

ESPÉRANCE CONDITIONNELLE MINIMALE

JEAN-FRANÇOIS HAVET

INTRODUCTION

A la suite des travaux de V. Jones ([5]) définissant l'indice d'un sous-facteur d'un facteur de type II_1 et de ceux de H. Kosaki ([6]) sur l'indice d'une espérance conditionnelle entre facteurs, M. Baillet, Y. Denizeau et le présent auteur ont systématisé l'approche de M. Pimsner et S. Popa dans [8], Proposition 1.3 et ont dégagé une notion d'indice fini ([1], Définition 3.6) pour une espérance conditionnelle E d'une algèbre de von Neumann M sur une sous-algèbre de von Neumann N , en munissant M d'une structure de N -module hilbertien X_E grâce à E . Rappelons tout d'abord les notations et le formalisme utilisés; pour plus de détails le lecteur pourra se reporter à [1].

Pour une espérance conditionnelle E appartenant à $E(M, N)$ – ensemble des espérances conditionnelles normales fidèles de l'algèbre de von Neumann M sur la sous-algèbre de von Neumann N –, le N -module X_E est le complété autodual de $A_E(M)$ sur lequel est défini le N -produit scalaire

$$\langle A_E(x), A_E(y) \rangle = E(x^*y) \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ de } M.$$

Pour tout x de M , la multiplication à gauche par x définit un opérateur $\pi_E(x)$ de $\mathcal{L}_N(X_E)$, algèbre des opérateurs N -linéaires continus sur X_E admettant un adjoint. Comme dans la représentation de Gelfand-Segal classique, π_E est un homomorphisme normal injectif d'algèbres de von Neumann et par identification de M avec $\pi_E(M)$ nous pouvons considérer M comme une sous-algèbre de $\mathcal{L}_N(X_E)$. La notion et les propriétés de base orthonormale d'un espace de Hilbert se généralisent dans les N -modules hilbertiens ([1], Définition 1.6 et conséquence 1.8). Par définition ([1], Définition 3.6) E est d'indice fini s'il existe une famille $(m_\beta)_\beta$ dans M telle que $\sum_\beta m_\beta m_\beta^*$ converge ultrafaiblement et telle que $(A_E(m_\beta))_\beta$ soit une base orthonormale de X_E ; dans ce cas l'indice de E est l'élément du centre de M , indépendant de la base orthonormale et égal à $\sum_\beta m_\beta m_\beta^*$. C'est l'indice au sens de [5] et [6] lorsque M et N sont des facteurs. Rappelons que la norme de l'indice est la plus petite constante K

tel que $KE - \text{Id}_M$ soit complètement positive (cf. [1], Théorème 3.5 qui donne aussi d'autres conditions équivalentes pour E d'indice fini).

Lorsque E est d'indice fini nous avons l'analogie de la construction de base de [5] c'est-à-dire qu'il existe une espérance conditionnelle $E^1 \in E(\mathcal{L}_N(X_E), M)$ telle que $E^1(e) = \text{Ind}(E)^{-1}$ où e désigne le projecteur défini par E . Cette espérance est caractérisée par l'égalité $E^1(T) = \text{Ind}(E)^{-1}xy^*$ pour tout opérateur T rang 1 de la forme $T = \theta_{A_E(x), A_E(y)} = A_E(x) \cdot \langle A_E(y), \cdot \rangle$.

Dans le présent travail nous nous intéressons essentiellement aux espérances minimales c'est-à-dire dont la norme de l'indice est minimale, pour une inclusion entre algèbres de von Neumann avec des centres de dimension finie.

Si N est un sous-facteur d'indice fini d'un facteur M nous montrons qu'il existe une unique espérance E minimale (Théorème 1.8); elle est d'indice scalaire et c'est une application bécarre c'est-à-dire que $E(xy) = E(yx)$ pour tous $x \in M$ et $y \in N' \cap M$ ([2], Proposition 3.9 et Définition 5.8). Nous donnons différentes caractérisations de cette espérance (Proposition 1.10), soit à partir des projecteurs de $N' \cap M$ et de l'indice local ("additivité" de la racine à l'indice), soit à partir de la construction de base (E et E^1 ont même "restriction" à $N' \cap M$). Cette construction de base d'ailleurs préserve la minimalité (corollaire 1.17).

