J. OPERATOR THEORY
20(1988), 69–81

SUR LES OPÉRATEURS SOUS-NORMAUX DANS LA CLASSE A

F. ZAROUF

1. RAPPELS ET NOTATIONS

Nous donnons une amélioration du critère d'appartenance à la classe $\mathbf{A}_1(r)$ obtenu par Chevreau et Pearcy [7]; en nous servant du théorème 1.4 de Sullivan [11], nous établissons qu'un opérateur sous-normal dans la classe **A** vérifie ce nouveau critère. Ceci conduit, dans ce cas particulier mais fondamental, à une démonstration rapide du résultat d'Olin et Thomson [10] qui affirme que tout opérateur sous-normal engendre une algèbre duale ayant la propriété $(\mathbf{A}_1(\rho))$.

Nous rappelons quelques propriétés d'une algèbre duale engendrée par un opérateur, de l'extension co-isométrique minimale d'une contraction et de la mesure complexe associée à un opérateur unitaire absolument continu. Nous rappelons enfin la définition des ensembles $\mathscr{X}_0(\mathscr{A}_T)$ et $\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$.

Dans la suite, H désigne un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie.

1.1. ALGÈBRE DUALE. Soit $(\mathscr{C}_1(H), \|\cdot\|_1)$ l'espace de Banach (et idéal) des opérateurs compacts à traces finies sur H. L'algèbre de Banach $\mathscr{L}(H)$ des opérateurs définis sur H s'identifie au dual de $\mathscr{C}_1(H)$. Dans cette identification, la forme bilinéaire canonique est donnée par:

$$\langle T, L\rangle = \mathrm{tr}(TL), \quad T \in \mathscr{L}(H),\ L \in \mathscr{C}_1(H).$$

Si $T \in \mathscr{L}(H)$, on notera $\mathscr{A}_T$ la plus petite sous-algèbre unitaire faible*-fermée de $\mathscr{L}(H)$ contenant T et Q_T l'espace de Banach quotient $\mathscr{C}_1(H)/{}^\perp\mathscr{A}_T$, ${}^\perp\mathscr{A}_T = \{K \in \mathscr{C}_1(H), \langle K, A\rangle = 0, \forall A \in \mathscr{A}_T\}$ qui est le préannulateur de $\mathscr{A}_T$. Le dual de Q_T s'identifie à $\mathscr{A}_T$ et la forme bilinéaire canonique est donnée par:

$$\langle A, [L]_T\rangle = \mathrm{tr}(AL), \quad A \in \mathscr{A}_T,\ [L]_T \in Q_T$$

$[L]_T$, ou tout simplement $[L]$, désigne l'élément générique de Q_T.

A tout couple (x, y) d'éléments de H, on associe l'opérateur $x \otimes y$, de rang au plus égal à un, défini par $(x \otimes y)(u) = (u, y)x$, pour $u \in H$, $(\cdot, \cdot)$ étant le produit scalaire sur H. On a $\mathrm{tr}(x \otimes y) = (x, y)$ et donc $x \otimes y \in \mathscr{C}_1(H)$. On dit que $\mathscr{A}_T$ a la propriété $(\mathbf{A}_1)$ si pour tout $[L] \in Q_T$, on peut trouver $x, y \in H$ tels que $[L] = [x \otimes y]$ et que $\mathscr{A}_T$ a la propriété $(\mathbf{A}_1(r))$, $r \geqslant 1$, si pour tout $[L] \in Q_T$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $x, y \in H$ tels que $[L] = [x \otimes y]$ et $\|x\| \|y\| \leqslant (r + \varepsilon) \|[L]\|$.

Si $T\colon H \to H$ est une contraction absolument continue, le calcul fonctionnel $\Phi_T\colon H^\infty \to \mathscr{A}_T$ de Sz.-Nagy — Foiaş, est un homomorphisme faible*-continue de H^∞ sur $\Phi_T(H^\infty)$ vérifiant en particulier $\|f(T)\| \leqslant \|f\|_\infty$, $f(T) = \Phi(f)$.

La classe $\mathbf{A}\,(= \mathbf{A}(H))$ est l'ensemble des contractions absolument continues T de $\mathscr{L}(H)$ telles que Φ_T soit une isométrie. Dans ce cas, Φ_T est un faible*-homéomorphisme et il existe une isométrie $\varphi_T\colon Q_T \to L^1/H_0^1$ telle que $\varphi_T^* = \Phi_T$. H_0^1 désigne le sous-espace de H^1 des fonctions f dont l'extension analytique $\hat{f}$ au disque $\mathbf{D}$ vérifie $\hat{f}(0) = 0$. Rappelons que L^1/H_0^1 est le prédual de H^∞.

Pour $\lambda \in \mathbf{D}$ et $T \in \mathbf{A}$, on note $[C_\lambda] = \varphi_T^{-1}([P_\lambda])$, P_λ étant le noyau de Poisson, $P_\lambda(e^{it}) = (1 - |\lambda|^2)|1 - \bar{\lambda}e^{it}|^{-2}$, $e^{it} \in \mathbf{T}$, $P_\lambda \in L^\infty(\mathbf{T})$. On a alors:

$$\langle f(T), [C_\lambda]\rangle = \langle \Phi(f), [C_\lambda]\rangle = \langle f, \varphi_T([C_\lambda])\rangle = \langle f, P_\lambda\rangle = f(\lambda).$$

La classe $\mathbf{A}_1(r)$ est l'ensemble des $T \in \mathbf{A}$ tel que $\mathscr{A}_T$ ait la propriété $(\mathbf{A}_1(r))$.

