J. OPERATOR THEORY
21(1989), 387–396

RYTHME DE DECROISSANCE DES ITÉRÉS DE CERTAINS OPÉRATEURS DE L'ESPACE DE HILBERT

J. ESTERLE et F. ZOUAKIA

1. INTRODUCTION

On s'intéresse ici au rythme de décroissance de la suite $(\|(T-1)^n x\|)_n$ où $T \in \mathscr{L}(E)$ est un opérateur borné et x un élément de E tel que $Tx \neq x$. Si E est un espace de Banach réflexif à dual séparable il est facile de voir (proposition 2.1) que si $T \in \mathscr{L}(E)$ est injectif alors il existe une suite (α_n) telle que $\dfrac{\|T^n x\|}{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ pour tout $x \neq 0$. En utilisant le théorème de Mittag-Leffler comme dans [1] on peut voir également que si $\mathscr{A}$ est une algèbre de Banach et si $a \in \mathscr{A}$ vérifie $a \in [\mathscr{A}a^2]^-$ alors il existe une suite (λ_n) telle que $\dfrac{\|\varphi(a^n)\cdot x\|}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ pour toute représentation continue φ de $\mathscr{A}$ sur un espace de Banach E et pour tout $x \in E$ tel que $\varphi(a)\cdot x \neq 0$. On obtient ici des résultats beaucoup plus précis pour la suite $(\|(T-1)^n x\|)_n$ où T est une contraction de l'espace de Hilbert. On montre notamment (théorème 4.1) que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\|(T-1)^n x\|}{\|(T-1)^{n-1}x\|}$ est divergente pour tout $x \in H$ tel que $Tx \neq x$. Ce résultat, évident si $1 \notin \operatorname{Sp} T$, semble présenter un certain intérêt dans le cas où $T-1$ est quasinilpotent. On montre également que si $Tx \neq x$ alors $\liminf u_n \|(T-1)^n x\| > 0$ pour toute suite (u_n) de réels positifs telle que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_{n-1}}{u_n}$ converge. La démonstration utilise une étude précise du rythme de croissance des quotients $w_n = \left\| \dfrac{f}{(\alpha-1)^n} \right\|$ où f est un élément de l'algèbre du disque divisible par $(\alpha-1)^n$ pour tout n, où α est la fonction $z \to z$. On montre, en utilisant le théorème de Denjoy-Carleman, que les séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{w_{n-1}}{w_n}$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n^{-1/n}$ sont convergentes. Ce résultat est le meilleur possible car on montre également que si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}$ converge il existe $f \in \in \bigcap_{n \geqslant 1} (\alpha - 1)^n \mathscr{A}(\mathbf{D})$ telle que $\left\| \frac{f}{(\alpha - 1)^n} \right\| \leqslant u_n$ pour tout n avec $f \neq 0$.

B. Beauzamy donne dans [4] des résultats intéressants sur la suite $(T^n x)$, où $T \in \mathscr{L}(H)$ d'un point de vue très différent du nôtre.

L'étude de la décroissance de la suite $(\|(T - 1)^n x\|)_n$ où T est une contraction sur un espace de Banach est susceptible de donner des résultats concernant le problème du sous-espace invariant [2], [4], [5], [6], [7], [8], [9] et [11]. On sait en effet [2], [8] que si $\|(T - 1)^n x\|^{1/n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $Tx \neq x$ alors la contraction T possède un sous-espace hyperinvariant non trivial. En utilisant la méthode développée dans la démonstration de [8, Theorem 9.12] on peut montrer que si T est une contraction sur un espace de Banach E et si $Tx \neq x$ pour $x \in E$ alors $\limsup n \|(T - 1)^n x\|^{1/n} > 0$. Ce point sera développé dans un article ultérieur.

