J. OPERATOR THEORY
22(1989), 369–395

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ С ДИССИПАТИВНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

М. Г. КРЕЙН, А. А. НУДЕЛЬМАН

ВВЕДЕНИЕ

В этой работе рассматривается неоднородная струна S, натянутая горизонтально единичной силой между точками $x = a$ и $x = b$ с распределением массы $M(x)$. Правый конец b струны S называется регулярным, если $b < \infty$ и в некоторой левой полуокрестности $(b - \varepsilon, b)$ масса $\int_{b-\varepsilon}^{b} \mathrm{d}M(x)$ конечна. Аналогично определяется регулярность левого конца a $\left(a > -\infty, \int_{a}^{a+\varepsilon} \mathrm{d}M(x) < \infty\right)$. Струна называется *регулярной*, если регулярны оба ее конца a и b. Таким образом, струна регулярна, если конечны ее полная масса и длина.

Через $\mathfrak{S}$ будем обозначать множество всех струн, у которых регулярен правый конец b и конечен статический момент

$$\int_{a}^{b} (b - x)\mathrm{d}M(x) \tag{0.1}$$

относительно этого конца.

Легко видеть, что струна $S \in \mathfrak{S}$ имеет конечную массу $\int_{a}^{b} \mathrm{d}M(x)$.

Действительно, масса участка $(b - \varepsilon, b)$ конечна по определению; масса участка $[a, b - \varepsilon]$ конечна ввиду того, что

$$\int_{a}^{b-\varepsilon} \mathrm{d}M(x) \leqslant \varepsilon^{-1} \int_{a}^{b-\varepsilon} (b - x)\mathrm{d}M(x) \leqslant \varepsilon^{-1}\int_{a}^{b}(b - x)\mathrm{d}M(x) < \infty.$$

Таким образом, если струна $S \in \mathfrak{S}$ имеет конечную длину, то эта струна регулярна, но для $S \in \mathfrak{S}$ не исключается возможность бесконечной длины. В этом случае $a = -\infty$. Удобно считать, что $M(a)=0$ и доопределить $M(x)$ на всю числовую ось, условившись, что $M(x) = M(b)$ при $x > b$ и (при $a > -\infty$) $M(x) = 0$ при $x < a$.

Будем предполагать, что оба конца струны S скреплены с безмассовыми колечками, скользящими по вертикальным проволокам, причем левый конец скользит без трения, а правый — при наличии вязкого трения, то есть трения, пропорционального скорости с коэффициентом трения ν (без ограничения общности можно считать, что $\nu = 1$).

Амплитудные функции свободных колебаний такой струны являются собственными функциями граничной задачи

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}M(x)} + k^2 y = 0, \tag{0.2}$$

$$y'_-(a) = 0, \quad y(b) - \mathrm{i}y'_+(b)/k = 0. \tag{0.3}$$

Смысл уравнения (0.2) будет разъяснен ниже; $y'_-(x), y'_+(x)$ обозначают соответственно левые и правые производные. При $a = -\infty$ по определению $y'_-(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} y'_-(x)$.

Собственные числа задачи (0.2)—(0.3) будем называть *частотами диссипации струны* S.

Для струны $S \in \mathfrak{S}$ существует решение $\varphi(x; k^2)$ уравнения (0.2), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(a; k^2) = 1$, $\varphi'_-(a; k^2) = 0$. Таким образом, это решение при любом k удовлетворяет первому условию (0.3). Второе условие (0.3) приводит к уравнению

$$\varphi(b;\ k^2) - \mathrm{i}\varphi'_+(b;\ k^2)/k = 0,$$

корнями которого служат частоты диссипации k_j. Собственными функциями задачи (0.2)—(0.3) являются функции $\varphi(x; k_j^2)$.

Струну $S \in \mathfrak{S}$ назовем *приведенной*, если к ее правому концу b не примыкает интервал $[\beta, b]$ $(a < \beta < b)$, на котором плотность струны постоянна и равна 1. Если струна не приведенная, то точную нижнюю грань тех β, для которых $\mathrm{d}M(x) = \mathrm{d}x$ на $[\beta, b]$, обозначим через b_0. Для приведенной струны считаем $b_0 = b$.

Так как при сдвиге струны вдоль оси x ее спектр не меняется, и собственные и присоединенные функции преобразуются очевидным образом, то в дальнейшем мы считаем, если не оговорено другое, что у струны с конечной длиной $a = 0$, а у струны с бесконечной длиной $a = -\infty$, $b = 0$.

Главная цель настоящей работы — дать полную характеристику множества частот диссипации струны $S \in \mathfrak{S}$. Основной результат содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть задана последовательность* $K = \{k_j\}$ *комплексных чисел (среди которых могут быть и совпадающие). Для того чтобы эта последовательность была последовательностью всех частот диссипации некоторой струны* $S \in \mathfrak{S}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *множество* K *симметрично относительно мнимой оси, причем кратности симметричных точек совпадают;*
2) $\operatorname{Im} k_j > 0$; $k_j \in K$;
3) $\sum\limits_j \operatorname{Im}(-1/k_j) < \infty$;
4) $\sum\limits_j |k_j|^{-2} < \infty$.

При выполнении этих условий существует единственная приведенная струна $S_0 \in \mathfrak{S}$, *имеющая заданный спектр частот диссипации; все остальные струны* $S \in \mathfrak{S}$ *с тем же спектром получаются продлением струны* S_0 *вправо однородным куском плотности единица произвольной длины.*

Со струной $S \in \mathfrak{S}$ в ряде случаев естественно связать пространство $\mathfrak{H}_S = L^2(a, b; \mathrm{d}M) \oplus L^2(a, b)$ и ввести действующий в этом пространстве оператор $D_S\colon \operatorname{col}(f_1, f_2) \to \operatorname{col}(-\mathrm{d}f_2/\mathrm{d}M(x), \mathrm{d}f_1/\mathrm{d}x)$ $(f_2(a) = 0,\ f_1(b) - \mathrm{i}f_2(b) = 0)$ спектр которого совпадает с K. Собственному числу $k_j \in K$ отвечает собственный элемент $\Phi_j(x) = \operatorname{col}(\varphi(x; k_j^2),\ \varphi'_+(x; k_j^2)/k_j)$. В § 4 мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для того чтобы система корневых элементов оператора* $A_S = -D_S^{-1}$ *была полна в пространстве* $\mathfrak{H}_S$, *необходимо и достаточно, чтобы струна* S *была приведенной.*

Отсюда, в частности, вытекает, что для приведенной струны $S \in \mathfrak{S}$ с простым спектром K частот диссипации система собственных элементов $\{\varphi(x; k_j^2)\}_{k_j \in K}$ задачи (0.2), (0.3) полна в $L^2(a, b; \mathrm{d}M)$. Для случая, когда K не содержит чисто мнимых чисел, в §4 доказывается, что эта система бесконечно переполненная, то есть остается полной после удаления бесконечного количества элементов.

В §5 рассматривается противоположный случай; когда все частоты диссипации чисто мнимые: $k_j = \mathrm{i}\mu_j$, $\mu_j > 0$ и $\sum \mu_j^{-1} < \infty$. Оказывается, в этом случае струна S — стилтьесовская, т.е. состоит из ''бусинок'', насаженных на невесомую нить, сгущающихся к правому концу.

Основные результаты, содержащиеся в этой статье, были анонсированы в заметке [1]. Еще до этого Д. З. Аров [2] установил следующую теорему.

Для того чтобы множество K, расположенное в верхней полуплоскости и симметричное относительно мнимой оси, было множеством частот диссипации некоторой регулярной струны, необходимо и достаточно, чтобы K было множеством нулей целой функции $F(z)$ экспоненциального типа, которая удовлетворяет условиям

$$(0.4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}|F(x)|^{-2}dx<\infty,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}\ln^+|F(x)|\,dx<\infty.$$

Впоследствии эта теорема иным путем, среди других интересных результатов, была получена С. В. Хрущевым [3]. Об одном из них в связи с изучаемыми вопросами стоит упомянуть особо. В предположении, что струна S регулярна и что спектр частот диссипации простой, С. В. Хрущев показал, что система собственных функций задачи (0.2)—(0.3) полна в $L^2(a, b;\, dM)$ не только для приведенной струны, указав точные границы для тех b, при которых это имеет место (см. §4).

