'introduire l'espace des fonctions localement constantes à décroissance rapide sur G , mais il semble que cet espace ne soit pas une algèbre de convolution).

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni d'une représentation unitaire π de G . On note $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ l'algèbre de Banach des opérateurs à trace sur $\mathcal{H}$.

LEMME 2. i) $\mathcal{S}(G, \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$ agit à gauche sur $\mathcal{S}(G, \mathcal{H})$ par

$$T\check{\zeta}(h) = \int_G T(g) \check{\zeta}(g^{-1}h) dg \quad (T \in \mathcal{S}(G, \mathcal{L}^1(\mathcal{H})), \check{\zeta} \in \mathcal{S}(G, \mathcal{H})).$$

ii) $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ agit à gauche sur $\mathcal{S}(G, \mathcal{H})$ par $S \mapsto \tilde{S}$, où $\tilde{S}\check{\zeta}(h) = S(\check{\zeta}(h))$; $\tilde{S}$ définit un multiplicateur (à gauche et à droite) de $\mathcal{S}(G, \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$.

iii) $\mathcal{S}(G)$ agit à gauche sur $\mathcal{S}(G, \mathcal{H})$ en posant

$$\tilde{\pi}(f)\check{\zeta}(h) = \int_G f(g)\pi(g)(\check{\zeta}(g^{-1}h)) dg.$$

$\tilde{\pi}(f)$ définit un multiplicateur (à gauche et à droite) de $\mathcal{S}(G, \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$.

iv) Si χ est une trace continue sur $\mathcal{S}(G)$, la formule

$$\mathrm{Tr}_\chi T = \int_G \mathrm{Tr}(T(g))\chi(g) dg \quad (T \in \mathcal{S}(G, \mathcal{L}^1(\mathcal{H})))$$

définit une trace continue sur $\mathcal{S}(G, \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$.

Preuve. i) se démontre comme le corollaire 2.

ii) La première assertion est triviale. Pour la seconde, si $T \in \mathcal{S}(G, \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$, on remarque que $\tilde{S}T$ (resp. $T\tilde{S}$) est donné par la fonction $g \mapsto ST(g)$ (resp. $g \mapsto T(g)S$).

iii) La première assertion se démontre comme le corollaire 2. Pour la seconde, on remarque que $\tilde{\pi}(f)T$ est donné par

$$h \mapsto \int_G f(g)\pi(g)T(g^{-1}h) dg$$

et on démontre comme ci-dessus que cette fonction est dans $\mathcal{S}(G, \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$ (et de même pour $T\tilde{\pi}(f)$).

iv) est trivial.

On dira que $\mathcal{S}(G, \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$ est l'algèbre des opérateurs à trace sur le module $\mathcal{S}(G, \mathcal{H})$.

2. PREUVE DU THÉORÈME

On suppose dorénavant que G est quasi-simple de rang déployé 1 (exemple: $G = \mathrm{SL}_2(D)$, où D est une algèbre centrale à division, de dimension finie sur F). L'immeuble de G est alors un arbre (voir [7]). Notons x_0 le sommet de l'immeuble associé à K_0 , et $\rho(g)$ la distance entre x_0 et gx_0 .

LEMME 3. *Il existe une constante positive C telle que*

$$\rho(g) \leq C(1 + \sigma(g)).$$

Démonstration. Comme A_0 est déployé, on trouve $g_0 \in \mathrm{GL}_n(F)$ tel que $\mathrm{Ad}_{g_0}(A_0)$ est diagonal. Posons $\sigma'(g) = \sigma(\mathrm{Ad}_{g_0}(g))$; on sait que σ et σ' sont équivalentes. Si $\chi: F^\times \rightarrow A_0$ est un isomorphisme rationnel, on a pour $x \in F^\times$:

$$\mathrm{Ad}_{g_0}\chi(x) = \mathrm{diag}(x^{k_1}, \dots, x^{k_n})$$

où les k_i sont des entiers non tous nuls. D'où:

$$\sigma'(\chi(x)) = \max_i |k_i| \cdot |\mathrm{val}(x)| \quad \text{et}$$

(1)

sur $F^\times$, $\sigma \circ \chi$ est équivalente à $|\mathrm{val}|$.