Le second auteur tient à remercier le ministère de la coopération français qui lui a permis de venir préparer ce travail à Bordeaux dans le cadre de l'action intégrée Bordeaux I — ENS Takaddoum (Maroc) et remercie vivement le Professeur H. G. Dales qui l'a invité et lui a permis de discuter ce travail au semestre sur la continuité automatique et les algèbres de Banach radicales organisé par l'université de Leeds en 1987.

2. RESULTATS GENERAUX SUR LES RYTHMES DE DECROISSANCE

PROPOSITION 2.1. *Si E est un espace de Banach réflexif à dual séparable et $T \in \mathscr{L}(E)$ est injectif alors il existe une suite (α_n) de nombre réels strictement positifs telle que*

$$\frac{\|T^n x\|}{\alpha_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

Preuve. Soit $(y_n)_{n \geqslant 1}$ une suite dense dans le dual de E.

Posons pour n, m, $p \geqslant 1$,

$$\lambda_{n,m,p} = \inf \left\{ \|T^n x\| \Big/ |\langle x, y_m \rangle| \geqslant \frac{1}{p} \text{ et } \|x\| \leqslant 1 \right\}.$$

Si $\lambda_{n,m,p} = 0$ alors il existe (x_q) suite de E telle que

$$|\langle x_q, y_m \rangle| \geqslant \frac{1}{p}, \quad \|x_q\| \leqslant 1 \text{ et } \|T^n x_q\| \to 0 \quad (q \to \infty).$$

Puisque E est réflexif, on peut extraire de cette suite une sous-suite, qu'on notera encore (x_q), faiblement convergente vers un élément a de E, lequel est non nul car $|\langle a, y_m\rangle| \geqslant 1/p$. La suite $(T^n x_q)_q$ converge faiblement vers $T^n a$, donc $T^n a = 0$ ce qui contredit le fait T injectif. On a donc $\lambda_{n,m,p} > 0$ pour tout m, p. Si $\|x\| = 1$ alors il existe $m, p \geqslant 1$ tels que $|\langle x, y_m\rangle| \geqslant 1/p$ et $\|T^n x\| \geqslant \lambda_{n,m,p}$ pour tout $n \geqslant 1$. Un résultat classique sur les suites nous permet de trouver une suite (α_n) de nombres réels strictement positifs telle que $\alpha_n = o(\lambda_{n,m,p})$ pour tout m, p et on a

$$\frac{\|T^n x\|}{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

PROPOSITION 2.2. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach non unitaire. Si $a \in \mathscr{A}$ est tel que $a \in [\mathscr{A}a^2]^-$, alors il existe une suite (α_n) de nombres réels strictement positifs telle que $\dfrac{\|\varphi(a^n)\cdot x\|}{\lambda_n} \to \infty$ $(n \to \infty)$, pour toute représentation continue $\varphi : \mathscr{A} \to$ $\to \mathscr{L}(E)$, E espace de Banach, et tout $x \in E$ tel que $\varphi(a)\cdot x \neq 0$.*

Preuve. Nous pouvons nous ramener au cas où $\mathscr{A}$ est séparable. Soit $(f_p)_{p\geqslant 1}$ une suite partout dense dans $\mathscr{A}a$. En utilisant le théorème de Mittag-Leffler [3] comme dans [1] on obtient que $[\bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{A}a^n]^- = [\mathscr{A}a]^-$. Pour tout $p, q \geqslant 1$, il existe $u_{p,q} \in \bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{A}a^n$ tel que $\|u_{p,q} - f_p\| < 1/q$.