Д. З. Аров и С. В. Хрущев рассматривали только регулярные струны. За счет расширения класса допустимых струн мы получили более простую характеристику спектра частот диссипации (свойства 1)—4) множества K). При этом используются непосредственно свойства самих частот диссипации, тогда как в теореме Д. З. Арова речь идет об аналитических свойствах функции $F(z)$, для которой K есть множество корней. Мы указываем аналитические свойства функции $F(z)$, эквивалентные свойствам 1)—4) множества K и устанавливаем связь этих функций с рядом известных классов аналитических функций.

Изложенные здесь результаты, а также результаты цитированных работ Д. З. Арова и С. В. Хрущева, можно использовать в теории резонансных состояний и резонансных частот радиального уравнения Шредингера с короткодействующим потенциалом при отсутствии связанных состояний. В этом случае соответствующая граничная задача преобразуется в задачу (0.2), (0.3) с гладким распределением масс. Таким образом могут быть получены новые факты в задаче Редже [4], [5].

Любопытно, что результаты, о которых идет речь, получены тремя разными путями. Д. З. Аров использовал соображения, связанные с реализацией по Дарлингтону матриц-функций определенных классов. С. В. Хрущев применял факты и технику теории гильбертовых пространств целых функций де Бранжа.

Наш подход основан на использовании представления целой функции, положительной на $[0, \infty)$, в виде "суммы квадратов" и известного критерия М. С. Лившица полноты системы корневых элементов диссипативного оператора.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Основные положения теории прямых и обратных задач для неоднородной струны были установлены в [6], подробное их изложение можно найти в [7] и [8].

Операция $\mathrm{d}y/\mathrm{d}M(x)$ определяется на функциях вида

$$y(x) = \alpha + \int_a^x g(s)\mathrm{d}M(s)$$

(где $g(x)$ — комплекснозначная M-суммируемая функция) равенством $\mathrm{d}y/\mathrm{d}M(x) = g(x)$. Аналогично на функциях вида

$$y(x) = \alpha + \beta x + \int_a^x (x-s)g(s)\mathrm{d}M(s)$$

определяется операция $\mathrm{d}y'/\mathrm{d}M(x) = g(x)$.

В дальнейшем предполагается, что точка b является точкой роста функции $M(x)$ и что в ней нет сосредоточенной массы (скачка функции $M(x)$).

Как уже говорилось во введении, струна S относится к классу $\mathfrak{S}$, если ее правый конец регулярен и если конечен статический момент (0.1) струны относительно правого конца. Частотами диссипации называются собственные числа k_j задачи

$$\mathrm{d}y'/\mathrm{d}M(x) + k^2 y = 0, \tag{1.1}$$

$$y'_-(a) = 0, \quad y(b) - \mathrm{i}y'_+(b)/k = 0. \tag{1.2}$$

У струны класса $\mathfrak{S}$ существует (единственное) решение $\varphi(x;k^2)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям $\varphi(a;k^2) = 1$, $\varphi'_+(a,k^2) = 0$. При каждом фиксированном $x \in [a,b]$ функция $\varphi(x;z)$ относительно z — целая порядка $\leqslant 1$, более того, если струна регулярна, то порядок $\leqslant 1/2$. Ее разложение в степенной ряд имеет вид:

$$\varphi(x;z) = 1 - \varphi_1(x)z + \varphi_2(x)z^2 - \varphi_3(x)z^3 + \ldots,$$

где

$$\varphi_{j+1}(x) = \int_a^x (x-s)\varphi_j(s)\mathrm{d}M(s) \quad (\varphi_0(x) \equiv 1).$$

В частности, нам понадобится формула

$$\varphi_1(x) = \int_a^x (x - s)\mathrm{d}M(s). \tag{1.3}$$

Очевидно, что множество K частот диссипации k_j является множеством корней уравнения

$$\varphi(b; k^2) - \mathrm{i}\varphi'_+(b; k^2)/k = 0,$$

а собственными функциями задачи (1.1) и (1.2) являются функции $\varphi(x; k_j^2)$ $(k_j \in K)$.

У регулярной струны существует решение $\psi(x; k^2)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям $\psi(a; k^2) = 0$, $\psi'_-(a; k^2) = 1$.

Имеет место тождество

$$\varphi(x; z)\psi'_+(x; z) - \varphi'_+(x; z)\psi(x; z) = 1. \tag{1.4}$$

Если правый конец b_0 струны S_1 скреплен с левым концом струны S_2, то для комбинированной струны S, как легко видеть, имеем

$$\varphi(x; z) = \begin{cases} \varphi_1(x; z) & \text{при } x \leqslant b_0, \\ \varphi_1(b_0; z)\varphi_2(x; z) + \varphi'_{1+}(b_0; z)\psi_2(x; z) & \text{при } x > b_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

где функции φ, φ_1 и φ_2, ψ_2 относятся к струнам соответственно S, S_1 и S_2. Если существует $\psi_1(x; z)$, то аналогично можно получить $\psi(x; z)$, заменив в (1.5) φ, φ_1, φ'_{1+} соответственно на ψ, ψ_1, ψ'_{1+}.

В частности, если струну S_1 продолжить однородной струной плотности 1, то при $x > b_0$

$$\varphi(x; z) = \varphi_1(b_0; z)\cos(x - b_0)\sqrt{z} + \varphi'_{1+}(b_0; z)\sin(x - b_0)\sqrt{z}/\sqrt{z}. \tag{1.6}$$

2. Подробные сведения о фактах, приведенных в этом пункте можно найти в [9] и [10].

Функция $f(z)$ комплексного переменного z называется *$\mathscr{R}$-функцией* (принадлежит классу $\mathscr{R}$), если:

1) она определена и голоморфна в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$,

2) $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$,

3) $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$.

Как известно, $f(z) \in \mathscr{R}$ тогда и только тогда, когда она допускает представление

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2} \right) \mathrm{d}\sigma(t) \tag{1.7}$$

где $\overline{\alpha} = \alpha$, $\beta \geqslant 0$, $\mathrm{d}\sigma(t) \geqslant 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)^{-1} \mathrm{d}\sigma(t) < \infty$. К классу $\mathscr{R}$ удобно причислять функцию $f(z) \equiv \infty$. Непосредственно проверяется, что $f(z) \in \mathscr{R}$ тогда и только тогда, когда $-1/f(z) \in \mathscr{R}$.

Функция $\sigma(t)$ восстанавливается по $f(z) \in \mathscr{R}$ с помощью формулы обращения Стилтьеса:

$$\sigma(t_2) - \sigma(t_1) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}\varepsilon) \mathrm{d}x,$$

где t_1 и t_2 — точки непрерывности функции $\sigma(t)$. Если на некотором интервале вещественной оси функция $f(z)$ непрерывна, то в этом интервале $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна и

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} f(t).$$

Пусть $f(z)$ — $\mathscr{R}$-функция с интегральным представлением (1.7), $u(z)$ и $v(z)$ — две функции, голоморфные в интервале $[t_1, t_2]$, принимающие в нем вещественные значения, причем $v(t) \geqslant 0$ при $t \in [t_1, t_2]$. Если t_1 и t_2 — точки непрерывности функции $\sigma(t)$, то для функции

$$F(z) = u(z) + v(z) f(z) \tag{1.8}$$

имеет место следующая обобщенная формула обращения

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} F(x + \mathrm{i}\varepsilon) \mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \mathrm{d}\sigma(t). \tag{1.9}$$

Функция $f(z)$ называется *$\mathscr{S}$-функцией* (принадлежит классу $\mathscr{S}$), если:

1) $f(z) \in \mathscr{R}$,

2) $f(z)$ голоморфна и неотрицательна на $(-\infty, 0)$.