Dans le cas où M est fini de type I l'espérance minimale respecte la trace car il n'existe qu'une seule application bécarre, mais si M est de type II_1 l'espérance canonique définie par la trace ne coïncide pas toujours avec l'espérance minimale (Proposition 1.13) et donc l'indice $[N:N]$ défini par V. Jones dans [5] n'est pas toujours minimal.

Signalons qu'indépendamment de nos travaux F. Hiai et R. Longo ont également établi l'existence de l'espérance minimale et certaines de ses caractérisations dans le cadre d'un sous-facteur d'indice fini d'un facteur M de genre dénombrable ([4], Théorème 1 et [7], Théorème 5.5).

Au paragraphe 2 nous nous plaçons dans le cas d'algèbres de von Neumann avec des centres de dimension finie. Nous montrons dans le cas où l'inclusion est indécomposable, c'est-à-dire lorsque $Z(N) \cap Z(M)$ est trivial, qu'il existe également une unique espérance minimale, c'est encore une application bécarre et son indice est scalaire (Théorème 2.9).

Dans le paragraphe 3 nous supposons en outre que les algèbres sont finies et nous ne considérons que des espérances conditionnelles préservant une trace. Notre étude permet d'apporter un nouvel éclairage à la définition de l'indice de N dans M donné par F. Goodman, P. de la Harpe et V. Jones dans [3] (Définition 3.7.5), il apparaît alors comme celui de l'espérance conditionnelle minimale parmi celles qui préservent une trace sur M (Théorème 3.9). Pour les algèbres finies de type I, nous déterminons la borne inférieure de l'ensemble des K tels que $KE - \text{Id}_M$ soit complètement positive. Il est intéressant de rapprocher notre formule du résultat de M. Pimsner et S. Popa ([8], Théorème 6.1) donnant la borne inférieure des K tels que $KE - \text{Id}_M$ soit positive.

Remarquons enfin que la notion de trace de Markov ([3], Définition 3.7.1) a une interprétation très simple dans notre étude, il s'agit des traces dont l'espérance associée est d'indice scalaire (Proposition 3.2).

Pour la clarté des démonstrations rappelons encore quelques propriétés. Si E est une espérance conditionnelle d'indice fini, à tout élément y de $N' \cap M$ est associé l'opérateur $\pi'_E(y)$ de multiplication à droite. Les éléments de $\pi'_E(Z(N))$ constituent le centre de $\mathcal{L}_N(X_E)$ et le commutant relatif de $\pi_E(M)$ dans $\mathcal{L}_N(X_E)$ est $\pi'_E(N' \cap M)$ ([1], Remarque 3.4 ii)).

L'adjoint de $\pi'_E(y)$ coïncide avec $\pi'_E(y^*)$ si et seulement si y appartient au centralisateur M_E de l'espérance E , c'est-à-dire si pour tout $x \in M$ on a $E(xy) = E(yx)$ ([2], Définition 3.4 et Proposition 3.9).

1. ESPÉRANCE CONDITIONNELLE MINIMALE SUR UN SOUS-FACTEUR

1.1. NOTATIONS. Dans ce paragraphe et sauf précision contraire N désignera un sous-facteur d'un facteur M .

Pour toute espérance conditionnelle $E \in E(M, N)$ d'indice fini nous noterons $[E]$ le réel positif tel que

$$\text{Ind}(E) = [E] \cdot \text{Id}_M.$$

Si f est un projecteur non nul de $N' \cap M$, nous noterons E_f l'espérance conditionnelle locale appartenant à $E(fMf, fNf)$ définie par

$$E_f(x) = E(f)^{-1}fE(x) \quad \text{pour tout } x \in fMf.$$

1.2. LEMME. Soit $E \in E(M, N)$ et soit f un projecteur de $N' \cap M$ tel que E_f soit d'indice fini. Pour tout projecteur e de $N' \cap M$ il existe alors une famille d'isométries partielles $(V_h)_{h \in H}$ dans eMf et une base orthonormale $(\Lambda_{E_f}(m_\beta))_{\beta \in B}$ dans X_{E_f} telles que $\sum_{h \in H} V_h V_h^* = e$ et $(E(f)^{-1/2} \Lambda_E(V_h m_\beta))_{h \in H, \beta \in B}$ est une base orthonormale du sous-module $\Lambda_E(eMf)$ de $\Lambda_E(M)$.