L'ensemble $\{u_{p,q}\}_{p,q\geqslant 1}$ est dénombrable. Après renumérotage, posons $(b_m)_{m\geqslant 1} = \{u_{p,q}\}_{p,q\geqslant 1}$. On a $a \in [\bigcup_m \mathscr{A}b_m]^-$. Pour tout n et tout m, il existe $b_{m,n} \in \mathscr{A}$ tel que $b_m = b_{m,n}a^n$ et alors

$$\|\varphi(b_m)\cdot x\| \leqslant \|\varphi\|\ \|b_{m,n}\|\ \|\varphi(a^n)\cdot x\|.$$

Il existe $m_0 \geqslant 1$ tel que $\varphi(b_{m_0})\cdot x \neq 0$ car sinon on aurait $\varphi(a)\cdot x = 0$. Donc on a

$$\frac{\|\varphi(a^n)\cdot x\|}{K_{m_0}} \geqslant \frac{1}{\|b_{m_0,n}\|} \quad \text{avec} \quad K_{m_0} = \frac{\|\varphi(b_{m_0})\cdot x\|}{\|\varphi\|}.$$

On peut trouver une suite à termes positifs telle que $\lambda_n = o\left(\dfrac{1}{\|b_{m_0,n}\|}\right)$ et donc $\dfrac{\|\varphi(a^n)\cdot x\|}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$

REMARQUES 2.3. Si $\mathscr{A}$ est une algèbre de Banach et si $a, b \in \mathscr{A}$ sont tels que $b \in \bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{A}a^n$ alors pour toute représentation continue $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(E)$ où E est un espace de Banach et pour tout $x \in E$ tel que $\varphi(b) \cdot x \neq 0$, il existe $K > 0$ telle que $\|\varphi(a^n) \cdot x\| \geqslant \dfrac{K}{\|b_n\|}$ où $b = b_n a^n$ $(n \geqslant 1)$.

En effet pour tout $n \geqslant 1$, $b = b_n a^n$ avec $b_n \in \mathscr{A}$ et

$$\|\varphi(b) \cdot x\| \leqslant \|\varphi\| \; \|b_n\| \; \|\varphi(a^n) \cdot x\|.$$

En posant $K = \dfrac{\|\varphi(b) \cdot x\|}{\|\varphi\|}$ on a $K \neq 0$ et K vérifie la condition demandée. On peut évidemment remplacer la condition $\varphi(b) \cdot x \neq 0$ par la condition $\varphi(a) \cdot x \neq 0$ si $a \in [\mathscr{A}b]^-$.

3. RYTHME DE CROISSANCE DE CERTAINS QUOTIENTS D'ÉLÉMENTS DE L'ALGÈBRE DU DISQUE

Dans ce qui suit on note $\mathscr{A}(\mathbf{D})$ l'algèbre du disque, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions continues pour $|z| \leqslant 1$, holomorphes pour $|z| < 1$. On note α la fonction $z \to z$. On pose $\mathscr{M}_1 = \{f \in \mathscr{A}(\mathbf{D}) / f(1) = 0\}$. On note $\mathscr{A}_0(\overline{\Pi})$ l'ensemble des fonctions f analytiques pour $\operatorname{Re} z > 0$, continues pour $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ et vérifiant $|f(z)| \xrightarrow[|z| \to \infty]{} 0$.

Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. 1°) *Si* $f \in \bigcap_{n \geqslant 1} (\alpha - 1)^n \mathscr{A}(\mathbf{D})$ *alors les séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\| \dfrac{f}{(\alpha - 1)^{n-1}} \right\|}{\left\| \dfrac{f}{(\alpha - 1)^n} \right\|} \quad et \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{f}{(\alpha - 1)^n} \right\|^{-1/n}$$

sont convergentes.

2°) *Si* $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est une suite de nombres réels strictement positifs telle que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_{n-1}}{u_n}$ *est convergente alors il existe* $f \in \bigcap_{n \geqslant 1} (\alpha - 1)^n \mathscr{A}(\mathbf{D})$ *tel que* $[f\mathscr{M}_1]^- = \mathscr{M}_1$ *et* $\left\| \dfrac{f}{(\alpha - 1)^n} \right\| \leqslant u_n$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$.

Preuve. Montrons d'abord la première assertion du théorème.