К классу $\mathscr{S}$ причисляется и $f(z) \equiv \infty$.

Следующие утверждения эквивалентны:

1°. $f(z) \in \mathscr{S}$;

2°. $f(z) = \gamma + \int\limits_0^\infty (t-z)^{-1} d\sigma(t) \quad \left(\gamma \geqslant 0, \int\limits_0^\infty (t+1)^{-1} d\sigma(t) < \infty\right)$;

3°. $f(z) \in \mathscr{R}$, $zf(z) \in \mathscr{R}$;

4°. $-1/zf(z) \in \mathscr{S}$;

5°. $zf(z^2) \in \mathscr{R}$;

6°. При $z \in \mathbf{C}\setminus[0,\infty)$ функция $f(z)$ голоморфна, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ и $\operatorname{Im}(\sqrt{z} f(z)) \geqslant 0$.

3. Подробное изложение фактов этого пункта имеется в [11].

Пусть целая функция $f(z)$ положительна на $[0,\infty)$. Пара (A, B) вещественных целых функций без общих корней называется *$\mathscr{S}$-парой для* f, если

1. $f(z) = A^2(z) + zB^2(z)$;
2. $A(0) > 0$, $B(z)/A(z) \in \mathscr{S}$.

В [11] установлено, что для того чтобы для целой функции $f(z)$, положительной на $[0,\infty)$, существовала $\mathscr{S}$-пара (A, B), необходимо и достаточно, чтобы для корней z_j этой функции, расположенных в замкнутой верхней полуплоскости, выполнялось условие

$$\sum_j \operatorname{Im}(-1/\sqrt{z_j}) < \infty \tag{1.10}$$

(каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность).

Среди этих пар существует так называемая *главная $\mathscr{S}$-пара* (A_0, B_0), которая обладает свойством:

Множество всех $\mathscr{S}$-пар (A, B) для f получается из главной пары по формулам

$$\begin{aligned} A(z) &= A_0(z)\cos l\sqrt{z} - \sqrt{z}\,B_0(z)\sin l\sqrt{z}, \\ B(z) &= A_0(z)\sin l\sqrt{z}/\sqrt{z} + B_0(z)\cos l\sqrt{z}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где l пробегает множество неотрицательных чисел.

Если, кроме условия (1.10), выполняется условие

$$\sum_j |z_j|^{-1} < \infty, \tag{1.12}$$

а функция $f(z)$ — целая рода ноль, то главную $\mathscr{S}$-пару для f можно построить следующим образом: если положить

$$Q(z) = \prod_{\operatorname{Im} z_j > 0} \left[\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z_j}}\right)\left(1 + \frac{z}{\sqrt{\bar{z}_j}}\right)\right] \prod_{z_j < 0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z_j}}\right) \tag{1.13}$$

(условия (1.10) и (1.12) обеспечивают сходимость произведения), то

$$\begin{aligned} A_0(z) &= (Q(\sqrt{z}) + Q(-\sqrt{z}))/2, \\ B_0(z) &= (Q(\sqrt{z}) - Q(-\sqrt{z}))/2\,\mathrm{i}\sqrt{z}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Любая $\mathscr{S}$-пара для такой функции f, как это следует из (1.11) и (1.14), удовлетворяет соотношению

$$A(z) + \mathrm{i}\sqrt{z}\,B(z) = Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l z}. \tag{1.15}$$

4. Факты этого пункта подробно освещаются в [7], [8], и [12].

Для струны $S \in \mathfrak{S}$ решение $\varphi(x; \lambda)$ порождает обобщеное преобразование Фурье $U: f \to F$, где $f \in L^2(a, b; \mathrm{d}M)$,

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)\varphi(x, \lambda)\mathrm{d}M(x).$$

Неубывающая на $[0, \infty)$ функция $\tau(\lambda)$ называется (положительной) *спектральной функцией струны* S (со свободным левым концом), если преобразование U изометрически переводит пространство $L^2(a; b; \mathrm{d}M)$ в пространство $L^2(0, \infty; \mathrm{d}\tau)$.

Если струна S регулярна, то описание всех ее спектральных функций получается следующим образом. Для функции $\omega \in \mathscr{S}$ положим

$$\Omega_\omega(z) = \frac{\psi'_+(b; z)\omega(z) + \psi(b; z)}{\varphi'_+(b; z)\omega(z) + \varphi(b; z)}. \tag{1.16}$$

Оказывается, $\Omega_\omega(z) \in \mathscr{S}$, так что

$$\Omega_\omega(z) = \gamma_\omega + \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\tau_\omega(t)}{t - z} \tag{1.17}$$

$(\gamma_\omega \geqslant 0, \mathrm{d}\tau_\omega(t) \geqslant 0, \int_0^\infty (t+1)^{-1}\mathrm{d}\tau_\omega(t) < \infty)$, и функция

$$\tau_\omega(t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi}\int_0^t \operatorname{Im}\Omega_\omega(x + \mathrm{i}\omega)\mathrm{d}x \tag{1.18}$$

является спектральной функцией регулярной струны S.

Формулы (1.16), (1.18) устанавливают взаимно однозначное соответствие $\tau \leftrightarrow \omega$ между положительными спектральными функциями τ регулярной струны и функциями $\omega \in \mathscr{S}$. Число γ_ω в формуле (1.17) не зависит от ω и равно $\sup\{\xi\colon M(x) = 0$ при $a \leqslant x \leqslant a + \xi\}$.

Для сингулярной струны $S \in \mathfrak{S}$ этим приемом пользоваться нельзя, так как может не существовать решение $\psi(x;\, z)$. В этом случае взаимно однозначное соответствие $\tau \leftrightarrow \omega$ между положительными спектральными функциями и функциями класса $\mathscr{S}$ устанавливается формулами (использующими только $\varphi(b;\, z)$ и $\varphi'_+(b;\, z)$)

$$\tilde{\Omega}_\omega(z) = \frac{\varphi(b;\, z)\omega(z) - \varphi'_+(b;\, z)}{\varphi'_+(b;\, z)\omega(z) + \varphi(b;\, z)}, \tag{1.19}$$

$$\sigma_\omega(t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_0^t \operatorname{Im} \tilde{\Omega}_\omega(x + i\varepsilon)\mathrm{d}x, \tag{1.20}$$

$$\mathrm{d}\tau_\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\sigma_\omega(t)}{(\varphi'_+(b;\, t))^2 + (\varphi(b;\, t))^2}. \tag{1.21}$$

Впрочем, этими формулами можно пользоваться и в случае регулярной струны. В самом деле, элементарными выкладками с применением тождества (1.4) проверяется соотношение

$$\tilde{\Omega}_\omega(z) = ((\varphi'_+(b;\, z))^2 + (\varphi(b;\, z))^2)\Omega_\omega(z) -$$
$$- \varphi(b;\, z)\psi(b;\, z) - \varphi'_+(b;\, z)\psi'_+(b;\, z).$$

Таким образом, функции $\tilde{\Omega}_\omega(z)$ и $\Omega_\omega(z)$ связаны формулой типа (1.8) и, следовательно, можно использовать обобщенную формулу обращения (1.9), откуда и получаются формулы (1.19), (1.20), (1.21).

2. ОПЕРАТОРЫ D_S и A_S

Как уже было сказано, мы будем заниматься задачей

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}M} + k^2 y = 0, \\ y'_-(a) = 0, \quad y(b) - iy'_+(b)/k = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Преобразуем ее в линейную систему, положив $u_1 = y$, $u_2 = y'/k$:

$$\frac{du_2}{dM} = -ku_1,$$

(2.2)

$$\frac{du_1}{dx} = ku_2,$$

(2.3) $$u_2(a) = 0, \quad u_1(b) - \mathrm{i}u_2(b) = 0.$$

С этой системой естественно связать гильбертово пространство $\mathfrak{H}_S = L^2(a, b; dM) \oplus L^2(a, b)$ и действующий в нем оператор D_S:

(2.4) $$D_S\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{du_2}{dM}\\[2mm] \dfrac{du_1}{dx}\end{pmatrix}$$

на множестве тех элементов $u = \mathrm{col}(u_1, u_2) \in \mathfrak{H}_S$ для которых имеет смысл дифференциальная операция (2.4) и выполняются условия (2.3). Очевидно, что спектр оператора D_S совпадает со спектром K частот диссипации струны S, а собственной вектор-функцией, отвечающей числу $k_j \in K$, является $\Phi_j(x) = \mathrm{col}(\varphi(x; k_j^2),\ \varphi'_+(x; k_j^2)/k_j)$.