Pour $T \in \mathscr{L}(H)$, on désignera par $\sigma(T)$, $\sigma_e(T)$, $\sigma_{re}(T)$, $\sigma_{if}(T)$ le spectre, le spectre essentiel, le spectre essentiel à droite, le spectre de Fredholm isolé de T respectivement et par $\mathscr{F}_-(T)$ la réunion des trous de $\sigma_e(T)$ d'indice négatif ou nul, contenus dans $\sigma(T)$. Rappelons que $\sigma_{if}(T) = \sigma(T) \setminus (\widehat{\sigma(T)} \cup \sigma_e(T))$.

1.2. Extension co-isométrique minimale. Soit $T\colon H \to H$ une contraction. Alors T admet une extension co-isométrique minimale B. Autrement dit, il existe un espace de Hilbert K contenant H et une co-isométrie $B \in \mathscr{L}(K)$ tels que:

$$BH \subset H, \quad B|H = T \quad \text{et} \quad K = \bigvee_{n \geqslant 0} B^{*n}H.$$

Puisque B^* est une isométrie, on peut décomposer B sous la forme $B = S^* \oplus R$ et l'espace correspondant sous la forme $K = \mathscr{S} \oplus \mathscr{R}$, avec $S\colon \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ shift unilatéral, $R\colon \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ opérateur unitaire. Pour tout $x \in H$, on a $x = Qx \oplus Ax$ où Q est la projection de K sur $\mathscr{S}$ et A la projection de K sur $\mathscr{R}$. Si T est absolument continue et si $\mathscr{R} \neq \{0\}$, alors R est absolument continu et, pour tout $x \in H$ et tout $h \in H^\infty$, on a:

$$h(S^*)Qx = Q(h(T)x), \quad h(R)(Ax) = A(h(T)x).$$

Dans le cas où $T \in \mathbf{A}(H)$, on a:

1°) $B \in \mathbf{A}(K)$, $\Phi_T \circ \Phi_B^{-1}: \mathscr{A}_B \to \mathscr{A}_T$ est un faible*-homéomorphisme isométrique et $j = \varphi_B^{-1} \circ \varphi_T: Q_T \to Q_B$ est une isométrie telle que $j([C_\lambda]_T) = [C_\lambda]_B$, $\lambda \in \mathbf{D}$; $j([x \otimes y]_T) = [x \otimes y]_B$ pour tous $x, y \in H$.

2°) Pour $x, y \in H$ et $w, z \in K$, on a:

$$\|[x \otimes y]_T\| = \|[x \otimes y]_B\|, \quad [x \otimes z]_B = [x \otimes Pz]_T,$$

$$[w \otimes z]_B = [Qw \otimes Qz]_B + [Aw \otimes Az]_B,$$

P étant la projection de K sur H.

3°) Si $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de H telle que:

$$\|[x_n \otimes y]_T\| \to 0, \quad \forall y \in H,$$

alors:

$$\|[x_n \otimes z]_B\| + \|[Qx_n \otimes z]_B\| + \|[Ax_n \otimes z]\|_B \to 0, \quad \forall z \in K.$$

4°) Si (z_n) est une suite dans K qui converge faiblement vers 0, alors $\|[w \otimes z_n]_B\| \to 0$, $\forall w \in \mathscr{S}$.

1.3. Mesure complexe associée à un opérateur unitaire absolument continu. Soit $U: H \to H$ un opérateur unitaire et absolument continu de mesure spectrale E_U qu'on considèrera définie sur $\mathbf{T}$. Pour $x, y \in H$, puisque U est absolument continu, la mesure complexe $\mu_{x,y}$ définie par $\mu_{x,y}(\Delta) = (E_U(\Delta)x, y)$, Δ borélien de $\mathbf{T}$, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m sur $\mathbf{T}$. Pour $x, y \in H$, il existe donc une fonction, notée $x \overset{U}{\cdot} y$, ou tout simplement $x \cdot y$, élément de $L^1(\mathbf{T})$ telle que $\mathrm{d}\mu_{x,y} = x \cdot y\,\mathrm{d}m$. La fonction $(x, y) \to x \cdot y: H \times H \to L^1(\mathbf{T})$ est donc sesquilinéaire et si $U = U_1 \oplus U_2$, $H = H_1 \oplus H_2$ alors pour $x = x_1 \oplus x_2$, $y = y_1 \oplus y_2$, avec $x_1, y_1 \in H_1$ et $x_2, y_2 \in H_2$, on a $x_i \overset{U_i}{\cdot} y_i = x_i \overset{U}{\cdot} y_i$, $x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1 = 0$ et $x \cdot y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$. Cela résulte facilement du fait que pour tout $l \in L^\infty(\mathbf{T})$, on a:

$$\int_{\mathbf{T}} l \cdot (x \overset{U}{\cdot} y)\mathrm{d}m = (l(U)x, y) = (l(U_1)x_1, y_1) + (l(U_2)x_2, y_2) =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} l \cdot (x_1 \overset{U_1}{\cdot} y_1 + x_2 \overset{U_2}{\cdot} y_2)\mathrm{d}m.$$

1.4. Les ensembles $\mathscr{X}_\theta(\mathscr{A}_T)$ et $\mathscr{E}_\theta^r(\mathscr{A}_T)$. Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ et soit θ un réel positif ou nul. L'ensemble $\mathscr{X}_\theta(\mathscr{A}_T)$ est constitue des $[L] \in Q_T$ tels qu'il existe deux suites