Preuve. Ce lemme est en fait la conséquence immédiate d'un résultat plus général, souvent utilisé dans le paragraphe 2, et que nous établissons dès maintenant. \square

1.3. LEMME. Soient $N \subset M$ une paire d'algèbres de von Neumann, $E \in E(M, N)$ et f un projecteur de $N' \cap M$. Supposons qu'il existe p projecteur minimal dans $Z(M)$ et q projecteur minimal dans $Z(N)$ tels que f soit un sous-projecteur de pq .

(i) Il existe $\gamma \in]0, 1]$ tel que $E(f) = \gamma q$ et E_f définie par

$$E_f(x) = \gamma^{-1}fE(x) \quad \text{pour tout } x \in fMf$$

est élément de $E(fMf, fNf)$.

(ii) Si E_f est d'indice fini alors pour tout $e \in N' \cap M$ sous-projecteur de p il existe une famille d'isométries partielles $(V_h)_{h \in H}$ dans eMf et une base orthonormale $(A_{E_f}(m_\beta))_{\beta \in B}$ dans X_{E_f} telles que $(\gamma^{-1/2} A_E(V_h m_\beta))_{h \in H, \beta \in B}$ soit une base orthonormale du sous-module $A_E(eMf)$ de $A_E(M)$ et $\sum_{h \in H} V_h V_h^* = e$.

Preuve. (i) Puisque f est majoré par q on a donc $E(f)$ élément de $Z(N)q$, d'où l'existence de γ . On vérifie facilement que E_f est une espérance conditionnelle normale de fMf sur fNf . Montrons la fidélité; soit $x \in fMf$ tel que $E_f(x^*x) = 0$. On a donc $fE(x^*x) = 0$. Comme $E(x^*x)$ appartient à N_q on en déduit que $E(x^*x) = 0$ et par suite x est nul.

(ii) Dans le facteur Mp , la division euclidienne de e par f assure l'existence d'une famille d'isométries partielles (V_h) telles que

$$e = V_0 V_0^* + \sum_{h \in H'} V_h V_h^* \quad \text{et} \quad V_h^* V_h = f \quad \text{pour } h \in H'$$

$$V_0^* V_0 = f_0 < f.$$

Posons $H = H' \cup \{0\}$ et choisissons une base $(A_{E_f}(m_\beta))$ du sous-module autodual $A_{E_f}(f_0 Mf)$ que nous complétons pour obtenir une base orthonormale $(A_{E_f}(m_\beta))_{\beta \in B}$ de $A_{E_f}(fMf)$. Comme $V_h^* V_{h'} = 0$ si $h \neq h'$, et compte tenu du choix des (m_β) on vérifie facilement que la famille $(A_E(V_h m_\beta))_{h, \beta}$ est orthogonale. De plus dans le cas où $V_h m_\beta$ est non nul, on obtient

$$\begin{aligned} \langle A_E(V_h m_\beta), A_E(V_h m_\beta) \rangle &= E(m_\beta^* V_h^* V_h m_\beta) = \\ &= E(m_\beta^* m_\beta) = \gamma \tau(E_\beta(m_\beta^* m_\beta)) \end{aligned}$$

où σ désigne l'isomorphisme réciproque de l'induction de Nq sur Nf .

Par conséquent $(\gamma^{-1/2} A_E(V_h m_\beta))_{h, \beta}$ est une famille orthonormale de $A_E(eMf)$. Soit x dans eMf . On peut écrire dans X_{E_f} muni de la topologie σ

$$\begin{aligned} A_{E_f}(V_h^* x) &= \sum_{\beta} A_{E_f}(m_\beta) \langle A_{E_f}(m_\beta), A_{E_f}(V_h^* x) \rangle = \\ &= \sum_{\beta} A_{E_f}(m_\beta) E_f(m_\beta^* V_h^* x). \end{aligned}$$