Введем в $\mathfrak{H}_S$ также оператор A_S:

$$A_S\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\displaystyle\int_x^b v_2(x)dx + \mathrm{i}\int_a^b v_1(x)\,dM(x)\\[4mm] \displaystyle\int_a^x v_1(x)dM(x)\end{pmatrix}.$$

Ясно, что он определен на всем $\mathfrak{H}_S$. Проверим, что $A_S = -D_S^{-1}$. Действительно, если положить

$$u_1(x) = \int_x^b v_2(x)dx + \mathrm{i}\int_a^b v_1(x)dM(x),$$

$$u_2(x) = \int_a^x v_1(x)dM(x),$$

то, во-первых, $u_2(a) = 0$, $u_1(b) - \mathrm{i}u_2(b) = 0$ и, во-вторых,

$$D_S\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}M} \\ \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix},$$

так что $D_S A_S = -I$. Так же просто проверяется, что $A_S D_S = -I$.

Отметим следующие свойства оператора A_S.

1°. *Оператор A_S — диссипативный с одномерной мнимой компонентой.*

В самом деле, как легко проверить,

$$A_S^*\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_x^b v_2(x)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b v_1(x)\mathrm{d}M(x) \\ \displaystyle\int_a^x v_1(x)\mathrm{d}M(x) \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$(A_S)_{\mathcal{I}}v = \frac{1}{2\mathrm{i}}(A_S - A_S^*)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_a^b v_1(x)\mathrm{d}M(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

то есть мнимая компонента одномерна и

$$((A_S)_{\mathcal{I}}v, v) = \left|\int_a^b v_1(x)\mathrm{d}M(x)\right|^2 \geqslant 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим недосмотр, допущенный в [1]: там утверждается, что оператор $(A_S)_{\mathcal{I}}$ — двумерный.

2°. *Оператор A_S есть оператор Гильберта-Шмидта.*

Положим $\tilde{b} = b + M(b)$ и, следуя [13], установим монотонное отображение интервала $[a, b]$ в интервал $[a, \tilde{b}]$ посредством формулы

$$t = x + M(x) = t(x). \tag{2.5}$$

Обратное отображение $x = x(t)$ можно доопределить на всем интервале $[a, \tilde{b}]$ (скачкам функции $t(x)$ отвечают интервалы постоянства функции $x(t)$). Для почти всех t из $[a, b]$ согласно теореме Радона-Никодима существуют измеримые производные (подробности см. в [13])

$$h_1(t) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}, \quad h_2(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Ясно, что $h_1(t) \geqslant 0$, $h_2(t) \geqslant 0$, $h_1(t) + h_2(t) \equiv 1$ $(a \leqslant t \leqslant \tilde{b})$. Подстановка $x = x(t)$ порождает изометрическое отображение $u(x) \to u(x(t)) = U(t)$ пространства $\mathfrak{H}_S$ на пространство $\tilde{\mathfrak{H}}_S$ вектор-функций $V(t) = \mathrm{col}(V_1(t), V_2(t))$ со скалярным произведением

$$[U, V] = \int_a^{\tilde{b}} U_1(t)\overline{V_1(t)}h_1(t)\mathrm{d}t + \int_a^{\tilde{b}} U_2(t)\overline{V_2(t)}h_2(t)\mathrm{d}t = (u, v).$$

При этом отображении оператор A_S переходит в оператор $\tilde{A}_S$ действующий по формуле

$$\tilde{A}_S\begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_t^{\tilde{b}} V_2(s)h_2(s)\mathrm{d}s + \mathrm{i}\int_a^{\tilde{b}} V_1(s)h_1(s)\mathrm{d}s \\ \displaystyle\int_a^t V_1(s)h_1(s)\mathrm{d}s \end{pmatrix}.$$

Этот оператор можно записать в виде интегрального оператора. Обозначим через $\eta(t)$ функцию Хевисайда, то есть функцию, равную единице при $t \geqslant 0$ и равную нулю при $t < 0$, и положим

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \eta(-t) \\ \eta(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 \\ 0 & h_2(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(\tilde{A}_S V)(t) = \int_a^{\tilde{b}} \Gamma(t - s)H(s)V(s)\mathrm{d}s.$$

Легко видеть, что

$$(\tilde{A}_S^* V)(t) = \int_a^{\tilde{b}} \Gamma(s - t)^* H(s)V(s)\mathrm{d}s.$$

Поэтому для вычисления следа оператора $A_S^* A_S$ можно пользоваться формулой (см. [14])

$$\operatorname{sp} A_S^* A_S = \operatorname{sp} \tilde{A}_S^* \tilde{A}_S = \int_a^{\tilde{b}}\int_a^{\tilde{b}} \operatorname{sp} \Gamma(s-t)^* H(t)\Gamma(t-s)H(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s.$$

Отсюда

$$\operatorname{sp} A_S^* A_S = \int_a^{\tilde{b}}\int_a^{\tilde{b}} (h_1(t)h_1(s) + h_1(s)h_2(t)\eta(t-s) + h_1(t)h_2(s)\eta(s-t))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s.$$

Так как

$$\int_a^{\tilde{b}} h_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{d}M(x) = M(b),$$

$$\int_a^{\tilde{b}}\int_a^{\tilde{b}} h_1(s)h_2(t)\eta(t-s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_a^{\tilde{b}}\int_a^{\tilde{b}} h_1(t)h_2(s)\eta(s-t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_a^{\tilde{b}} h_1(t)\,\mathrm{d}t \int_t^{\tilde{b}} h_2(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \mathrm{d}M(x)\int_x^b \mathrm{d}\xi = \int_a^b (b-x)\,\mathrm{d}M(x),$$

то для струны $S \in \mathfrak{S}$ все эти интегралы конечны (напомним, что в класс $\mathfrak{S}$ входят струны с регулярным правым концом и конечным статическим моментом относительно этого конца). Поэтому конечен след

$$\operatorname{sp} A_S^* A_S = M(b)^2 + 2\int_a^b (b-x)\,\mathrm{d}M(x),$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Упомянем еще одно свойство оператора A_S: для вектор-функции $W(t) = -\tilde{A}_S V(t) = \operatorname{col}(W_1(t), W_2(t))$ выполняются соотношения

$$J\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = H(t)V, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_2(a) = 0, \quad W_1(\tilde{b}) - \mathrm{i}W_2(\tilde{b}) = 0.$$

Таким образом, замена (2.5) сводит уравнение струны к канонической системе с неотрицательным гамильтонианом [13].

3. ХАРАКТЕРИСТИКА МНОЖЕСТВА ЧАСТОТ ДИССИПАЦИИ

1. Как уже было сказано, множество $K = \{k_j\}$ частот диссипации струны $S \in \mathfrak{S}$ есть множество корней уравнения

$$\varphi(b;\ k^2) - \mathrm{i}\varphi'_+(b;\ k^2)/k = 0. \tag{3.1}$$

Кроме того, $k \in K$ тогда и только тогда, когда $-1/k$ есть собственное число оператора A_S.

Введем обозначение: $b_0 = \inf\{\beta : \beta \leqslant b,\ \mathrm{d}M(x) = \mathrm{d}x$ при $\beta \leqslant x \leqslant b\}$. Струна S называется *приведенной* если $b_0 = b$, т.е. если к ее правому концу не примыкает участок на котором струна однородна с плотностью 1.