(x_n) et (y_n) dans la boule unité fermée de H vérifiant:

1°) $\overline{\lim}\,\|[L]-[x_n\otimes y_n]\|\leqslant \theta$

2°) $\forall z\in H,\ \|[x_n\otimes z]\|+\|[z\otimes y_n]\|\to 0$

et $\mathscr{E}_\theta^r(\mathscr{A}_T)$ est l'ensemble des $[L]\in Q_T$ tels qu'il existe deux suites (x_n) et (y_n) dans la boule unité fermée de H vérifiant:

1°) $\overline{\lim}\,\|[L]-[x_n\otimes y_n]\|\leqslant \theta$,

2°) $\forall z\in H,\ [x_n\otimes z]\to 0$,

et

3°) y_n converge faiblement vers 0.

Il est clair que $\mathscr{X}_\theta(\mathscr{A}_T)\subset \mathscr{E}_\theta^r(\mathscr{A}_T)$.

Etant donné un borélien E de $\mathbf{T}$, on conisdérera $L^1(E)$ comme canoniquement plongé dans $L^1(\mathbf{T})$.

Soit $T\in \mathbf{A}(H)$ et soit $B=S^*\oplus R$ son extension co-isométrique minimale. Si $R\neq 0$, alors pour tous $w,z\in\mathscr{R}$ on a $[w\overset{R}{\cdot}z]=\varphi_B([w\otimes z]_B)$.

Pour $l\in L^1(T)$ et $T\in\mathbf{A}(H)$, on désigne par $[l]_T$ l'élément de Q_T défini par $[l]_T=\varphi_T^{-1}([l])$. Comme

$$\langle h(B),\, j([l]_T)\rangle=\langle h(T),[l]\rangle=\int_{\mathbf{T}} hl\,\mathrm{d}m=\langle h(B),[l]_B\rangle,$$

on a $j([l]_T)=[l]_B$.

Pour ces rappels, on peut consulter [1] et [7].

2. NOUVEAU CRITÈRE D'APPARTENANCE A LA CLASSE $\mathbf{A}_1(r)$

Chevreau et Pearcy ont montré dans [7] que pour $T\in\mathbf{A}$, si l'enveloppe absolument convexe fermée, $\overline{\mathrm{aco}}(\mathscr{E}_\theta^r(\mathscr{A}_T))$, de $\mathscr{E}_\theta^r(\mathscr{A}_T)$ contient la boule unité de centre 0 et de rayon γ, avec $0\leqslant\theta<\gamma\leqslant 1$, alors $T\in\mathbf{A}_1(r)$. Dans ce qui suit, nous donnons une extension de ce résultat. Rappelons tout d'abord les deux résultats suivants:

2.1. Proposition. (cf. [7, Proposition 3.10]). *Soit $T\colon H\to H$ une contraction absolument continue, $B=S^*\oplus R$ son extension co-isométrique minimale, avec $R\neq 0$. Alors:*

a) *il existe un ensemble borélien Σ de $\mathbf{T}$ et un sous-espace $\mathscr{R}_0$ réduisant pour R tels que $R_0=R|\mathscr{R}_0$ soit unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par e^{it} sur $L^2(\Sigma)$ et $m|\Sigma$ soit une mesure spectrale scalaire pour R.*

b) *Le sous-espace de $\mathscr{R}_0$ correspondant a $H^2(\Sigma)$ est inclus dans $\overline{AH}$.*

REMARQUE. Le fait que $m|\Sigma$ soit une mesure spectrale scalaire pour R signifie ici que Σ est un borélien minimal (à un borélien m-négligeable prés) supportant les fonctions $x \cdot y$, x, $y \in \mathscr{R}$.

2.2. THÉORÈME. (cf. [6, Theorem 3.11]). *Soit $T \in \mathbf{A}$, $B = S^* \oplus R$ son extension co-isométrique minimale, avec $R \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$, $0 < \rho < 1$, $h_1 = Aa_1 \cdot b + h$, avec $a_1 \in H$, $b \in \mathscr{R}$ et $h \in L^1(\Sigma)$. Alors, il existe $u \in H$, $c \in \mathscr{R}$ tels que:*

$$\|h - A(a_1 + u)\cdot c\|_1 < \varepsilon, \quad \|Qu\| < \varepsilon,$$

$$\|(A - A_0)u\| < \varepsilon, \quad \|u\| \leqslant 2\|h\|_1^{1/2}, \quad \|c\| \leqslant \frac{1}{\rho}\{\|b\| + \|h\|_1^{1/2}\} \quad et \quad c - b \in \mathscr{R}_0,$$

$\mathscr{R}_0$ étant le sous-espace du théorème 2.1 et A_0 la projection de K sur $\mathscr{R}_0$.