L'application A_{E_f} est continue de fMf muni de la topologie ultrafaible dans X_{E_f} muni de la topologie σ ([1], Lemme 2.17). Par compacité, sa restriction à la boule

de rayon $\|V_h^*x\|$ est bicontinue et on a pour la topologie ultrafaible de M

$$V_h V_h^* x = \sum_{\beta} V_h m_{\beta} \gamma^{-1} E(m_{\beta}^* V_h^* x)$$

et

$$x = \sum_h \sum_{\beta} \gamma^{-1} V_h m_{\beta} E(m_{\beta}^* V_h^* x).$$

Par continuité de A_E on a donc dans X_E muni de la topologie σ

$$A_E(x) = \sum_h \sum_{\beta} A_E(\gamma^{-1/2} V_h m_{\beta}) E(\gamma^{-1/2} m_{\beta}^* V_h^* x).$$

Nous obtenons donc une base orthonormale. ▣

1.4. COROLLAIRE. Soient $N \subset M$ une inclusion d'un sous-facteur dans un facteur, $E \in E(M, N)$ d'indice fini et $(r_k)_{k \in K}$ une famille de projecteurs non nuls deux à deux orthogonaux de somme 1 dans M_E centralisateur de E . Alors

$$\text{Ind}(E) = \sum_{k \in K} E(r_k)^{-1} [E_{r_k}].$$

Preuve. Les hypothèses faites sur les projecteurs (r_k) assurent que les sous-modules $A_E(r_k M r_j)$ sont deux à deux orthogonaux et de somme X_E . Fixons $j \in K$. Pour tout $k \in K$ il existe d'après le lemme 1.2 une base orthonormale de $A_E(r_k M r_j)$ de la forme $(E(r_j)^{-1/2} A_E(V_h m_{\beta}))_{h, \beta}$. La contribution du sous-module $A_E(r_k M r_j)$ à l'indice de E est donc:

$$\sum_{\beta, h} E(r_j)^{-1} V_h m_{\beta} m_{\beta}^* V_h^* = E(r_j)^{-1} \sum_h V_h [E_{r_j}] r_j V_h^* = E(r_j)^{-1} [E_{r_j}] r_k.$$

La contribution du sous-module $A_E(M r_j) = \bigoplus_k A_E(r_k M r_j)$ est donc $E(r_j)^{-1} [E_{r_j}]$.

Par suite

$$\text{Ind}(E) = \sum_j E(r_j)^{-1} [E_{r_j}]. \quad \text{▣}$$

1.5. COROLLAIRE. Soit $E \in E(M, N)$ une application bécarre d'indice fini.

(i) Pour toute famille de n projecteurs non nuls de somme 1 dans $N' \cap M$ on a $n^2 \leq [E]$.

(ii) $\dim_{\mathbb{C}}(N' \cap M) \leq [E]$.

(iii) Si $\text{Ind}(E) < 4$ alors $N' \cap M = \mathbb{C}$.

Preuve. Soit $(r_k)_{k=1, \dots, n}$ une famille maximale de projecteurs non nuls, deux à deux orthogonaux dans $N' \cap M$ qui est de dimension finie ([1], corollaire 3.10).

D'après le corollaire 1.4 on a

$$\text{Ind}(E) \geq \sum_{k=1}^n E(r_k)^{-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n E(r_k) = 1.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on en déduit

$$\text{Ind}(E) \geq n^2 \geq \dim_{\mathbb{C}} N' \cap M.$$

Par suite si $\text{Ind}(E) < 4$ alors $n = 1$ et $N' \cap M = \mathbb{C}$. ▣

REMARQUE. En appliquant les corollaires précédents à l'espérance conditionnelle canonique entre facteurs finis, on retrouve les résultats 2.2.2 à 2.2.4 de [5].

1.6. LEMME. Soient $E \in E(M, N)$ d'indice fini, e et f deux projecteurs équivalents dans le centralisateur M_E de E . Alors $E(e) = E(f)$ et $[E_e] = [E_f]$.

Preuve. Soit $u \in M_E$ tel que $u^*u = e$ et $uu^* = f$. On a donc

$$E(e) = E(u^*u) = E(uu^*) = E(f).$$

En outre on obtient un unitaire de $A_E(eMe)$ sur $A_E(fMf)$ qui à $A_E(x)$ associe $A_E(uxu^*)$.