On sait que la transformation conforme $z \to \dfrac{1+z}{1-z}$ entre le disque unité ouvert $\mathbf{D}$ et le demi-plan $\Pi = \{t \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} t > 0\}$ induit un isomorphisme isométrique Θ entre $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{A}_0(\overline{\Pi})$.

Soit $f \in \bigcap_{n \geqslant 1} (\alpha - 1)^n \mathscr{A}(\mathbf{D})$ et soit $F = \Theta(f)$.

Soit $\beta : z \to \dfrac{2}{z+1}$. Alors $\beta = \Theta(\alpha - 1)$.

Posons $v_n = \dfrac{2^n}{\|f\|} \left\| \dfrac{f}{(\alpha - 1)^n} \right\|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $\mathscr{A}(\mathbf{D})$ est une algèbre uniforme on a pour tout $n \geqslant 1$,

(1) $$v_n^2 \leqslant v_{n-1} \cdot v_{n+1} \cdot$$

Soit $\varphi : \mathbf{R} \xrightarrow[y \to -\operatorname{Log}|F(iy)|]{} \mathbf{R}$. On a $\varphi(y) \xrightarrow[|y| \to \infty]{} \infty$.

D'après [10, pages 132—133] on a $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{|\operatorname{Log}|F(iy)||}{1+y^2} \mathrm{d}y < +\infty$ donc on obtient aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\varphi(y)|}{1+y^2} \mathrm{d}y < +\infty$.

On a

$$v_n = \frac{2^n}{\|f\|} \left\| \frac{f}{(\alpha-1)^n} \right\| = \|F(\alpha+1)\| \times \frac{1}{\|F\|} =$$

$$= \frac{1}{\|F\|} \sup_{y \in \mathbf{R}} |F(iy)(iy+1)^n| \geqslant \frac{1}{\|F\|} y^n \mathrm{e}^{-\varphi(y)}$$

pour tout $y \geqslant 0$.

En posant $q(y) = \sup_n \dfrac{y^n}{v_n}$ on a donc $0 \leqslant \log q(y) \leqslant \varphi(y) + \log \|F\|$ pour tout $y \geqslant 0$ et alors

(2) $$\int_0^{+\infty} \frac{\log q(y)}{1+y^2} \mathrm{d}y < +\infty.$$

(1) et (2) entrainent, d'après le théorème de Denjoy-Carleman [12, page 376] que les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{n-1}}{v_n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-1/n}$ sont convergentes. Donc les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\| \dfrac{f}{(\alpha-1)^{n-1}} \right\|}{\left\| \dfrac{f}{(\alpha-1)^n} \right\|} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{f}{(\alpha-1)^n} \right\|^{-1/n}$$

sont convergentes, ce qui prouve la première assertion du théorème.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telles que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}$ soit convergente. Il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à termes strictement positifs telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{\alpha_n u_n}$ soit convergente et $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Posons

$$v_n = \frac{u_{n-1}}{\alpha_n u_n} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \frac{u_{n-1}}{u_n}.$$

Remarquons que pour tout $z \in \bar{\mathbf{D}}$ on a $\operatorname{Re} z - 1 \leqslant 0$ donc $\operatorname{Re} z - 1 - \varepsilon_n \leqslant \leqslant \inf(\operatorname{Re} z - 1, -\varepsilon_n)$ et par conséquent $\frac{1}{|z-1-\varepsilon_n|} \leqslant \inf\left(\frac{1}{\varepsilon_n}, \frac{1}{|z-1|}\right)$. Il en résulte que $\left|\frac{z-1}{z-1-\varepsilon_n} - 1\right| \leqslant v_n$ pour tout $z \in \bar{\mathbf{D}} \setminus B(1, \alpha_n)$.