Les notations étant les mêmes que précédemment, nous allons établir le théorème suivant:

2.3. THÉORÈME. *Si $T \in \mathbf{A}$ et si $\overline{\mathrm{aco}}(\{\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)\} \cup \{[l]_T\,;\ l \in L^1(\Sigma),\ \|l\|_1 \leqslant 1\})$ contient la boule de centre 0 et de rayon γ de Q_T avec $0 \leqslant \theta < \gamma \leqslant 1$, alors $T \in \mathbf{A}_1(r)$, $r = \dfrac{6}{\gamma}\,\dfrac{1}{(1 - (\theta/\gamma)^{1/2})^2}$.*

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme 2.4 et le théorème 2.5 suivants:

2.4. LEMME. *(Les hypothèses sont celles du théorème 2.3 avec $\theta > 0$.) Soit $0 < \rho < 1$, $[L] \in Q_B$, $a \in H$, $w \in \mathscr{S}$, $b \in \mathscr{R}$, $\delta > 0$ tels que $\|[L]_B - [a \otimes (w + b)]_B\| < \delta$. Alors il existe $a' \in H$, $w' \in \mathscr{S}$, $b' \in \mathscr{R}$ tels que:*

$$\|[L]_B - [a' \otimes (w' + b')]_B\| < (\theta\delta/\gamma)$$

$$\|a - a'\| < 3(\delta/\gamma)^{1/2}, \quad \|w - w'\| < (\delta/\gamma)^{1/2}$$

et

$$\|b'\| < \frac{1}{\rho}(\|b\| + (\delta/\gamma)^{1/2}).$$

Preuve. Soit $[L_1]_B = [L]_B - [a \otimes (w + b)]_B$, $d = \|[L_1]\|$, $\varepsilon > 0$ tels que $(\theta/\gamma)d + \varepsilon < \theta\delta/\gamma$ et τ tels que $5\tau = \theta\delta/\gamma - (d\theta/\gamma + \varepsilon)$. D'après la condition du théorème 2.3, il existe $N \in \mathbf{N}$, $[K_1], \ldots, [K_N]$ dans $\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$, $l \in L^1(\Sigma)$ et des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| + \|l\|_1 < \frac{d}{\gamma} \quad \text{et} \quad \left\|j^{-1}([L_1]_B) - \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i[K_i] + [l]_T\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque chaque $[K_i]$ appartient à $\mathcal{E}_0^r(\mathcal{A}_T)$, une technique analogue à celle de ([7, Proposition 4.6]), montre que l'on peut choisir $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$, $(y_i)_{1 \leq i \leq N}$ dans la boule unité fermée de H, $u_0 = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\alpha_i} x_i$, $v_0 = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\bar{\alpha}_i} x_i$ tels que:

1) $$\left\| j^{-1}([L_1]_B) - \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i [x_i \otimes y_i]_T + [l]_T \right) \right\| < \varepsilon + d\theta/\gamma < \delta\theta/\gamma$$

$$\|[Qa \otimes Qv_0]_B\| < \tau/3, \quad \|[Qu_0 \otimes w]_B\| < \tau/3, \quad \|[Au_0 \otimes b]_B\| < \tau;$$

2) $$\|u_0\|^2 \simeq \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \|x_i\|^2 < \frac{d}{\gamma} - \|l\|_1 < \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\|v_0\|^2 \simeq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \|y_i\|^2 < \frac{d}{\gamma} - \|l\|_1 < \frac{\delta}{\gamma}.$$

Il découle de ces relations que:

$$\left\| [Qa \otimes b]_B + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [Qx_i \otimes Qy_i] - [Q(a + u_0) \otimes (w + Qv_0)] \right\| < \tau$$

et, puisque j est une isométrie, la relation 1) implique que:

3) $$\|[L]_B - ([Qa_1 \otimes w']_B + [Aa_1 \otimes b]_B + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [Ax_i \otimes Ay_i]_B + [l]_B)\| < \theta\delta/\gamma - 3\tau,$$

$a_1 = a + u_0$, $w' = w + Qv_0$.

La fonction $h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Ax_i \overset{R}{\cdot} Ay_i + l$ est dans $L^1(\Sigma)$; donc, d'après le théorème 2.2 il existe $\tilde{u} \in H$ et $c \in \mathcal{R}$ tels que

$$\left\| Aa \overset{R}{\cdot} b_1 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Ax_i \overset{R}{\cdot} Ay_i + l - A(a_1 + \tilde{u}) \overset{R}{\cdot} c \right\| < \tau$$

$$\|Q\tilde{u}\| < \frac{\tau}{\|w'\| + 1}, \quad \|\tilde{u}\| \leq 2\|h\|_1^{1/2} < 2\left(\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| + \|l\|_1 \right)^{1/2} < 2(\delta/\gamma)^{1/2}$$

$$\|c\| \leq \frac{1}{\rho}(\|b\| + \|h\|_1^{1/2}) < \frac{1}{\rho}(\|b\| + (\delta/\gamma)^{1/2}).$$

Il résulte de la relation 3) que:

$$\left\| [Aa_1 \otimes b]_B + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [Ax_i \otimes Ay_i]_B - [A(a_1 + \tilde{u}) \otimes c]_B \right\| < \tau,$$

et comme $\|[Q\tilde{u} \otimes w']\| \leqslant \|Q\tilde{u}\| \, \|w'\| < \tau$, on a:

$$\|[L]_B - [Q(a_1 + \tilde{u}) \otimes w'] - [A(a_1 + \tilde{u}) \otimes c]_B\| < \theta\delta/\gamma - \tau$$

soit encore

$$\|[L]_B - [(a_1 + \tilde{u}) \otimes (w' + c)]_B\| < \theta\delta/\gamma - \tau, \quad w' \in \mathscr{S}, \ c \in \mathscr{R}.$$

