J. OPERATOR THEORY
21(1989), 315-321

SOUS-ESPACES HYPERINVARIANTS D'UN OPÉRATEUR NILPOTENT SUR UN ESPACE DE BANACH

MOHAMED BARRAA

INTRODUCTION

Soient X un espace de Banach, A un opérateur linéaire continu nilpotent sur X et $\mathrm{HLat}\, A$ le treillis des sous-espaces hyperinvariants pour A. Nous présentons dans cet article les principaux résultats obtenus dans une thèse de troisième cycle soutenue à l'Université de Montpellier [1].

Lorsque les images des itérés de A sont fermées, nous démontrons que $\mathrm{HLat}\, A$ coïncide avec le treillis engendré par les images $\mathrm{R}(A^i)$ et les noyaux $\mathrm{N}(A^i)$. Dans le cas où X est de dimension finie, ce résultat a été démontré par P. A. Fillmore, D. A. Herrero et W. E. Longstaff dans [3]. Comme l'a remarqué B. Charles dans [2], ce dernier résultat se rattache à la théorie des modules sur un anneau principal. On peut le déduire du théorème 67.1 du livre de L. Fuchs [4].

Dans le cas général d'un opérateur nilpotent A d'ordre n ($A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$) sur l'espace de Banach X, nous donnons des encadrements des éléments de $\mathrm{HLat}\, A$ par des éléments du treillis engendré par les $\overline{\mathrm{R}}(A^i)$ et les $\mathrm{N}(A^i)$. Cela nous permet de démontrer la conjecture suivante de D. A. Herrero: le sous-espace $\mathrm{N}(A^{n-1})$ est le plus grand sous-espace de $\mathrm{HLat}\, A$ distinct de X et $\overline{\mathrm{R}}(A^{n-1})$ est le plus petit sous--espace de $\mathrm{HLat}\, A$ distinct de $\{0\}$. D. A. Herrero a démontré cette conjecture dans [5] pour $n = 3$ et X espace de Hilbert.

1. RÉSULTATS GÉNÉRAUX

Soient X un espace de Banach, $B(X)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de X dans X et A un opérateur appartenant à $B(X)$ nilpotent d'ordre n ($A^n = 0$, $A^{n-1} \neq 0$). Si $T \in B(X)$, on dénote $\mathrm{N}(T)$ le noyau de T et $\overline{\mathrm{R}}(T)$ l'adhérence de l'image de T. Soient $x \in X$, f une forme linéaire continue sur X et k un entier > 0. On définit une famille d'opérateurs liée à A par (voir [6]):

$$V_{x,f}^{k} = \sum_{s=1}^{k} A^{s-1}(x \otimes f)A^{k-s}.$$

LEMME 1. *Soient $x \in X$ et f une forme linéaire continue sur X.*

(i) *Si $A^k x = 0$ et $f(\mathrm{R}(A^k)) = 0$, alors $V_{x,f}^k$ commute avec A.*

(ii) *Si l'on a $f(A^{k-1}x) = 1$ et $f(A^h x) = 0$ pour $h \neq k-1$, alors $V_{x,f}^k$ est un projecteur.*

Démonstration. (i) On a $V_{x,f}^k A - A V_{x,f}^k = (x \otimes f)A^k - A^k(x \otimes f)$. De $A^k x = 0$ et $f(\mathrm{R}(A^k)) = 0$ résulte alors $V_{x,f}^k\{A\}'$.

(ii) On a $(V_{x,f}^k)^2 = \sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{p=1}^{k}[f(A^{k-p+s-1}x)A^{p-1}x]\otimes f\right)A^{k-s}$. Si donc $f(A^{k-1}x) = 1$ et $f(A^{k-p+s-1}x) = 0$ pour $p \neq s$, alors $V_{x,f}^k$ est un projecteur.