Стоит отметить, что если струна не приведенная, то удалив участок (b_0, b), мы не изменим множество K. Действительно, положив $b - b_0 = l$, получим (см. (1.5)), что

$$\varphi(b;\ k^2) = \varphi(b_0\,;\ k^2)\cos lk + \varphi'_+(b_0\,;\ k^2)\sin lk/k,$$

$$\varphi'_+(b;\ k^2) = -k\varphi(b_0\,;\ k^2)\sin lk + \varphi'_+(b_0\,;\ k^2)\cos lk,$$

откуда

$$\varphi(b;\ k^2) - \mathrm{i}\varphi'_+(b;\ k^2)/k = (\varphi(b_0\,;\ k^2) - \mathrm{i}\varphi'_+(b_0\,;\ k^2)/k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}lk}. \tag{3.2}$$

Следовательно, множества корней уравнений (3.1) и $\varphi(b_0\,; k^2) - \mathrm{i}\varphi(b_0\,; k^2)/k = 0$ совпадают.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть задана последовательность комплексных числе $K = \{k_j\}$ (среди которых могут быть и совпадающие). Для того, чтобы эта последовательность была последовательностью всех частот диссипации некоторой струны $S \in \mathfrak{S}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *Множество K симметрично относительно мнимой оси, причем кратности симметричных точек совпадают;*

2) $\operatorname{Im} k_j > 0,\ k_j \in K;$

3) $\sum_j \operatorname{Im}(-1/k_j) < \infty;$

4) $\sum_j |k_j|^{-2} < \infty.$

При выполнении этих условий существует единственная приведенная струна $S_0 \in \mathfrak{S}$, имеющая заданный спектр K частот диссипации; все остальные струны $S \in \mathfrak{S}$ с тем же спектром получаются из S_0 продлением ее вправо однородным куском плотности 1.

Доказательство необходимости. Свойство 1) мгновенно следует из вещественности целых функций $\varphi(b;z)$ и $\varphi'(b;z)$. В самом деле, для функции $F(z) = \varphi(b;z^2) - i\varphi'_+(b;z^2)/z$ имеем $\overline{F(z)} = \varphi(b;\bar{z}^2) + i\varphi'_+(b;\bar{z}^2)/\bar{z} = F(-\bar{z})$. Поэтому, если k — корень функции $F(z)$ некоторой кратности, то $-\bar{k}$ — корень той же кратности.

Так как оператор A_S диссипативный, то его собственные числа $-1/k_j$; а с ними и числа k_j, находятся в замкнутой верхней полуплоскости. Вещественными они быть не могут, так как тогда из $F(k_j) = 0$ следует, что $\varphi(b;k_j^2) = 0$, $\varphi'_+(b;k_j^2) = 0$, откуда вытекает противоречие: $\varphi(x,k_j^2)$ есть решение задачи Коши с нулевыми начальными данными в точке b и потому $\varphi(x;k_j^2) \equiv 0$, что невозможно. Тем самым доказано свойство 2).

Для получения свойства 3) заметим, что мнимая компонента $(A_S)_{\mathscr{I}}$ оператора A_S одномерна и, следовательно, ядерна, а в этом случае (см. например, [14])

$$\sum_j \operatorname{Im}(-1/k_j) \leqslant \operatorname{sp}(A_S)_{\mathscr{I}}.$$

Наконец, свойство 4) следует из того, что A_S — оператор Гильберта-Шмидта.

Доказательство достаточности. Пусть множество $K = \{k_j\}$ обладает свойствами 1)—4). Тогда сходится произведение

$$Q(z) = \prod_{\operatorname{Re} k_j > 0} \left[\left(1 - \frac{z}{k_j}\right)\left(1 + \frac{z}{\bar{k}_j}\right)\right] \prod_{\operatorname{Re} k_j = 0} \left(1 - \frac{z}{k_j}\right). \tag{3.3}$$

Введем функции

$$\begin{aligned} A_0(z) &= (Q(\sqrt{z}) + Q(-\sqrt{z}))/2, \\ B_0(z) &= (Q(\sqrt{z}) - Q(-\sqrt{z}))/2i\sqrt{z}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Это целые вещественные функции нулевого рода, $A_0(0) = 1$, и, как показано в [11], $B_0(z)/A_0(z) \in \mathscr{S}$. Поэтому, пользуясь известными результатами по обратной задаче для струны ([16], [12], см. также [8]), получаем что существует, и притом единственная, струна $S_0 \in \mathfrak{S}$ для которой

$$\varphi(b;z) = A_0(z), \quad \varphi'_+(b;z) = -zB_0(z), \tag{3.5}$$

где b — правый конец струны. При этом $\varphi(b;z^2) - i\varphi'_+(b;z^2)/z = Q(z)$, так что K есть множество частот диссипации струны S_0.

Докажем, что S_0 — приведенная струна. Если предположить, что $b = b_0 + l$ где l — длина однородной части струны, примыкающей справа к концу b_0, то в силу (1.6)

$$\varphi(b; z) = \varphi(b_0; z)\cos l\sqrt{z} + \varphi'_+(b; z)\sin l\sqrt{z}/\sqrt{z},$$

(3.6)

$$\varphi'_+(b; z) = -\varphi(b_0; z)\sqrt{z}\sin l\sqrt{z} + \varphi'_+(b_0; z)\cos l\sqrt{z}$$

или

$$A_0(z) = \varphi(b_0; z)\cos l\sqrt{z} - \sqrt{z}(-\varphi'_+(b_0; z)/z)\sin l\sqrt{z},$$

(3.7)

$$B_0(z) = \varphi(b_0; z)\sin l\sqrt{z}/\sqrt{z} + (-\varphi'_+(b_0; z)/z)\cos l\sqrt{z}.$$

Легко проверить, что функции $A(z) = \varphi(b_0; z)$ и $B(z) = -\varphi'_+(b_0; z)/z$, так же, как и функции $A_0(z)$ и $B_0(z)$, образуют $\mathcal{S}$ — пару для целой функции $\Pi(z) = Q(\sqrt{z})\,Q(-\sqrt{z})$, положительной при $z = x > 0$. Действительно, так как $\varphi(x; 0) = 1$, то $A(0) = A_0(0) = 1$; так как $f(x) = \varphi(x; z)/\varphi'_+(x; z) \in \mathcal{S}$ при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ [7], то классу $\mathcal{S}$ принадлежит функция $-1/zf(z) = -\varphi'(x; z)/z\varphi(x; z)$, вследствие чего $B(z)/A(z) \in \mathcal{S}$ и $B_0(z)/A_0(z) \in \mathcal{S}$. Наконец, непосредственные выкладки, использующие (3.4) и (3.6), показывают, что

$$\Pi(z) = A_0^2(z) + zB_0^2(z) = A^2(z) + zB^2(z).$$

Так как $\mathcal{S}$-пара $(A_0(z), B_0(z))$ — главная (см. § 2, п. 3), то найдется такое число $m \geqslant 0$, что

$$\varphi(b_0; z) = A_0(z)\cos m\sqrt{z} - \sqrt{z}\,B_0(z)\sin m\sqrt{z},$$

(3.8)

$$-\varphi'_+(b_0; z)/z = A_0(z)\sin m\sqrt{z}/\sqrt{z} + B_0(z)\cos m\sqrt{z}.$$

Подставив эти выражения в (3.7), придем к соотношениям

$$A_0(z) = A_0(z)\cos(l + m)\sqrt{z} - \sqrt{z}\,B_0(z)\sin(l + m)\sqrt{z},$$

$$B_0(z) = A_0(z)\sin(l + m)\sqrt{z}/\sqrt{z} + B_0(z)\cos(l + m)\sqrt{z},$$

которые можно рассматривать как однородную систему линейных уравнений относительно $A_0(z)$ и $B_0(z)$. Поэтому

$$\begin{vmatrix} 1-\cos(l+m)\sqrt{z} & \sqrt{z}\sin(l+m)\sqrt{z} \\ -\sin(l+m)\sqrt{z}/\sqrt{z} & 1-\cos(l+m)\sqrt{z} \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1-\cos(l+m)\sqrt{z}) \equiv 0.$$

Отсюда, так как $l \geqslant 0, m \geqslant 0$, получаем, что $l = 0$ (и $m = 0$), то есть что струна S_0 — приведенная.