Les éléments $a' = a_1 + \tilde{u} = a + u_0 + \tilde{u}$, $b' = c$, $w' = w + Qv_0$ satisfont bien les conditions du lemme car:

$$\|a' - a\| < \|u_0\| + \|\tilde{u}\| < 3(\delta/\gamma)^{1/2}, \quad \|w' - w\| = \|Qv_0\| \leqslant \|v_0\| < (\delta/\gamma)^{1/2}$$

et

$$\|b'\| = \|c\| < \frac{1}{\rho}(\|b\| + (\delta/\gamma)^{1/2}).$$

2.5. THÉORÈME. *(Les hypothèses sont celles du théorème 2.3.) Soit $\delta > 0$, $[L] \in Q_T$, $a \in H$, $w \in \mathscr{S}$, $b \in \mathscr{R}$ tels que:*

1) $$\|[L]_T - [a \otimes P(w + b)]_T\| < \delta.$$

Alors il existe $\hat{a} \in H$, $\hat{w} \in \mathscr{S}$, $\hat{b} \in \mathscr{R}$ tels que:

$$[L]_T = [\hat{a} \otimes P(\hat{w} + \hat{b})]_T$$

$$\|\hat{a} - a\| < 3(\delta/\gamma)^{1/2}(1/\{1 - (\theta/\gamma)^{1/2}\}), \quad \|\hat{w} - w\| < (\delta/\gamma)^{1/2}(1/\{1 - (\delta/\gamma)^{1/2}\})$$

$$\|\hat{b} - b\| \leqslant 3\|b\| + 2(\delta/\gamma)^{1/2}(1/\{1 - (\theta/\gamma)^{1/2}\}).$$

P désigne la projection de K sur H.

Preuve. Puisque j est une isométrie et que $[a \otimes P(w + b)]_B = [a \otimes (w + b)]_B$, la relation 1) implique que:

$$\|[\hat{L}]_B - [a \otimes (w + b)]_B\| < \delta, \quad [\hat{L}]_B = j^{-1}([L]_T).$$

Posons $a = a_1$, $w = w_1$, $b = b_1$ et posons $\rho_n = s_{n+1}/s_n$ où (s_n) est une suite décroissante vers 1/2, $s_1 = 1$. Envisageons d'abord le cas $\theta > 0$. D'après le lemme précédent, il existe $a_2 \in H$, $w_2 \in \mathscr{S}$, $b_2 \in \mathscr{R}$ tels que

$$\|[\hat{L}] - [a_2 \otimes (w_2 + b)]_B\| < \theta\delta/\gamma,$$

avec

$$\|a_2 - a_1\| < 3(\delta/\gamma)^{1/2}, \quad \|b_2\| < \frac{1}{\rho_1}\{\|b_1\| + (\delta/\gamma)^{1/2}\}.$$

Par récurrence, on peut construire une suite (a_n) dans H, une suite (w_n) dans $\mathscr{S}$ et une suite (b_n) dans $\mathscr{R}$ telles que

$$\|[\hat{L}]_B - [a_n \otimes (w_n + b_n)]_B\| < (\theta/\gamma)^{n-1}\delta,$$

$$\|a_n - a_{n-1}\| < 3(\delta/\gamma)^{1/2}(\theta/\gamma)^{\frac{n-2}{2}}, \quad \|w_n - w_{n-1}\| < (\delta/\gamma)^{1/2}(\delta/\gamma)^{\frac{n-2}{2}},$$

$$\|b_n\| < \frac{1}{\rho_{n-1}}\{\|b_{n-1}\| + (\delta/\gamma)^{1/2}(\theta/\gamma)^{\frac{n-2}{2}}\}.$$

Les suites (a_n) et (w_n) sont donc de Cauchy. Soit $\hat{a} = \lim a_n$, $\hat{w} = \lim w_n$. On a:

$$\|\hat{a} - a\| = \left\|\sum_{k=2}^{\infty}(a_k - a_{k-1})\right\| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\|a_k - a_{k-1}\| < \sum_{k=2}^{\infty} 3(\delta/\gamma)^{1/2}(\theta/\gamma)^{\frac{k-2}{2}} =$$

$$= 3(\delta/\gamma)^{1/2}(1/\{1 - (\theta/\gamma)^{1/2}\}),$$

et de la même façon on a:

$$\|\hat{w} - w\| < (\delta/\gamma)^{1/2}(1/\{1 - (\theta/\gamma)^{1/2}\}).$$

De la relation $\|b_n\| < \frac{1}{\rho_{n-1}}\{\|b_{n-1}\| + (\delta/\gamma)^{1/2}(\theta/\gamma)^{\frac{n-1}{2}}\}$, on en déduit

$$\|b_n\| \leqslant 2\|b\| + 2(\delta/\gamma)^{1/2}(1/\{1 - (\theta/\gamma)^{1/2}\}), \quad n \in \mathbf{N}.$$

La suite (b_n) est donc bornée. Quitte à remplacer (b_n) par une sous-suite faiblement convergente, on peut supposer que (b_n) converge faiblement vers $\hat{b}$. Donc

$$\|\hat{b} - b\| \leqslant \|\hat{b}\| + \|b\| \leqslant 3\|b\| + 2(\delta/\gamma)^{1/2}(1/\{1 - (\theta/\gamma)^{1/2}\})$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|[\hat{L}]_B - [a_n \otimes (w_n + b_n)]_B\| = \lim_{n\to\infty} \|[L]_T - [a \otimes P(w_n + b_n)] +$$

$$+ [(\hat{a} - a_n) \otimes P(w_n + b_n)]_T\| = \lim_{n\to\infty} \|[L] - [\hat{a} \otimes P(w_n + b_n)]\|$$

donc $[L]_T = \lim_{n\to\infty} [a \otimes P(w_n + b_n)]_T$. Or pour $h \in H^\infty$ on a