Si $(A_E(m_x))$ est une base orthonormale de $A_E(eMe)$ alors $A_E(um_xu^*)$ est une base orthonormale de $A_E(fMf)$ et d'après [1], § 3.9 on a

$$\text{Ind}(E_e) = E(e) \sum_x m_x m_x^*$$

$$\text{Ind}(E_f) = E(f) \sum_x um_xu^*um_x^*u^* = [E_e]f. \quad \text{▣}$$

1.7. COROLLAIRE. Soient $E \in E(M, N)$ d'indice fini et $(e_k)_{k=1, \dots, n}$ une famille de projecteurs équivalents dans M_E , deux à deux orthogonaux et de somme r . Alors

$$[E_r] = n^2[E_{e_k}].$$

Preuve. Il est clair que $E_{e_k} = (E_r)_{e_k}$ pour tout k . D'après le lemme 1.6 on a $E(e_k) = E(r)/n$ et $[E_{e_k}]$ est indépendant de k .

D'après le corollaire 1.4 on a

$$\text{Ind}(E_r) = \sum_{k=1}^n E_r(e_k)^{-1}[E_{e_k}] = \sum_{k=1}^n E(r)rE(e_k)^{-1}[E_{e_k}].$$

D'où $[E_r] = n^2[E_{e_k}]$. ▣

1.8. THÉORÈME. *Supposons qu'il existe une espérance conditionnelle de $E(M, N)$ d'indice fini et désignons par $(r_k)_{k=1, \dots, n}$ les projecteurs minimaux du centre de $N' \cap M$. Pour tout $E \in E(M, N)$ notons E_k l'espérance conditionnelle de $E(r_k M r_k, r_k N r_k)$ définie par E .*

- (i) *L'espérance E_k est indépendante de l'application bécarre E choisie.*
- (ii) *Pour tout $G \in E(M, N)$ et tout $E \in E(M, N)$ bécarre on a*

$$[E_k] \leq [G_k] \text{ pour tout } k.$$

L'égalité pour tout k des deux indices n'a lieu que si G est une application bécarre

$$(iii) \quad \left(\sum_{k=1}^n [E_k]^{1/2} \right)^2 = \text{Min}\{[G] \mid G \in E(M, N)\}.$$

Ce minimum est atteint pour une unique espérance conditionnelle qui de plus est une application bécarre.

Preuve. Le commutant relatif $N' \cap M$ étant de dimension finie, il existe E application bécarre de M dans N ([2], Proposition 3.11) qui est d'indice fini ([1], Corollaire 3.20). On vérifie immédiatement que E_k est également bécarre. De plus, comme $(r_k M r_k)' \cap r_k M r_k = r_k(N' \cap M)r_k$ est un facteur il n'existe qu'une seule application bécarre dans $E(r_k M r_k, r_k N r_k)$, à savoir l'unique espérance conditionnelle dont la restriction à $r_k(N' \cap M)r_k$ est la trace de ce facteur fini; d'où l'assertion (i).

Soit $G \in E(M, N)$. Il existe un élément inversible $a \in N' \cap M$ tel que $G = E(a^* \cdot a)$ ([1], Proposition 3.15). Posons $h = aa^*$; on a $G = E(h \cdot)$. Pour tout k l'opérateur hr_k est diagonalisable dans le facteur $r_k(N' \cap M)r_k$ de dimension finie $(\mu_k)^2$ et il existe une famille $(e_j^k)_{j=1, \dots, \mu_k}$ de projecteurs minimaux deux à deux équivalents dans $r_k(N' \cap M)r_k$, et une famille $(\lambda_j^k)_j$ de réels strictement positifs telles que

$$hr_k = \sum_j \lambda_j^k e_j^k.$$

Le commutant relatif de $e_j^k N e_j^k$ dans $e_j^k M e_j^k$ étant trivial il en résulte ([2], Théorème 5.3) que $G_{e_j^k} = E_{e_j^k}$.

Par suite $[G_{e_j^k}] = [E_{e_j^k}]$ est indépendant de j (lemme 1.6) et sera noté β_k .