Donc $\prod_{n=k}^{\infty}\left(\frac{z-1}{z-1-\varepsilon_n}\right)$ converge uniformément sur tout compact de $\bar{\mathbf{D}} \setminus \{1\}$, pour tout $k \geqslant 1$. Posons $g(z) = u_0 \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-1}{z-1-\varepsilon_n}\right)$; g est analytique sur $\mathbf{D}$ et continue sur $\bar{\mathbf{D}}\setminus\{1\}$. Soit $(z_k)_k$ une suite de $\bar{\mathbf{D}}$ telle que $z_k \to 1$ $(k \to \infty)$. Alors

$$|g(z_k)| = u_0 \left|\frac{{}_k - 1}{z_k - 1 - \varepsilon_1}\right| \prod_{n>1} \left|\frac{z_k - 1}{z_k - 1 - \varepsilon_n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant u_0 \left|\frac{z_k - 1}{z_k - 1 - \varepsilon_1}\right| \leqslant \frac{u_0}{\varepsilon_1} |z_k - 1|.$$

Posons $g(1) = 0$ on a alors $g \in \mathscr{A}(\mathbf{D})$.

On a aussi pour $z \in \bar{\mathbf{D}}\setminus\{1\}$, $n \geqslant 0$,

$$\left|\frac{g(z)}{(z-1)^n}\right| = u_0 \frac{1}{|z-1-\varepsilon_1|} \times \ldots \times \frac{1}{|z-1-\varepsilon_n|} \times$$

$$\times \frac{|z-1|}{|z-1-\varepsilon_{n+1}|} \times \prod_{k\geqslant n+2} \frac{|z-1|}{|z-1-\varepsilon_k|} \leqslant u_0 \frac{|z-1|}{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n+1}}.$$

Ceci entraine que $\frac{g}{(\alpha-1)^n} \in \mathscr{M}_1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $g \in \bigcap_n (\alpha-1)^n \mathscr{A}(\mathbf{D})$.

On a également $\left|\frac{g(z)}{(z-1)^n}\right| \leqslant \frac{u_0}{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} = u_n$ pour tout $z \in \bar{\mathbf{D}}$ donc $\left\|\frac{g}{(\alpha-1)^n}\right\| \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Le théorème de factorisation [10, page 69] nous donne pour tout n, $g = I_n F_n(\alpha - 1)^n$ où I_n est une fonction intérieure et $F_n \in \mathscr{A}(\mathbf{D})$ une fonction extérieure. Or $g = I_0 F_0$ et l'unicité de la décomposition de g entraine $F_0 = F_n(\alpha - 1)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La théorie de Beurling-Rudin [10] entraine que $[F_0 \mathscr{M}_1]^- = \mathscr{M}_1$ car F_0 est extérieure ne s'annulant qu'en 1 puisque g ne s'annule qu'en 1.

On a aussi $\left\| \frac{F_0}{(\alpha - 1)^n} \right\| = \|F_n\| = \|I_n F_n\| = \left\| \frac{g}{(\alpha - 1)^n} \right\| \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La fonction F_0 vérifie donc les conditions demandées, ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 3.2. *Pour tout* $f \in \bigcap_{n \geqslant 1} (\alpha - 1)^n \mathscr{A}(\mathbf{D})$ *on a*

$$n \left\| \frac{f}{(\alpha - 1)^n} \right\|^{-1/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Preuve. Posons comme plus haut $v_n = \frac{2^n}{\|f\|} \left\| \frac{f}{(\alpha - 1)^n} \right\|$. On a vu que $v_n^2 \leqslant v_{n-1} v_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$, donc la suite $\frac{v_{n-1}}{v_n}$ est décroissante donc la suite

$$u_n = \frac{\left\| \frac{f}{(\alpha - 1)^{n-1}} \right\|}{\left\| \frac{f}{(\alpha - 1)^n} \right\|}$$

est décroissante. Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente, on a d'après un résultat élémentaire bien connu $n u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on a $u_n = \frac{w_{n-1}}{w_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$ avec $w_n = \left\| \frac{f}{(\alpha - 1)^n} \right\|$.