Пусть S — произвольная струна класса $\mathfrak{S}$ со спектром диссипации K, $\varphi(x; z)$ — ее амплитудная функция. Так как функции $A(z) = \varphi(b; z)$ и $B(z) = -\varphi'_+(b; z)/z$ образуют $\mathscr{S}$ — пару для функции $\Pi(z) = \varphi^2(b; z) + \varphi'^2_+(b; z)/z$, множество нулей которой есть $K \cup \overline{K}$, то имеют место равенства (1.11), которые можно переписать в виде (3.6). Последнее означает, что на участке (b_0, b) $(b - b_0 = l)$ струна S однородна с плотностью, равной единице. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Учитывая формулы (3.6), (3.4), соотношение (3.2) можно переписать в виде

$$\varphi(b; k^2) - \mathrm{i}\varphi'_+(b; k^2)/k = Q(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}lk}, \tag{3.9}$$

где l — длина однородного участка (b_0, b) струны S.

2. В теореме 3.1 множество K частот диссипации струны $S \in \mathfrak{S}$ характеризуется непосредственно через свойства самих частот $k_j \in K$. Займемся изучением свойств целой функции $F(z)$ множество корней которой совпадает с K.

Каждую целую функцию $F(z)$ можно однозначно представить в виде

$$F(z) = F_R(z) + \mathrm{i}F_I(z),$$

где $F_R(z)$ и $F_I(z)$ — целые вещественные (то есть принимающие вещественные значения при вещественных z) функции.

ТЕОРЕМА 3.2. *Множество K частот диссипации струны $S \in \mathfrak{S}$ является множеством корней целой функции $F(z)$ со свойствами:*

а) *$F_R(z)$ — четная, а $F_I(z)$ нечетная функции, не имеющие общих корней;*

б) $F_I(z)/F_R(z) \in \mathscr{R}$;

в) *Род $F(z)$ не выше единицы.*

Обратно, если целая функция $F(z)$ обладает свойствами а) — в), *то множество K ее корней является множеством частот диссипации некоторой струны $S \in \mathfrak{S}$.*

Доказательство. Частоты диссипации являются корнями целой функции

$$F(z) = \varphi(b; z^2) - \mathrm{i}\varphi'_+(b; z^2)/z.$$

Очевидно, что $F_R(z) = \varphi(b; z^2)$ — четная, а $F_I(z) = -\varphi'_+(b; z^2)/z$ — нечетная функции, не имеющие общих корней. Поэтому имеет место свойство а). Проверим свойство б). Так как $f(z) = \varphi(b; z)/\varphi'_+(b; z) \in \mathcal{S}$ [7], то (см. §1, п. 2) классу $\mathcal{S}$ принадлежит функция $-1/zf(z)$, вследствие чего в класс $\mathcal{R}$ входит функция $z(-1/z^2f(z^2)) = -\varphi'_+(b; z^2)/z\varphi(b; z^2) = F_I(z)/F_R(z)$. Наконец, согласно теореме 3.1 сходится ряд $\sum_j |k_j|^{-2}$ и, следовательно, каноническое произведение

$$P(z) = \prod_{k_j \in K} (1 - z/k_j)\mathrm{e}^{z/k_j}.$$

Так как $-\overline{K} = K$, то, учитывая сходимость ряда $\sum_j \mathrm{Im}(-1/k_j) = \gamma$ ($\geqslant 0$) получим, что

$$P(z) = \prod_{\mathrm{Re}\, k_j > 0} \left(1 - \frac{z}{k_j}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{k_j}}\left(1 + \frac{z}{\bar{k}_j}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{\bar{k}_j}} \prod_{\mathrm{Re}\, k_j = 0} \left(1 - \frac{z}{k_j}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{k_j}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma z}Q(z),$$

Согласно формуле (3.9)

$$F(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+\gamma)z}P(z)$$

откуда следует, что род $F(z)$ не выше единицы. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части проверим, что из ее условий вытекает, что множество K корней функции $F(z)$ обладает свойствами 1)—4) сформулированными в теореме 3.1.

Свойство 1) вытекает из того, что $F(-\bar{z}) = F_R(-\bar{z}) + \mathrm{i}F_I(-\bar{z}) = F_R(\bar{z}) - \mathrm{i}F_I(\bar{z}) = \overline{F(z)}$.

Свойство 2) получается следующим образом. Если $F(k) = 0$, то $F_R(k) \neq 0$ (иначе F_I и F_R имели бы общий корень) и $F_I(k)/F_R(k) = \mathrm{i}$. Функция $F_I(z)/F_R(z)$ имеет положительную мнимую часть в открытой верхней полуплоскости, вещественна на вещественной оси и потому имеет отрицательную мнимую часть в открытой нижней полуплоскости. Следовательно, она может принимать значение i только в точках открытой верхней полуплоскости.

Для доказательства свойства 3) заметим, что условие $\operatorname{Im} F_I(z)/F_R(z) > 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$ равносильно тому, что

$$\left|\frac{F(z)}{\overline{F}(z)}\right| = \left|\frac{F_R(z) + iF_I(z)}{F_R(z) - iF_I(z)}\right| = \left|\frac{F_I(z)/F_R(z) - i}{F_I(z)/F_R(z) + i}\right| < 1 \tag{3.10}$$

при $\operatorname{Im} z > 0$. Таким образом, ненулевая функция $G(z) = F(z)/\overline{F}(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, ограничена в ней и ее корни (с учетом кратностей) совпадают с корнями k_j функции $F(z)$. Отсюда, как известно, следует, что сходится произведение Бляшке

$$\prod_j \frac{1 - z/k_j}{1 - z/\overline{k}_j} = \prod_j \left(1 + \frac{2i\, z \operatorname{Im}(-1/k_j)}{1 - z/\overline{k}_j}\right).$$

Поэтому сходится ряд

$$\sum_j \left|\frac{\operatorname{Im}(-1/k_j)}{1 - z/\overline{k}_j}\right|,$$

а с ним (так как $k_j \to \infty$) и ряд $\sum_j \operatorname{Im}(-1/k_j)$.

Наконец, свойство 4) следует из того, что $F(z)$ — целая функция рода не выше единицы. Теорема доказана.

3. Отмеченные аналитические свойства функции $F(z)$ связывают ее с рядом важных классов функций.

Класс целых функций, обладающих свойством $|F(z)/\overline{F}(z)| < 1$ при $\operatorname{Im} z > 0$ (см. (3.10)) впервые был введен и изучен в [15]. Впоследствии, в связи с проблемой Рауса-Гурвица были введены классы HB, соответственно $\overline{\text{HB}}$, целых функций, обладающих этим свойством и не имеющих корней в замкнутой, соответственно открытой, верхней полуплоскости. Их свойства подробно изложены в [16] и [17]. Предыдущие рассуждения показывают, что $F \in \text{HB}$ тогда и только тогда, когда $F_I/F_R \in \mathcal{R}$ и функции F_I и F_R не имеют общих корней.

Целая функция $E(z) = \overline{F}(z)$, где для $F(z)$ выполняется (3.10), называется функцией де Бранжа, а функция де Бранжа $E(z)$, у которой не убывает $|E(x + iy)|$ при возрастающем $y > 0$ и фиксированном x, называется функцией Пойа. Функции Пойа служат основой для теории де Бранжа [18] гильбертовых пространств целых функций.

Класс HB, в свою очередь, тесно связан с классом P^* целых функций $\Phi(z)$, являющихся равномерными пределами (на каждом ограниченном множестве) последовательности многочленов, не имеющих корней в открытой нижней полуплоскости: функция $\Phi(z)$ принадлежит P^* тогда и только тогда, когда $\Phi(z) = e^{-\gamma z^2}F(z)$, где $\gamma \geqslant 0$ и целая функция $F(z)$ не выше первого рода принадлежит $\overline{\text{HB}}$ [17].