D'autre part, par décomposition "de Cartan" ([6, 0.6], [7]), il existe une partie finie M_f de M_0 telle que tout $g \in G$ puisse s'écrire $g = k_1 a m k_2$ où $k_1, k_2 \in K_0$, $a \in A_0$, $m \in M_f$. Donc

$$(2) \quad \rho(g) = \rho(am) \leq p(a) + \max_{m \in M_f} \rho(m)$$

($p(a) = \rho(a)$ car x_0 appartient à l'appartement $\mathcal{A}$ associé à A_0 (voir [7])). L'action de A_0 sur $\mathcal{A}$ définit, par composition avec χ , un homomorphisme non ramifié $\alpha: F \rightarrow \mathbb{Z}$, donc donné par

$$\alpha(x) = \alpha(\pi)\text{val}(x) \quad (x \in F^\times)$$

où π est une uniformisante de F . Comme $p(\chi(x)) = \alpha(x)$, on trouve par (1) et (2) une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $g \in G$:

$$\rho(g) \leq C_1(1 + \sigma(a)).$$

Comme $1 + \sigma(a) \leq (1 + \sigma(am))(1 + \sigma(m))$, il vient:

$$\rho(g) \leq C_1 \cdot \max_{m' \in M_f} (1 + \sigma(m')) (1 + \sigma(am))$$

et la K_0 -bi-invariance de σ permet de conclure.

Preuve du théorème. On rappelle que, dans [5], on avait construit un espace de Hilbert $\mathbb{Z}/2$ -gradué $\mathcal{H}$, muni d'une représentation unitaire π de G (par opérateurs de degré 0), et d'une famille normiquement continue F_t ($t > t_0 \geq 0$) d'opérateurs de degré 1 sur $\mathcal{H}$ vérifiant:

(F1) Pour tout $t > t_0$: $F_t^2 = 1$;

(F2) Pour tout $g \in G$, le rang de $[F_t, \pi(g)]$ est au plus égal à $\rho(g)$;

(F3) Pour $g \in G$: $\text{Tr } \varepsilon F_t[F_t, \pi(g)] = 2\tau_t(g)$ (où ε désigne l'opérateur de graduation).

Les $\gamma_t = (\mathcal{H}, F_t)$ sont les G -modules de Fredholm mentionnés au § 0. Considérons alors les opérateurs $\tilde{F}_t$ et $\tilde{\pi}(f)$ ($f \in \mathcal{S}(G)$) agissant sur $\mathcal{S}(G, \mathcal{H})$. Le commutateur $[\tilde{F}_t, \tilde{\pi}(f)]$ est à trace; en effet, ce commutateur est donné par la fonction $g \mapsto f(g)[F_t, \pi(g)]$ et il suffit de voir que cette fonction est à décroissance rapide. Mais par (F2):

$$\| [F_t, \pi(g)] \|_1 \leq \rho(g) \| [F_t, \pi(g)] \| \leq 2 \| F_t \| \rho(g).$$

Donc

$$v_r[\tilde{F}_t, \tilde{\pi}(f)] \leq 2 \| F_t \| \sup_{g \in G} |f(g)| \rho(g) \Xi(g)^{-1} (1 + \sigma(g))^r \leq C' v_{r+1}(f)$$

par le lemme 3. Par (F3), il est alors trivial que:

$$\text{Tr}_\chi \tilde{F}_t [\tilde{F}_t, \tilde{\pi}(f)] = 2 \langle \tau_t \chi, f \rangle$$

(le terme de gauche ayant du sens par le lemme 2). On pose alors

$$\varphi_i(a^0, a^1, a^2) = - \text{Tr}_\chi \tilde{F}_t [\tilde{F}_t, \tilde{\pi}(a^1)] [\tilde{F}_t, \tilde{\pi}(a^2)] \quad (a^i \in \mathcal{S}(G))$$

et on montre l'analogie des Lemmas 6 et 7 de [5]:

$$(3) \quad [S(\tau_i \chi)] = [\varphi_i] \quad \text{dans } H^2(\mathcal{S}(G))$$

(on renvoie à [1] pour les notations et les définitions)

$$(4) \quad \text{Pour } t, t' > t_0 : [S\varphi_t] = [S\varphi_{t'}] \quad \text{dans } H^4(\mathcal{S}(G)).$$

Les preuves de (3) et (4) sont des copies de celles de [5]; il suffit de vérifier que tous les opérateurs écrits sous Tr_χ sont à trace, ce qui est assuré par le lemme 2 (ainsi, φ_i est bien défini). La conjonction de (3) et (4) démontre le théorème.

3. CONVERGENCE D'INTÉGRALES ORBITALES

Le lemme suivant est valable pour un groupe G de rang déployé quelconque. Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G , et Δ_p sa fonction-module.

LEMME 4. *Pour $f \in \mathcal{S}(G)$, $m \in M$, l'intégrale*

$$f^p(m) = \Delta_p^{1/2}(m) \int_{\tilde{N}} f(mn) \, dn$$

converge absolument, et $f \mapsto f^p$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{S}(M)$.