Donc

$$\frac{w_{n_0}}{w_n} \leqslant \frac{\varepsilon^{n - n_0}}{(n_0 + 1) \dots (n - 1)^n} = \frac{\varepsilon^{n - n_0}}{\left(\frac{n!}{n_0!} \right)}.$$

En utilisant la formule de Stirling on obtient:

$$\limsup n w_n^{-1/n} \leqslant \varepsilon \quad \text{donc} \quad n w_n^{-1/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

REMARQUE 3.3. On peut vérifier directement que la suite $n \left\| \frac{f}{(\alpha - 1)} \right\|^{-1/n}$ est bornée. En effet si $f \in \bigcap_{n \geqslant 1} (\alpha - 1)^n \mathscr{A}(\mathbf{D})$ on peut toujours supposer que f engendre un idéal principal dense dans $\mathscr{M}_1$, en utilisant le théorème de factorisation dans $\mathscr{A}(\mathbf{D})$ comme on l'a fait précédement.

Soit F la fonction définie pour tout $z \in \bar{\mathbf{D}} \setminus \{1\}$ par $F(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$; alors $F \notin \mathscr{A}(\mathbf{D})$, mais F est une fonction intérieure continue sur $\bar{\mathbf{D}} \setminus \{1\}$ est bornée par 1.

Pour toute fonction g de la forme $g = Fh$ où $h \in \mathscr{M}_1$, on pose $g(1) = 0$. On obtient ainsi un prolongement continu de g à $\bar{\mathbf{D}}$ puisque F est bornée par 1 sur $\bar{\mathbf{D}} \setminus \{1\}$. Posons $I = F\mathscr{M}_1$; alors I est un idéal de $\mathscr{A}(\mathbf{D})$ contenu dans $\mathscr{M}_1$ et $I \neq \mathscr{M}_1$. Soit $\pi : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_1/I$ la surjection canonique. Comme f engendre un idéal principal dense dans $\mathscr{M}_1$ on a $\pi(f) \neq 0$. On a aussi

$$\left\| \frac{f}{(\alpha-1)^n} \right\| \|\pi[(\alpha-1)^n]\| \geqslant \left\| \frac{\pi(f)}{\pi[(\alpha-1)^n]} \right\| \|\pi[(\alpha-1)^n]\| \geqslant \|\pi(f)\|.$$

D'où

$$\left\| \frac{f}{(\alpha-1)^n} \right\|^{-1/n} \leqslant \|\pi(f)\|^{-1/n} \|\pi[(\alpha-1)^n]\|^{1/n}.$$

Soit $\mathscr{I} = \Theta(I)$ où Θ est l'isomorphisme isométrique entre $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{A}_0(\bar{\Pi})$ utilisé dans la démonstration du théorème 3.1. Nous savons que:

$$\pi_0'\mathscr{L} : L^1([0,1]) \to \mathscr{A}_0(\bar{\Pi})/\mathscr{I}$$

est un homomorphisme d'algèbre tel que $\|\pi_0'\mathscr{L}\| \leqslant 1$, $\mathscr{L}$ désignant la transformée de Laplace et π' la surjection canonique de $\mathscr{A}_0(\bar{\Pi})$ sur $\mathscr{A}_0(\bar{\Pi})/\mathscr{I}$.

Considérons $u : x \to \mathrm{e}^{-x}$ et $v_n = u^n|[0,1]$.

En utilisant l'isométrie Θ on a:

$$\|\pi[(\alpha-1)^n]\| = 2^n\|\pi_0'\mathscr{L}(u^n)\| = 2^n\|\pi_0'\mathscr{L}(v_n)\| \leqslant 2^n \int_0^1 v_n(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2^n}{(n-1)!} \int_0^1 x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{2^n}{n!}.$$

D'où

$$\left\| \frac{f}{(\alpha-1)^n} \right\|^{-1/n} \leqslant 2 \frac{(n!)^{-1/n}}{\|\pi(f)\|^{1/n}}$$

et $n\left\| \frac{f}{(\alpha-1)^n} \right\|^{-1/n}$ est une suite bornée.