LEMME 2. *Soient $x \in X$ et k entier > 0. Si $x \in \mathrm{N}(A^k)$ avec $A^{k-1}x \notin \overline{\mathrm{R}}(A^k)$ alors $\{A\}'x = \mathrm{N}(A^k)$.*

Démonstration. $\mathrm{N}(A^k)$ est invariant par $\{A\}'$, donc $\{A\}'x \subset \mathrm{N}(A^k)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue f nulle sur $\overline{\mathrm{R}}(A^k)$ et vérifiant:

$$f(A^{k-1}x) = 1 \quad \text{et} \quad f(A^h x) = 0 \quad \text{pour } h \neq k-1.$$

Soit $z \in \mathrm{N}(A^k)$. On a $V_{z,f}^k \in \{A\}'$ et $V_{z,f}^k x = z$, donc $\{A\}'x \supset \mathrm{N}(A^k)$, d'où $\{A\}'x = \mathrm{N}(A^k)$.

REMARQUE. Si $e \in X$ vérifie $A^{n-1}e \neq 0$, alors $\{A\}'e = X = \mathrm{N}(A^n)$, car $A^n = 0$ et $A^{n-1}e \notin \overline{\mathrm{R}}(A^n) = \{0\}$.

LEMME 3. *Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $z \in X$, si $z \notin \mathrm{N}(A^{k-1})$, alors $\{A\}'z \supset \mathrm{R}(A^{n-k})$.*

Démonstration. On obtient par le théorème de Hahn-Banach une forme linéaire continue qui vérifie $f(A^{k-1}z) = 1$ et $f(A^h z) = 0$ pour $h \neq k-1$. Soit $e \in X$ avec $A^{n-1}e \neq 0$, alors $\{A\}'e = X$. On a $V_{e,f}^n \in \{A\}'$ et $V_{e,f}^n z = A^{n-k}e$. Comme $\{A\}'e = X$, alors:

$$\{A\}'z \supset \{A\}'A^{n-k}e = A^{n-k}(\{A\}'e) = A^{n-k}X,$$

d'où $\{A\}'z \supset \mathrm{R}(A^{n-k})$.

LEMME 4. *Soient $A \in B(X)$, $z \in X$, k et l des entiers > 0 avec l strictement inférieur à k. Si $A^l z \notin \overline{\mathrm{R}}(A^k)$ alors:*

$$\{A\}'z \supset \mathrm{R}(A^{k-l-1}) \cap \mathrm{N}(A^{l+1}).$$

Démonstration. Comme $A^l z \notin \overline{\mathrm{R}}(A^k)$, le théorème de Hahn-Banach montre qu'il existe une forme linéaire continue nulle sur $\overline{\mathrm{R}}(A^k)$ et vérifiant $f(A^l z) = 1$ et $f(A^h z) = 0$ pour $h \neq l$. Soit $x \in \mathrm{N}(A^k)$, on a:

$$V^k_{x,f} z = \sum_{s=1}^{k} f(A^{k-s} z) A^{s-1} x = A^{k-l-1} x.$$

Comme x est arbitraire dans $\mathrm{N}(A^k)$ et $V^k_{x,f} \in \{A\}'$, on en déduit $\{A\}'z \supset$ $\supset A^{k-l-1}(\mathrm{N}(A^k))$.

Or

$$A^{k-l-1}(\mathrm{N}(A^k)) = \mathrm{R}(A^{k-l-1}) \cap \mathrm{N}(A^{l+1}),$$

d'où:

$$\{A\}'z \supset \mathrm{R}(A^{k-l-1}) \cap \mathrm{N}(A^{l+1}).$$

REMARQUE. Dans le cas où $l = k - 1$, on retrouve le lemme 2.