$$\langle h(T), [L]\rangle = \lim\langle h(T), [\hat{a} \otimes P(w_n + b_n)]\rangle =$$

$$= \lim\langle h(T)\hat{a}, w_n + b_n\rangle = \langle h(T), [\hat{a} \otimes P(\hat{w} + \hat{b})]\rangle$$

donc $[L]_T = [\hat{a} \otimes P(\hat{w} + \hat{b})]_T$. Reste à traiter le cas $\theta = 0$. Soit δ' tel que $\|[L]_T - [a \otimes P(w + b)]_T\| < \delta' < \delta$. Choisissons $0 < \theta' < \gamma$ tel que $(\delta'/\gamma)^{1/2}\left(\dfrac{1}{1 - (\theta'/\gamma')^{1/2}}\right) < (\delta/\gamma)^{1/2}$. On peut appliquer alors l'argument précédent avec les paramètres θ' et δ' et on obtient bien le résultat désiré.

Preuve du théorème 2.3. Il suffit de choisir $\varepsilon > 0$, $a = 0$, $w = 0$, $b = 0$ et $\delta = \|[L]_T\| + \varepsilon$, $[L]_T \in Q_T$ et d'appliquer le théorème 2.5.

3. PROPRIÉTÉS D'UN OPÉRATEUR SOUS-NORMAL DANS LA CLASSE A

3.1. DÉFINITION. Soit $T \in \mathscr{L}(H)$. On dit que T est *sous-normal* s'il existe un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et un opérateur $N : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ normal tels que H soit un sous-espace fermé de $\mathscr{H}$, $NH \subset H$ et $N|H = T$.

3.2. PROPOSITION. *Si T est un opérateur sous-normal dans la classe* **A**, *alors pour tout $\lambda \in \Lambda = \sigma(T)\setminus\sigma_{\mathrm{lf}}(T)$, on a $[C_\lambda]_T \in \mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$.*

Preuve. Soit $\lambda \in \Lambda$, si $\lambda \in \sigma_{\mathrm{re}}(T)$, d'après [10], $[C_\lambda] \in \mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$. Si $\lambda \in (\sigma(T) \cap \mathbf{D})\setminus\sigma_{\mathrm{re}}(T)$, le lemme se déduit immédiatement de [6, Lemmas 2.2 et 2.3] et de [7, Lemma 5.2].

Dans la suite, on se place dans le cas où $T : H \to H$ est un opérateur sous-normal et est dans la classe **A**. Pour montrer que T est dans $\mathbf{A}_1(6)$, nous utiliserons le critère d'appartenance à la classe **A** pour les opérateurs sous-normaux établi par Sullivan [11] et les deux lemmes suivants dont le premier peut aussi se déduire du Lemma 2.1 de [2].

3.3. Lemme. *Soit Λ un sous-ensemble du disque unité* **D** *et soit Γ l'ensemble* NTL(Λ) *des points de* **T** *qui sont limites non tangentielles de points de Λ. Alors la boule unité fermée de $L^1(\Gamma)$ est contenue dans* $\overline{\mathrm{aco}}(\{P_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\})$.

Preuve. Supposons qu'il existe $f \in L^1(\Gamma)$, avec $\|f\|_1 \leqslant 1$ et $f \notin \overline{\mathrm{aco}}(\{P_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\})$ D'après le théorème de Hahn-Banach (Proposition 14.15, [3]), il existe une fonction $g \in L^\infty(\Gamma)$ et un réel α tels que $\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbf{T}} fg\right) > \alpha \geqslant \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbf{T}} gh\right)$, pour tout $h \in \overline{\mathrm{aco}}(\{P_\lambda,$ $\lambda \in \Lambda\})$. Il en résulte d'après ([9], p. 38) et le fait que $\Gamma = \mathrm{NTL}(\Lambda)$ que $\|g\|_\infty > > \alpha \geqslant \|g\|_\infty$ ce qui est impossible.

Il résulte de ce lemme que l'ensemble $\{[l]_T,\ l \in L^1(\Sigma),\ \|l\|_1 \leqslant 1\}$ est inclus dans $\overline{\mathrm{aco}}(\{[C_\lambda]_T,\ \lambda \in \Lambda\})$.

3.4. Lemme. *Soit* $F = \mathrm{NTL}(\sigma_{\mathrm{if}}(T))$. *Alors*

a) $\overline{\mathrm{aco}}\{[C_\lambda]_T,\ \lambda \in \sigma_{\mathrm{if}}(T)\} \supset \{[l]_T,\ l \in L^1(F),\ \|l\|_1 \leqslant 1\}$;

b) *Pour tout $l \in L^1(F)$, avec $\|l\|_1 \leqslant 1$, on a $[l]_T \in \mathscr{X}_0(\mathscr{A}_T)$.*