Pour tout x de M on a

$$G(e_j^k x) = E(h e_j^k x) = \lambda_j^k E(e_j^k x) = \lambda_j^k E(e_j^k x e_j^k) = G(x e_j^k).$$

Donc e_j^k appartient au centralisateur de G ([2], Proposition 3.9) et aussi à celui de G_k ; en appliquant le corollaire 1.4 on obtient

$$\begin{aligned} [G_k] &= \sum_{j=1}^{\mu_k} G_k(e_j^k)^{-1} \beta_k \geq \\ &\geq \mu_k^2 \beta_k \geq && \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\geq [E_k] && \text{(corollaire 1.7).} \end{aligned}$$

L'égalité n'a lieu que si $G(e_j^k)$ ne dépend pas de j , c'est-à-dire si λ_j^k est indépendant de j ; il en résulte alors que h appartient au centre de $N' \cap M$ et que G est une application bécarre. L'assertion (ii) est donc démontrée.

Les projecteurs r_k appartiennent au centre de $N' \cap M$ qui est inclus dans le centralisateur de G ; il vient d'après le corollaire 1.4

$$\begin{aligned} [G] &= \sum_{k=1}^n G(r_k)^{-1} [G_k] \neq \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^n [G_k]^{1/2} \right)^2 \geq && \text{(Cauchy-Schwarz)} \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^n [E_k]^{1/2} \right)^2. \end{aligned}$$

D'après (ii) l'égalité ne peut avoir lieu que pour une application bécarre G vérifiant de plus $G(r_k) = [E_k]^{1/2} (\sum_j [E_j]^{1/2})$.

$$\text{On a alors } h = \sum_k \lambda_k r_k \text{ avec } \lambda_k = [E_k]^{1/2} (E(r_k) \sum_j [E_j]^{1/2}).$$

D'où l'unicité d'une telle application bécarre. Réciproquement l'opérateur h ainsi défini est positif inversible dans $Z(N' \cap M)$ et vérifie $E(h) = 1$. L'espérance $G = E(h \cdot)$ réalise bien le minimum. D'où l'assertion (iii).

Remarquons que pour cette espérance on a

$$(*) \quad G(r_k) = [G_k]^{1/2} [G]^{-1/2}. \quad \square$$

1.9. DÉFINITION. Soit N un sous-facteur d'un facteur M , nous dirons que N est d'indice fini dans M s'il existe une espérance conditionnelle dans $E(M, N)$ d'indice fini; l'unique application (bécarre) d'indice minimum sera appelé *espérance minimale* et nous noterons $[M : N]_{\min}$ son indice.

Donnons maintenant différentes caractérisations de l'espérance minimale.

1.10. PROPOSITION. Soient N un sous-facteur d'indice fini dans M et $E \in E(M, N)$. Désignons par $(r_k)_k$ la famille des projecteurs minimaux du centre de $N' \cap M$ et par E^1 l'espérance conditionnelle de la construction de base. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) E est l'espérance minimale;
- (ii) Pour tout k on a $E(r_k)^2 = [E_{r_k}] [E]^{-1}$;
- (iii) Pour tout projecteur f de $N' \cap M$ on a $E(f)^2 = [E_f] [E]^{-1}$;
- (iv) Pour toute famille $(f_j)_j$ de projecteurs de $N' \cap M$ de somme 1 on a

$$[E]^{1/2} = \sum_j [E_{f_j}]^{1/2};$$

(v) E est une application bécarre et l'antiautomorphisme π'_E de $N' \cap M$ sur $\pi_E(M)' \cap \mathcal{L}_N(X_E)$ préserve les espérances, c'est-à-dire on a

$$E^1(\pi'_E(x)) = E(x), \quad \forall x \in N' \cap M.$$

Preuve. L'implication (i) \Rightarrow (ii) résulte de la formule (*).

(ii) \Rightarrow (i). D'après le corollaire 1.4 on a

$$[E] = \sum_k E(r_k)^{-1} [E_{r_k}] = \sum_k [E_{r_k}]^{1/2} [E]^{1/2}.$$

Donc $[E]$ est le minimum.

(i) \Rightarrow (v). Soient e un projecteur minimal de $N' \cap M$ et r son support central.