LEMMA 5. *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace hyperinvariant de A, alors il existe un entier unique k ($0 \leqslant k \leqslant n$), tel que:*

$$\overline{\mathrm{R}}(A^{n-k}) \subset \mathcal{M} \subset \mathrm{N}(A^k).$$

Démonstration. Pour $\mathcal{M} = \{0\}$, on a $k = 0$, donc supposons $\mathcal{M} \neq \{0\}$. La suite $(\mathrm{N}(A^k) : k = 0, \ldots, n)$ croît strictement de $\mathrm{N}(A^0) = \{0\}$ à $\mathrm{N}(A^n) = X$, donc il existe k entier > 0 unique tel que $\mathcal{M} \subset \mathrm{N}(A^k)$ et $\mathcal{M} \not\subset \mathrm{N}(A^{k-1})$. Soit $z \in \mathcal{M}$ tel que $z \notin \mathrm{N}(A^{k-1})$. D'après le lemme 3 on a $\{A\}'z \supset \mathrm{R}(A^{n-k})$, mais $\mathcal{M} \in \mathrm{HLat}\, A$ est fermé, d'où $\overline{\mathrm{R}}(A^{n-k}) \subset \mathcal{M} \subset \mathrm{N}(A^k)$.

REMARQUE. Ce lemme montre en particulier que $\mathrm{N}(A^{n-1})$ est le plus grand sous-espace hyperinvariant de A, différent de X et que $\overline{\mathrm{R}}(A^{n-1})$ est le plus petit sous-espace hyperinvariant de A, différent de $\{0\}$. En effet: pour tout $\mathcal{M} \in \mathrm{HLat}\, A$, si $\mathcal{M}$ est différent de X, il existe un entier $k \leqslant n - 1$ tel que : $\mathcal{M} \subset \mathrm{N}(A^k) \subseteq \mathrm{N}(A^{n-1})$. Si $\mathcal{M}$ est différent de $\{0\}$, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $\overline{\mathrm{R}}(A^{n-1}) \subset \overline{\mathrm{R}}(A^{n-k}) \subset \mathcal{M}$.

Dans [5] D. A. Herrero a montré ce résultat pour $n = 3$, et le cas général a été conjecturé par ce même auteur.

LEMME 6. *Soient $\mathcal{M} \in \mathrm{HLat}\, A$, différent de $\{0\}$ et k l'unique entier tel que $\overline{\mathrm{R}}(A^{n-k}) \subset \mathcal{M} \subset \mathrm{N}(A^k)$. Alors il existe une suite unique $(h_1, \ldots, h_k)$ d'entiers telle* *que* $0 \leqslant h_1 < \ldots < h_k < n$ *et telle que l'on ait pour tout* i *de* 1 *à* k:

$$A^{i-1}\mathcal{M} \subset \overline{\mathrm{R}}(A^{h_i}) \quad et \quad A^{i-1}\mathcal{M} \not\subset \overline{\mathrm{R}}(A^{h_i+1}).$$

Démonstration. Soit i un entier compris entre 1 et k, $A^{i-1}\mathcal{M}$ est un sous--espace de X. La suite $(\overline{\mathrm{R}}(A^p) : p = 0, 1, \ldots, n)$ est strictement décroissante de $X = \overline{\mathrm{R}}(A^0)$ à $\{0\} = \overline{\mathrm{R}}(A^n)$, donc il existe un entier unique h_i tel que:

$$A^{i-1}\mathcal{M} \subset \overline{\mathrm{R}}(A^{h_i}) \quad \text{et} \quad A^{i-1}\mathcal{M} \not\subset \overline{\mathrm{R}}(A^{h_i+1}).$$

Pour la même raison, il existe un entier unique h_{i+1} tel que:

$$A^{i}\mathcal{M} \subset \overline{\mathrm{R}}(A^{h_{i+1}}) \quad \text{et} \quad A^{i}\mathcal{M} \not\subset \overline{\mathrm{R}}(A^{h_{i+1}+1}).$$

Mais $A^{i-1}\mathcal{M} \subset \overline{\mathrm{R}}(A^{h_i})$ implique $A^{i}\mathcal{M} \subset \overline{\mathrm{R}}(A^{h_i+1})$, donc $h_{i+1} \geqslant h_i + 1$, d'où $0 \leqslant h_1 < \ldots < h_k < n$.