4. RYTHME DE DÉCROISSANCE DES ITÉRÉS DE CERTAINS OPÉRATEURS DE L'ESPACE DE HILBERT

THÉORÈME 4.1. *Soit H un espace de Hilbert, et soit T une contraction sur H et $x \in H$ tel que $Tx \neq x$. On a les propriétés suivantes:*

1°) *Pour toute suite (u_n) de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}$ soit convergente, il existe $\lambda > 0$ tel que $\|(T-1)^n x\| \geqslant \frac{\lambda}{u_n}$ pour tout n.*

2°) *La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|(T-1)^n x\|}{\|(T-1)^{n-1}x\|}$ est divergente.*

Preuve. D'après l'inégalité de von Neumann [13], il existe un homomorphisme contractant $\varphi : \mathscr{A}(\mathbf{D}) \to \mathscr{L}(H)$ tel que $\varphi(\alpha) = T$ et $\varphi(1) = 1_H$ (si T est absolument continue on peut étendre φ à H^∞ par le calcul fonctionnel de Sz.-Nagy—Foiaş [13]). La première assertion du théorème découle alors de la remarque 2.3 et de la deuxième assertion du théorème 3.1.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|(T-1)^n x\|}{\|(T-1)^{n-1}x\|}$ était convergente on pourrait alors trouver une suite (β_n) de nombres positifs convergeant vers zéro telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|(T-1)^n x\|}{\beta_n \|(T-1)^{n-1}x\|}$ soit convergente. Posons $\alpha_n = \frac{1}{\beta_1 \ldots \beta_n}$ $(n \geqslant 1)$. D'après la première assertion du théorème, il existe $\lambda > 0$ tel que $\|(T-1)^n x\| \geqslant \lambda \|(T-1)^n x\| \, \alpha_n$.

Comme $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, ceci est absurde et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

1. ALLAN, G. R., Elements of finite closed descent in Banach algebra, *J. London. Math. Soc. (2)*, 7(1973), 462—466.
2. ATZMON, A., Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces, *Acta Math.*, **144**(1980), 27—63.
3. BOURBAKI, N., *Topologie générale*, Act. Sci. Ind. Hermann, Paris, 1971.
4. BEAUZAMY, B., The orbits of a linear operator, preprint.
5. BEAUZAMY, B., Un opérateur sans sous-espace invariant, simplification de l'exemple de P. Enflo, *Integral Equations Operator Theory*, 8(1985), 314—384.
6. BROWN, S.; CHEVREAU, B.; PEARCY, C., Contractions with rich spectrum have invariant subspaces, *J. Operator Theory*, **1**(1979), 123—126.
7. ENFLO, P., *On the invariant subspace problem in Banach spaces*, Mittag-Leffler Institut Publications.
8. ESTERLE, J., Quasimultipliers, representations of H^∞, and the closed ideal problem, in *Lect. Notes in Math.*, 975(1983), pp. 66—162.

9. Foiaş, C.; Pearcy, C. M.; Sz.-Nagy, B., Contractions with spectral radius one and invariant subspaces, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 43(1981), 273—280.
10. Hoffman, K., *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.
11. Read, C., A solution to the invariant subspace problem, *Bull. London Math. Soc.*, **16**(1984), 337—401.
12. Rudin, W., *Real and complex analysis*, McGraw Hill, New York, 1966.
13. Sz.-Nagy, B.; Foiaş, C., *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Akademiai Kiadó, Budapest, 1967.

J. ESTERLE
Université de Bordeaux I,
UER de Mathématiques,
351, cours de la Libération,
33405 Talence,
France.

F. ZOUAKIA
ENS Takaddoum,
B. P. 5118, Rabat,
Maroc.

Received May 1, 1988.