С другой стороны, как показано в доказательстве теоремы 3.2, для корней k_j (с учетом кратностей) функции $F(z) \in \text{HB}$ выполняется условие

$$\sum_j \operatorname{Im}(-1/k_j) < \infty$$

(другое доказательство этого факта имеется в [15]). Тем самым получено, что эти функции являются функциями класса A, состоящего, по определению, из тех целых функций, для которых

$$\sum_j |\operatorname{Im}(1/k_j)| < \infty.$$

Как известно (см., например, [17]), $F(z) \in A$ тогда и только тогда, когда при всех $R > 0$ ограничен интеграл

$$\int_0^R \frac{\ln|F(x)F(-x)|}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Для целой функции конечной степени это условие заведомо выполняется, если она принадлежит классу Картрайт, т.е. если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|F(x)|}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Последнее условие фигурирует среди условий (0.4) в теореме Д. З. Арова, приведенной во введении.

4. ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРА A_S В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathfrak{H}_S$

1. Напомним, что оператор A_S действует в пространстве $\mathfrak{H}_S = L^2(a, b;\, \mathrm{d}M) \oplus L^2(a, b)$ следующим образом:

$$A_S\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_x^b v_2(x)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a v_1(x)\mathrm{d}M(x) \\ \displaystyle\int_a^x v_1(x)\mathrm{d}M(x) \end{pmatrix},$$

что $A_S = -D_S^{-1}$ (см. §2) и что его спектр есть множество $\{-1/k_j\}$, где k_j пробегает множество K частот диссипации струны S, а собственный элемент, отвечающий $-1/k_j$, есть $\Phi_j(x) = \operatorname{col}(\varphi(x; k_j^2), \varphi'_+(x; k_j^2)/k_j)$. Оператор A_S является оператором Гильберта-Шмидта и имеет одномерную неотрицательную мнимую компоненту.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для того чтобы система корневых элементов оператора A_S была полна в пространстве $\mathfrak{H}_S$, необходимо и достаточно, чтобы струна S была приведенной. При выполнении этого условия указанная система минимальна.*

Доказательство. Воспользуемся известным критерием М. С. Лившица (см., например, [14]): для полноты системы корневых элементов вполне непрерывного диссипативного оператора C, мнимая часть которого $C_{\mathscr{I}}$ имеет конечный след, необходимо и достаточно, чтобы для множества $\{\lambda_j(C)\}$ его собственных чисел выполнялось равенство

$$\operatorname{sp} C_{\mathscr{I}} = \sum_j \operatorname{Im} \lambda_j(C).$$

Вычислим обе части этого равенства для $C = A_S$. Имеем (обозначения введены в §2):

$$\operatorname{sp}(A_S)_{\mathscr{I}} = \operatorname{sp}(\tilde{A}_S)_{\mathscr{I}} = \int_a^{\tilde{b}} \operatorname{sp}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} H(s)\mathrm{d}s =$$

$$= \int_a^{\tilde{b}} h_1(s)\mathrm{d}s = \int_a^{b} \mathrm{d}M(x) = M(b).$$

С другой стороны $\operatorname{Im}\lambda_j(A_S) = \operatorname{Im}(-1/k_j)$ $(k_j \in K)$.

Таким образом, система корневых элементов оператора A_S полна в $\mathfrak{H}_S$ тогда и только тогда, когда

$$M(b) = \sum_{k_j \in K} \operatorname{Im}(-1/k_j). \tag{4.1}$$

Чтобы выяснить, при каких условиях справедливо это равенство, воспользуемся соотношением (3.9), которое перепишем в виде

$$(1 - k^2\varphi_1(b) + \mathrm{O}(k^4)) - \frac{\mathrm{i}}{k}(-k^2\varphi'_{1+}(b) + \mathrm{O}(k^3)) =$$

$$= \left(1 - \left(\sum_{\operatorname{Re} k_j > 0}\left(\frac{1}{k_j} - \frac{1}{\bar{k}_j}\right) + \sum_{\operatorname{Re} k_j = 0} \frac{1}{k_j}\right)k + \mathrm{O}(k^2)\right)(1 + \mathrm{i}lk + \mathrm{O}(k^2)).$$

Сравнение коэффициентов при первой степени k дает равенство

$$\varphi'_{1+}(b) = 2 \sum_{\operatorname{Re} k_j > 0} \operatorname{Im}(-1/k_j) + \sum_{\operatorname{Re} k_j = 0} \operatorname{Im}(-1/k_j) + l.$$

Учитывая, что (см. (1.3)) $\varphi'_{1+}(b) = M(b)$ и что множество K симметрично относительно мнимой оси, получаем равенство

$$M(b) = \sum_{k_j \in K} \operatorname{Im}(-1/k_j) + l.$$

Теперь ясно, что равенство (4.1) имеет место тогда и только тогда, когда $l = 0$, т.е. когда струна S приведенная.

При удалении какого-либо корневого элемента исчезает слагаемое в правой части (4.1) и равенство нарушается. Это означает, что система корневых элементов оператора A_S минимальна в $\mathfrak{H}_S$.

2. Из теоремы 4.1, в частности, следует, что для приведенной струны система собственных и присоединенных функций задачи (0.2)—(0.3) плотна в $L^2(a, b; \mathrm{d}M)$. По-видимому, они образуют бесконечно переполненную систему. Это имеет место, например, для слабо демпфированной струны, то есть такой, которая не имеет чисто мнимых частот диссипации, что вытекает из следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть множество $K = \{k_j\}$ частот диссипации слабо демпфированной струны $S \in \mathfrak{S}$ разбито на два непересекающиеся части K_1 и K_2, симметрично расположенные относительно мнимой оси:*

$$K = K_1 \cup K_2, \quad K_1 \cap K_2 = \varnothing, \quad \overline{K_1} = -K_2.$$

Тогда система собственных и присоединенных функций задачи (0.2)—(0.3), *отвечающих частотам диссипации на K_1, является полной в $L^2(a, b; \mathrm{d}M)$.*

Доказательство. Сведем задачу (0.2)—(0.3) к интегральному уравнению. Из уравнения $dy'/\mathrm{d}M(x) = -k^2 y$ и условия $y'_-(a) = 0$ получаем, что

$$y'(x) = -k^2 \int_a^x y(s)\mathrm{d}M(s).$$

Поэтому

$$y(x) = -k^2 \int_a^x (x - s)y(s)\mathrm{d}M(s) + c,$$

где постоянная c определяется из условия $y(b) - \mathrm{i}y'_+(b)/k = 0$:

$$c = k^2 \int_a^b (b - s)y(s)\mathrm{d}M(s) - \mathrm{i}k \int_a^b y(s)\mathrm{d}M(s),$$

так что, если условиться, что $G(x, s) = b - x$ при $s < x$ и $G(x, s) = b - s$ при $s > x$,

$$y(x) = k^2 \int_a^b G(x, s)y(s)\mathrm{d}M(s) - \mathrm{i}k \int_a^b y(s)\mathrm{d}M(s).$$

Иными словами,

$$(I + \mu B + \mu^2 G)y = 0,$$

где

$$\mu = \mathrm{i}k, \quad By = \int_a^b y(s)\mathrm{d}M(s) = (y, 1)\cdot 1, \quad Gy = \int_a^b G(x, s)y(s)\mathrm{d}M(s).$$

Таким образом, система корневых элементов задачи (0.2) — (0.3) совпадает с системой корневых элементов пучка $I + \mu B + \mu^2 G$, а также пучка $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + G$ $(\lambda = -\mathrm{i}/k)$. У этого пучка оператор B неотрицателен, вполне непрерывен, имеет конечный след, $\mathrm{sp}\, B = M(b)$, так что пучок $L(\lambda)$ — слабо демпфированный и удовлетворяет условиям теоремы 6.1 из [19]. Установленная связь между задачей (0.2)—(0.3) и пучком $L(\lambda)$ позволяет переформулировать эту теорему как теорему 4.2.