THÉORÈME 7. *Soient* $\mathcal{M} \in \mathrm{HLat}\, A$, *différent de* $\{0\}$ *et* $k, h_1, \ldots, h_k$ *les entiers associés à* $\mathcal{M}$ *par le lemme 6. Alors on a:*

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{N}(A^i) \cap \mathrm{R}(A^{h_i-i+1}) \subset \mathcal{M}.$$

Démonstration. Par le lemme 5, il existe un entier unique k tel que:

$$\overline{\mathrm{R}}(A^{n-k}) \subset \mathcal{M} \subset \mathrm{N}(A^k).$$

Par le lemme 6, il existe k entiers $h_1, \ldots, h_k$ avec $0 \leqslant h_1 < \ldots < h_k < n$ tels que pour tout i de 1 à k, on a:

$$A^{i-1}\mathcal{M} \subset \overline{\mathrm{R}}(A^{h_i}) \quad \text{et} \quad A^{i-1}\mathcal{M} \not\subset \overline{\mathrm{R}}(A^{h_i+1}).$$

Soit $z_i \in \mathcal{M}$ avec $A^{i-1}z_i \notin \overline{\mathrm{R}}(A^{h_i+1})$, alors d'après le lemme 4, on a:

$$\mathcal{M} \supset \{A\}' \cdot z_i \supset \mathrm{R}(A^{h_i-i+1}) \cap \mathrm{N}(A^i).$$

Comme $\mathcal{M}$ est un sous-espace de X, on a:

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{R}(A^{h_i-i+1}) \cap \mathrm{N}(A^i) \subset \mathcal{M}.$$

REMARQUE. Dans ce théorème, il s'agit d'une somme algébrique qu'on pourrait remplacer si on veut par une somme topologique puisque $\mathcal{M}$ est un sous--espace fermé de X.

COROLLAIRE 8. *Si $\mathcal{M} \in \mathrm{HLat}\, A$, alors il existe un entier $h \geqslant 0$ unique tel que:*

$$\overline{\mathrm{R}(A^h) \cap \mathrm{N}(A)} \subset \mathcal{M} \cap \mathrm{N}(A) \subset \overline{\mathrm{R}}(A^h) \cap \mathrm{N}(A).$$

Démonstration. $\mathcal{M} \cap \mathrm{N}(A) \in \mathrm{HLat}\, A$, si $\mathcal{M}$ est différent de $\{0\}$, on a $\overline{\mathrm{R}}(A^{n-1}) \subset \subset \mathcal{M} \cap \mathrm{N}(A) \subset \mathrm{N}(A)$. D'après le théorème 7, il existe un entier h tel que:

$$\mathcal{M} \cap \mathrm{N}(A) \subset \overline{\mathrm{R}}(A^h) \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \cap \mathrm{N}(A) \not\subset \overline{\mathrm{R}}(A^{h+1}).$$

Donc

$$\mathrm{R}(A^h) \cap \mathrm{N}(A) \subset \mathcal{M} \cap \mathrm{N}(A) \subset \overline{\mathrm{R}}(A^h) \cap \mathrm{N}(A).$$

Comme $\mathcal{M} \cap \mathrm{N}(A)$ est fermé, on en déduit le résultat voulu.

LEMME 9. *Soient p un entier > 0 et h un entier supérieur ou égal à p. Alors*

$$(A^{p-1})^{-1}(\mathrm{R}(A^h)) = \mathrm{N}(A^{p-1}) + \mathrm{R}(A^{h-p+1}).$$

Démonstration. Soit $v \in (A^{p-1})^{-1}(\mathrm{R}(A^h))$, il existe $z \in X$ tel que $A^h z = A^{p-1}v$, donc $A^{p-1}(v - A^{h-p+1}z) = 0$, d'où $v \in \mathrm{N}(A^{p-1}) + \mathrm{R}(A^{h-p+1})$. La réciproque est immédiate, donc

$$(A^{p-1})^{-1}(\mathrm{R}(A^h)) = \mathrm{N}(A^{p-1}) + \mathrm{R}(A^{h-p+1}).$$