Démonstration. Par [6, 4.3.20], pour $r \geq r' \geq 0$, on trouve des constantes positives C, r_0 telles que:

$$\Delta_p^{1/2}(m) \int_{\tilde{N}} \Xi(mn) (1 + \sigma(mn))^{-r_0-r} \, dn \leq C \Xi_M(m) (1 + \sigma(m))^{-r'}$$

où Ξ_M désigne, pour le groupe réductif M , l'analogue de Ξ pour G . Donc, pour $f \in \mathcal{S}(G)$:

$$|f^p(m)| \leq v_{r_0+r}(f) \Delta_p^{1/2}(m) \int_{\tilde{N}} \Xi(mn) (1 + \sigma(mn))^{-r_0-r} \, dn \leq$$

$$\leq C v_{r_0+r}(f) \Xi_M(m) (1 + \sigma(m))^{-r'}$$

et $v_{r'}(f^p) \leq C v_{r_0+r}(f)$.

On sait ([3, Lemma 13]) que les intégrales orbitales non elliptiques régulières définissent des distributions tempérées sur G . On va montrer que ce sont même des mesures tempérées.

PROPOSITION. Soient T un tore maximal non elliptique de G , γ un élément régulier de T et dg^* une mesure G -invariante sur $T \backslash G$. Si G est de rang déployé 1, l'application

$$f \mapsto \int_{T \backslash G} f(g^{-1}\gamma g) dg^*$$

définit une trace continue sur $\mathcal{S}(G)$.

Preuve. Il suffit de montrer que l'intégrale converge absolument. On va s'inspirer de [2, A.3.c]. Soit A_T la composante déployée de T . Comme T est non elliptique, on peut en conjuguant supposer que $A_T = A_0$ puisque le rang déployé vaut 1. Donc $T \subseteq M_0$ et $T \backslash M_0$ est compact. Rappelons qu'on a $G = M_0 N_0 K_0$; on peut prendre $dg = dn \cdot dm \cdot dk$ comme mesure de Haar sur G et, si dm^* est une mesure M_0 -invariante sur $T \backslash M_0$, on peut prendre $dg^* = dn \cdot dm^* \cdot dk$. Pour $k \in K_0$, posons $f^k(g) = f(k^{-1}gk)$. Par [4, Lemma 22], on a

$$\begin{aligned} \int_{N_0} f(k^{-1}n^{-1}m^{-1}\gamma mnk) dn &= \int_{N_0} f^k(n^{-1}m^{-1}\gamma mn) dn = \\ &= [\det(\text{Ad}(\gamma^{-1}) - 1)]^{-1} \int_{\text{Lie } N_0 \backslash N_0} f^k(m^{-1}\gamma mn) dn. \end{aligned}$$

Le déterminant est non nul, car γ est régulier. Comme $f^k \in \mathcal{S}(G)$ et $m^{-1}\gamma m \in M_0$, l'intégrale de droite converge absolument, par le lemme 4. Il reste à intégrer sur l'espace compact $T \backslash M_0 \times K_0$, ce qui ne pose aucun problème. Enfin, pour avoir (*), il suffit de remarquer que $\mathcal{S}(G)$ contient les coefficients de série discrète de G ([6, 4.4.5]).

REMARQUE: Dans [5], la seule hypothèse sur γ était que γ opère sans point fixe sur l'immeuble. En effet, sur $C_c^\infty(G)$, toutes les intégrales orbitales convergent ([2, appendice 1]). Nous ignorons si cela reste vrai sur $\mathcal{C}(G)$ ou $\mathcal{S}(G)$.

Le second auteur est chargé de recherches au Fonds National belge de la Recherche Scientifique.

RÉFÉRENCES

1. CONNES, A., Non-commutative differential geometry, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **62**(1985), 41-144.
2. DELIGNE, P.; KAZHDAN, D.; VIGNERAS, M.-F., Représentations des algèbres centrales simples p -adiques, in *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, 1984, pp. 33-117.
3. HARISH-CHANDRA, Harmonic analysis on reductive p -adic groups, *Proc. Symp. Pure Math.*, **26**(1973), 167-195.

4. HARISH-CHANDRA,; VAN DIJK, G., *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Springer Lect. Notes in Math., **162**(1970).
5. JULG, P.; VALETTE, A., Twisted coboundary operator on a tree and the Selberg principle, *J. Operator Theory*, **16**(1986), 285—304.
6. SILBERGER, A. J., *Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Mathematical Notes **23**, Princeton Univ. Press, 1979.
7. TITS, J., Reductive groups over local fields, *Proc. Symp. Pure Math.*, **33**(1979), 29—69.

PIERRE JULG

Collège de France,
Département de Mathématiques,
3, Rue d'Ulm, F-75005 Paris,
France.

ALAIN VALETTE

Département de Mathématiques, CP 216,
Université Libre de Bruxelles,
Boulevard du Triomphe, B-1050 Bruxelles,
Belgique.

Received October 1, 1986.