Preuve. L'assertion a) est une conséquence du théorème de Hahn-Banach. L'assertion b) utilise a). En effet, soit $l \in L^1(F)$ $\|l\|_1 \leqslant 1$ et soit $\varepsilon = 1$; d'après a), il existe une suite de scalaires $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant k_1}$ tels que $\lambda_i \in \sigma_{\mathrm{if}}(T)$, $1 \leqslant i \leqslant k_1$, Choisissons u_i

$$\|[l] - \sum_{1 \leqslant i \leqslant k_1} \alpha_i[C_{\lambda_i}]\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant k_1} |\alpha_i| < 1.$$

unitaire dans $\mathrm{Ker}(T - \lambda_i)$ il vient que $[C_{\lambda_i}] = [u_i \otimes u_i]$ et donc (car on vérifie facilement que, pour $i \neq j$, on a $[u_i \otimes u_j] = 0$) on a:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant k_1} \alpha_i[C_{\lambda_i}] = [x \otimes \bar{x}], \quad \text{avec } x = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k_1} \beta_i u_i,\ \bar{x} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k_1} \bar{\beta}_i u_i,$$

les β_i étant tels que $\beta_i^2 = \alpha_i$; on a donc

$$\|[l] - [x \otimes \bar{x}]\| < 1.$$

Posons $x_1 = x$. La condition a) reste vraie si l'on remplace $\sigma_{\mathrm{if}}(T)$ un sous-ensemble de complémentaire fini dans $\sigma_{\mathrm{if}}(T)$.

Il existe donc, pour $\varepsilon = 1/2$ une suite scalaires $\lambda_{k_1+1}, \ldots, \lambda_{k_2}$ dans $\sigma_{\mathrm{if}}(T) \setminus \{\lambda_i;$ $1 \leqslant i \leqslant k_1\}$, et $\alpha_{k_1+1}, \ldots, \alpha_{k_2}$ avec $\|[l] - \sum_{k_1+1 \leqslant i \leqslant k_2} \alpha_i[C_{\lambda_i}]\| < 1/2$. Pour $u_i \in \mathrm{Ker}(T - \lambda_i)$, $k_1 + 1 \leqslant i \leqslant k_2$, avec $\|u_i\| = 1$ on a $[C_{\lambda_i}] = [u_i \otimes u_i]$. On pose $x_2 = \sum_{k_1+1 \leqslant i \leqslant k_2} \beta_i u_i$, $\bar{x}_2 = \sum_{k_1+1 \leqslant i \leqslant k_2} \bar{\beta}_i u_i$, $\beta_i^2 = \alpha_i$. Ceci implique:

$$\sum_{k_1+1 \leqslant i \leqslant k_2} \alpha_i[C_{\lambda_i}] = [x_2 \otimes \bar{x}_2], \quad \|[l] - [x_2 \otimes \bar{x}_2]\| < 1/2$$

et x_1, x_2 orthogonaux. Par récurrence, on construit une suite orthogonale (x_n) telle que $\|[l] - [x_n \otimes \bar{x}_n]\| < 1/n$, $\forall n \geqslant 1$ et $x_n \in \bigvee\{u_{k_{n-1}}, \ldots, u_{k_n}\}$. On pose $k_0 = 0$. Il reste à prouver que pour tout $w \in H$, $[x_n \otimes \omega] \to 0$ quand n est assez grand. Puisque $x_n = \sum_{k_{n-1}<i\leqslant k_n} \beta_i u_i$ et $\omega = \left(\sum_{k_{n-1}<i\leqslant k_n} \omega_i u_i\right) \oplus \omega'$, $\omega' \in (\bigvee\{u_{k_{n-1}}, \ldots, u_{k_n}\})^\perp$, on a:

$$[x_n \otimes \omega] = \sum_{k_{n-1}\leqslant i\leqslant k_n} \alpha_i u_i \bar{\omega}_i [u_i \otimes u_i]$$

et donc

$$\|[x_n \otimes \omega]\| \leqslant \left(\sum_{k_{n-1}\leqslant i\leqslant k_n} |\alpha_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k_{n-1}\leqslant i\leqslant k_n} |\omega_i^2|\right) \leqslant \left(\sum_{k_{n-1}<i\leqslant k_n} |\omega_i^2|\right) \to 0$$

quand n tend vers l'infini.

3.5. Théorème. *Soit $T \in \mathbf{A}(H)$, sous-normal, $B = S^* \oplus R$ son extension co-isométrique minimale. Alors, il existe un borélien G de $\mathbf{T}$ et un sous-espace réduisant $\mathscr{M}$ pour R tels que:*

α) $R|\mathscr{M}$ soit unitairement équivalent a $M_{e^{it}}$ sur $L^2(G)$.

β) $\overline{\mathrm{aco}}(\{[C_\lambda]_T,\ \lambda \in (\sigma_e(T) \cup \mathscr{F}_-(T)) \cap \mathbf{D}\} \cup \{[l]_T,\ l \in L^1(F),\ \|l\|_1 \leqslant 1\} \cup \{[l]_T,\ l \in L^1(G),\ \|l\|_1 \leqslant 1\})$ coincide avec la boule unité de Q_T, avec $F = \mathrm{NTL}(\sigma_{if}(T))$.

γ) $\overline{\mathrm{aco}}(\{\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)\} \cup \{[l]_T,\ l \in L^1(G),\ \|l\|_1 \leqslant 1\})$ contient la boulé unité de Q_T.

Preuve. Soit $T = T_1 \oplus U$ la décomposition canonique de T, T_1 est c.n.u. et U unitaire. D'après Theorem 1.4 de [12], puisque $T \in \mathbf{A}(H)$, H contient un sous-espace réduisant $\mathscr{M}$ pour U, tel que $R|\mathscr{M}$ soit unitairement équivalent à $M_{e^{it}}$ sur $L^2(\mathbf{T} \setminus \mathrm{NTL}(\sigma(T) \cap \mathbf{D}))$. En posant $G = \mathbf{T} \setminus \mathrm{NTL}(\sigma(T) \cap \mathbf{D})$, on obtient la condition α).