2. OPÉRATEURS NILPOTENTS DONT LES IMAGES DES ITÉRÉS SONT FERMÉES

THÉORÈME 10. *Soient $A \in B(X)$ nilpotent d'ordre n avec les images $\mathrm{R}(A^j)$ qui sont fermées pour $j = 1, 2, \ldots, n$. $\mathcal{M} \in \mathrm{HLat}\, A$, différent de $\{0\}$ et $k, h_1, \ldots, h_k$ les entiers associés à $\mathcal{M}$ par les lemmes 5 et 6. Alors:*

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{N}(A^i) \cap \mathrm{R}(A^{h_i - i+1}).$$

Démonstration. D'après le théorème 7 on a:

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{N}(A^i) \cap \mathrm{R}(A^{h_i - i+1}) \subset \mathcal{M}.$$

D'après le lemme 6, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, on a $A^{i-1}\mathcal{M} \subset \bar{R}(A^{h_i}) = R(A^{h_i})$. Par le lemme 9, $\mathcal{M} \subset (A^{i-1})^{-1}(R(A^{h_i}))$ et

$$(A^{i-1})^{-1}(R(A^{h_i})) = N(A^{i-1}) + R(A^{h_i-i+1}),$$

d'où

$$\mathcal{M} \subset \bigcap_{i=1}^{k} [N(A^{i-1}) + R(A^{h_i-i+1})] \cap N(A^k).$$

Pour tout $q \in \{1, \ldots, k\}$ on pose

$$J_q = \bigcap_{i=1}^{q} [N(A^{i-1}) + R(A^{h_i-i+1})].$$

On rappelle que le treillis des sous-espaces de X (pour l'intersection et la somme algébrique) est modulaire, c'est-à-dire si E_1, E_2 et E_3 sont trois sous-espaces de X, alors on a:

$$E_1 \supset E_2 \quad \text{implique } E_1 \cap (E_2 + E_3) = E_2 + (E_1 \cap E_3).$$

En utilisant cette propriété avec

$$E_1 = N(A^q) + R(A^{h_{q+1}-q}),$$

$$E_2 = \sum_{j=1}^{q-1} N(A^j) \cap R(A^{h_j-j+1})$$

et

$$E_3 = R(A^{h_q-q+1}),$$

et en raisonnant par récurrence sur q, on montre que:

$$J_{q+1} = \sum_{j=1}^{q} N(A^j) \cap R(A^{h_j-j+1}) + R(A^{h_{q+1}-q}).$$

On en déduit que:

$$\mathcal{M} \subset J_k \cap N(A^k).$$

Par la propriété de modularité on a:

$$\mathcal{M} \subset \sum_{j=1}^{k} N(A^j) \cap R(A^{h_j-j+1}).$$

En définitive:

$$\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{N}(A^j) \cap \mathrm{R}(A^{h_j - j + 1}).$$

Je tiens à remercier vivement le professeur B. Charles pour son aide efficace, ainsi que le professeur C. M. Pearcy pour les remarques et les suggestions qui m'ont permis l'achévement de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

1. BARRAA, M., *Le treillis des sous-espaces hyperinvariants d'un opérateur nilpotent sur un espace de Banach*, thèse de 3ème cycle, Université de Montpellier, juillet 1987 (texte multigraphié).
2. CHARLES, B., Opérateurs linéaires sur un espace de Banach et modules sur un anneau principal, *Sympos. Math.*, XIII(1979), 121–143.
3. FILLMORE, P. A.; HERRERO, D. A.; LONGSTAFF, W. E., The hyperinvariant subspace lattice of a linear transformation, *Linear Algebra Appl.*, **17**(1977), 125–132.
4. FUCHS, L., *Infinite abelian groups*, Academic Press, New York and London, 1970.
5. HERRERO, D. A., Quasisimilarity does not preserve the hyperlattice, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **65**(1978), 80–84.
6. RUSTON, A. R., A note on the Caradus class $\mathcal{F}$ of bounded linear operators on a complex Banach space, *Canad. J. Math.*, **21**(1969), 592–594.

MOHAMED BARRAA
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences de Marrakech,
B.P.S. 15, Marrakech,
Maroc.

Received August 20, 1987; revised June 26, 1988.