Пользуясь другими методами, С. В. Хрущев для регулярной струны установил следующий точный результат.

ТЕОРЕМА. (С. В. Хрущев [3]). *Для регулярной струны семейство* $\{\varphi(x; k_j^2)\}$ $(k_j \in K)$ *полно с* $L^2(a, b; \mathrm{d}M)$ *при* $b_0 \leqslant b \leqslant b_0 + T(b_0)$ *и не полно при* $b > b_0 + T(b_0)$, *где* $T(x) = \int_0^x \sqrt{M'(x)}\mathrm{d}x$.

Напомним, что $b_0 = \inf\{\beta : \mathrm{d}M(x) = \mathrm{d}x$ на $[\beta, b]\}$.

5. СЛУЧАЙ ЧИСТО МНИМЫХ ЧАСТОТ ДИССИПАЦИИ

Остановимся еще на случае, в некотором смысле противоположном тому, который рассмотрен в теореме 4.2, а именно, на случае, когда все частоты диссипации — чисто мнимые. В этом случае, при не очень стеснительном дополнительном условии, струна S оказывается стилтьесовской, то есть распределение ее масс состоит только из последовательности сосредоточенных масс, сгущающихся к ее правому концу.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть множество $K = \{k_j\}$ состоит из чисто мнимых чисел $k_j = i\mu_j$ причем $\mu_j > 0$, $\sum_j \mu_j^{-1} < \infty$. Тогда приседенная струна $S_0(\in \mathfrak{S})$, имеющая K своим спектром частот диссипации, является стилтьесовской.*

Доказательство. Как известно (см., например, [7]), струна S_0 является стилтьесовской тогда и только тогда, когда у какой-либо ее спектральной функции $\sigma_0(t)$ (а тогда и у всех спектральных функций) существуют моменты всех порядков $\int\limits_0^\infty t^n d\sigma_0(t)$, $n = 0, 1, \ldots$. Доказательство теоремы заключается в том, что будет указана такая спектральная функция

В рассматриваемом случае $Q(z) = \prod_j (1 - z/i\mu_j)$. Множество $K = \{i\mu_j\}$ является спектром частот диссипации приведенной струны $S_0 \in \mathfrak{S}$, у которой

$$\varphi(b_0; z) = (Q(\sqrt{z}) + Q(-\sqrt{z}))/2,$$

$$\varphi'_+(b_0; z) = -\sqrt{z}(Q(\sqrt{z}) - Q(-\sqrt{z}))/2i.$$

Как уже говорилось, спектральную функцию $\sigma(t)$ струны S_0 можно получить следующим образом: взяв произвольную функцию $\omega(z) \in \mathcal{S}$, находим

$$\tilde{\sigma}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^t \operatorname{Im} \tilde{\Omega}_\omega(x + i\varepsilon) dx,$$

где

$$\tilde{\Omega}_\omega(z) = \frac{\varphi(b_0; z)\omega(z) - \varphi'_+(b_0; z)}{\varphi'_+(b_0; z)\omega(z) + \varphi(b_0; z)}$$

и

$$d\sigma(t) = \frac{d\tilde{\sigma}(t)}{(\varphi'_+(b_0; t))^2 + \varphi^2(b_0; t)}.$$

Положим $\omega = \omega_0(z) = i/\sqrt{z}$. Тогда при $t > 0$

$$\operatorname{Im} \tilde{\Omega}_{\omega_0}(t) = \operatorname{Im} \frac{\varphi(b_0 ; t) \frac{i}{\sqrt{t}} - \varphi'_+(b_0 ; t)}{\varphi'_+(b_0 ; t) \frac{i}{\sqrt{t}} + \varphi(b_0 ; t)} =$$

$$= \frac{\varphi^2(b_0 ; t) + (\varphi'_+(b_0 ; t))^2}{\sqrt{t}\,((\varphi'_+(b_0 ; t))^2/t + \varphi^2(b_0 ; t))},$$

откуда

$$\mathrm{d}\sigma_0(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\, Q(\sqrt{t})Q(-\sqrt{t})} = \frac{1}{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\, \Pi(t)}.$$

Здесь $\Pi(t) = \prod_j (1 + t/\mu_j^2)$ — целая функция порядка $\leqslant 1/2$, все нули которой отрицательны. В силу известного предложения о таких функциях (см., например, [20]), она экспоненциально растет на положительной вещественной полуоси. Поэтому все моменты функции $\sigma_0(t)$ существуют, т.е. струна S_0 является стилтьесовской. Теорема доказана.

В заключение заметим, что для стилтьесовской струны почти всюду $M'(x) = 0$. Поэтому для нее, в силу теоремы С. В. Хрущева, в случае простого спектра система $\{\varphi(x; k_j^2)\}$, будучи полной в $L^2(a, b_0 ; \mathrm{d}M)$, не будет таковой в $L^2(a, b; \mathrm{d}M)$ при $b > b_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн, М. Г.; Нудельман, А. А., О прямых и обратных задачах для частот граничной диссипации неоднородной струны, *Докл. АН СССР*, **247**:5(1979), 1046—1049.
2. Аров, Д. З., Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости, *Сибирский матем. журнал*, **16**:3(1975), 440—465.
3. Hruščev, S. V., The Regge problem for strings, unconditionally convergent eigenfunction expansions, and unconditional bases of exponentials in $L^2(-T, T)$, *J. Operator Theory*, **14**(1985), 67—85.
4. Regge, T., Analytic properties of the scattering matrix, *Nuovo Cimento*, **8**(1958), 671—679.
5. Regge, T., Construction of potentials from resonance parameters, *Nuovo Cimento*, **9**(1958), 491—503.
6. Крейн, М. Г., Об одном обобщении исследований Стилтьеса, *Докл. АН СССР*, **87**:6(1952), 881—884.

7. Кац, И. С.; Крейн, М. Г., О спектральных функциях струны, в кн. Ф. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, М., "Мир", 1968, pp. 648—737, (Дополнение II).
8. Dym., H.; Mc Kean, H. P., *Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem*, Academic Press, 1976.
9. Кац, И. С.; Крейн, М. Г., $\mathscr{R}$-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя, в кн. Ф. Аткинсон *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, М., "Мир", 1968, pp. 629—647, (Дополнение I).
10. Крейн, М. Г.; Нудельман, А. А., *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, М., "Наука", 1973.
11. Крейн, М. Г.; Нудельман, А. А., О представлении целых функций, положительных на вещественной оси, или на полуоси, или вне конечного интервала, *Матем. исследования, Кишинев*, вып. **61**(1981), 40—59.
12. Кац, И. С., Поведение спектральных функций дифференциальных систем с граничными условиями в сингулярном конце, *Докл. АН СССР*, **157**:1(1964), 34—37.
13. Гохберг, И. Ц.; Крейн, М. Г., *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*, М., "Наука", 1967.
14. Гохберг, И. Ц.; Крейн, М. Г., *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, М., "Наука", 1965.
15. Крейн, М. Г., Об одном специальном классе целых и мероморфных функций, в кн. Ахиезер, Н. И., Крейн, М. Г., *О некоторых вопросах теории моментов*, Харьков, 1938.
16. Чеботарев, Н. Г.; Мейман, Н. Н., Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций, *Труды Матем. ин-та АН СССР*, **26**(1949), 1—331.
17. Левин, Б. Я., *Распределение корней целых функций*, М., ГТТИ, 1956.
18. de Branges, L., *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall, 1968.
19. Крейн, М. Г.; Лангер, Г. К., О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов, *Тр. Междунар. симпозиума в Тбилиси "Прилож. теории функций в механике сплошной среды"*, **2**(1965), 283—322.
20. Титчмарш, Е., *Теория функций*, ГТТИ, 1951.

M. G. KREIN
Artema Str. 14, 6,
270057, Odessa,
USSR.

A. A. NUDELMAN
Didrichson Str. 4,
270029, Odessa,
USSR.

Received March 6, 1989.