Comme $\sigma(T) \cap \mathbf{D} = (\sigma_e(T) \cup \mathscr{F}_-(T)) \cap \mathbf{D} \cup \sigma_{if}(T)$, on a:

$$G \cup F \cup \mathrm{NTL}(\sigma_-) = \mathbf{T}, \quad \sigma_- = (\sigma_e(T) \cup \mathscr{F}_-(T)) \cap \mathbf{D}.$$

En utilisant les lemmes 3.3 et 3.4, on obtient

$$\overline{\mathrm{aco}}(\{[C_\lambda],\ \lambda \in \sigma_-\} \cup \{[l]_T,\ l \in L^1(F),\ \|l\|_1 \leqslant 1\} \cup \{[l]_T,\ l \in L^1(G),\ \|l\|_1 \leqslant 1\} \supset$$

$$\supset \overline{\mathrm{aco}}\{[l]_T,\ \|l\|_1 \leqslant 1,\ l \in L^1(\mathbf{T})\}$$

qui contient la boule unité de Q_T. D'après b) du lemme 3.4, on a $\{[l]_T;\ l \in L^1(F), \|l\|_1 \leqslant 1\} \subset \mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$; ceci, avec β) et la proposition 3.2, établit γ).

3.6. Corollaire. *Soit T un opérateur sous-normal dans la classe $\mathbf{A}$. Alors $T \in \mathbf{A}_1(6)$.*

Preuve. Il est clair que U (notation de la preuve du théorème 3.5) est une partie de R. On en déduit facilement via le fait (cf. Proposition 2.1) que $m\Sigma$ est une mesure spectrale scalaire pour R que $G \subset \Sigma$. Il en resulte (via le théorème 3.5.γ) que T vérifie des hypothèses du théorème 2.3 avec $\theta = 0$ et $\gamma = 1$.

REMARQUE. D'après [5, Theorem 6.2], notre théorème 2.3 est en fait un critère d'appartenance à la classe $\mathbf{A}_{1,\aleph_0}$ et Theorem 7.3 du même article permet donc retrouve que tout opérateur sous-normal de la classe $\mathbf{A}$ est reflexif, cas particulier mais foundamental du célébre résultat d'Olin et Thomson [10].

Citons un autre exemple qui résulte du théorème 3.5 et qui n'est pas conséquence directe de ([7, Proposition 4.6]):

3.7. COROLLAIRE. *Soit $T \in \mathbf{A}(H)$ tel que $T = T' \oplus U$, avec U unitaire absolument continu et de mesure spectrale scalaire m_Σ, $\Sigma \subset \mathbf{T}$.*

Si $(\sigma_e(T) \cup \mathscr{F}_-(T)) \cap \mathbf{D}$ est dominant dans $\mathbf{T} \setminus \Sigma$ alors $T \in \mathbf{A}_1(6)$.

L'auteur a eu, pendant la préparation de cet article, des discussions fructueuses avec B. Chevreau et C. Pearcy. Il tient à les remercier.

Ce travail terminé, l'auteur a appris que B. Chrevreau a prouvé que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1(\rho)$ (cf. [4]) et que, indépendamment, H. Bercovici a montré que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1(1)$.

NOTE DU 25. 10. 1988. S. Brown et B. Chevreau ont montre que toute contraction de la classe $\mathbf{A}$ est réflexive [14].

REFERENCES

1. BERCOVICI, H.; FOIAŞ, C.; PEARCY, C., *Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory*, C.B.M.S. Regional Conference Series in Maths., **56**, A.M.S., Providence, 1985.
2. BERCOVICI, H.; FOIAŞ, C.; PEARCY, C.; SZ.-NAGY, B., Functional models and extended spectral dominance, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **43**(1981), 243–254.
3. BROWN, A.; PEARCY, C., *Introduction to operator theory. I: Elements of functional analysis*, Springer-Verlag, New York, 1977.
4. CHEVREAU, B., On contraction operators with isometric functional calculus. II, INCREST Preprint Series, **27**(1987), Bucharest.
5. CHEVREAU, B.; EXNER, G.; PEARCY, C., On the structure of contraction operators. III, *Michigan Math. J.*, to appear.
6. CHEVREAU, B.; PEARCY, C., On the structure of contraction operators with applications to invariant subspaces, *J. Funct. Anal.*, **67**(1986), 360–379.
7. CHEVREAU, B.; PEARCY, C., On the structure of contraction operators. I, *J. Funct. Anal.*, **76**(1988), 1–29.
8. CONWAY, J. B., *Subnormal operators*, Pitman, Boston, Mass., 1981.
9. HOFFMAN, K., *Banach spaces of analytic function*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

10. OLIN, R. F.; THOMSON, J. E., Algebras of subnormal operators, *J. Funct. Anal.*, **37**(1980), 271–301.
11. ROBEL, G., On the structure of (BCP)-operators and related algebras. I, *J. Operator Theory*, **12**(1984), 23–45.
12. SULLIVAN, P., Subnormal operators in A, *J. Operator Theory*, **18**(1987), 237–248.
13. SZ.-NAGY, B.; FOIAŞ, C., *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North-Holland, Amsterdam, 1970.
14. BROWN, S.; CHEVREAU, B., Toute contraction à calcul fonctionnel isométrique est réflexive, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **307**(1988), 185–188.

F. ZAROUF
Université de Bordeaux I,
U.E.R. de Mathématiques et Informatique,
351, cours de la Libération,
33405 Talence,
France.

Received July 21, 1987; revised January 5, 1988.