On a

$$[E_r]E(e)^2 = E(r)^2 [E] \quad (\text{corollaire 1.7})$$

et

$$[E_e] = E(e) [E] E^1(\pi'_E(e)) \quad ([I], \text{ § 3.9}).$$

D'où

$$E^1(\pi'_E(e)) = [E_r] [E]^{-1} E(e) E(r)^{-2}.$$

Comme E est minimale la condition (ii) est vérifiée et on a donc $E^1(\pi'_E(e)) = E(e)$. Par linéarité cette égalité s'étend à tout élément de $N' \cap M$.

(v) \Rightarrow (iii). Pour tout projecteur f de $N' \cap M$ on a

$$E(f) = E^1(\pi'_E(f)) = [E]^{-1} [E_f] E(f)^{-1} \quad ([I], \text{ § 3.9})$$

d'où $E(f)^2 = [E_f] [E]^{-1}$.

L'implication (iii) \Rightarrow (ii) est évidente. Pour l'implication (iv) \Rightarrow (i) il suffit d'appliquer l'hypothèse à la famille (r_k) .

(i) \Rightarrow (iv). On a

$$[E] = \sum_j E(f_j)^{-1} [E_{f_j}] = \quad (\text{corollaire 1.4})$$

$$= \sum_j [E_{f_j}]^{1/2} [E]^{1/2} \quad (\text{car l'assertion (iii) est vérifiée}).$$

▣

1.11. PROPOSITION. Si $[M : N]_{\min} < 9$ alors

- soit $N' \cap M \simeq \mathbf{C}$
- soit $N' \cap M \simeq \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ et $[M : N]_{\min} \in \{8\} \cup \{(1 + 2 \cos(\pi/n))^2; n \geq 3\}$
- soit $N' \cap M \simeq M_2(\mathbf{C})$ et $[M : N]_{\min} \in \{4, 8\}$.

Preuve. D'après le corollaire 1.5 le cardinal de toute famille de projecteurs non nuls deux à deux orthogonaux dans $N' \cap M$ est strictement inférieur à 3. Il en résulte les trois structures possibles pour $N' \cap M$.

Supposons que $N' \cap M$ soit isomorphe à $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Il existe dans $Z(N' \cap M)$ deux projecteurs minimaux et

$$[M : N]_{\min} = (\beta_1^{1/2} + \beta_2^{1/2})^2 \quad (\text{Théorème 1.8})$$

avec $\beta_1 \leq \beta_2$ et $\beta_i \in [4, +\infty[\cup \{4 \cos^2(\pi/n); n \geq 3\}$ ([1], Corollaire 3.12).

Si $\beta_1 = 1$ alors β_2 prend ses valeurs dans $\{4 \cos^2(\pi/n); n \geq 3\}$.

Si $\beta_1 = 2$ on ne peut avoir que $\beta_2 = 2$ et $[M : N]_{\min} = 8$, car pour $n \geq 5$ on a $\sqrt{2} + 2 \cos(\pi/n) \geq \sqrt{2} + ((\sqrt{5} + 1)/2) > 3$.

Supposons maintenant que $N' \cap M$ soit isomorphe à $M_2(\mathbb{C})$. Il existe dans $N' \cap M$ deux projecteurs équivalents de somme 1 et on a donc d'après le corollaire 1.7.

$$[M : N]_{\min} = 4\beta_1.$$

D'où $[M : N]_{\min} \in \{4, 8\}$ puisque pour $n \geq 5$ on a $16 \cos^2(\pi/n) \geq 2(3 + \sqrt{5}) > 9$. \square

1.12. PROPOSITION. *Supposons de plus que M est un facteur de type II_1 , désignons par τ la trace normalisée sur M et par E l'espérance conditionnelle (bécarre) telle que $\tau \circ E = \tau$. Supposons encore que N est d'indice fini dans M et désignons par (r_k) les projecteurs minimaux du centre de $N' \cap M$, par G l'espérance minimale et par λ_k les réels positifs tels que $E = G(h \cdot)$ avec $h = \sum_k \lambda_k r_k$. Alors l'entropie relative de M dans N se calcule par*

$$H(M : N) = \ln([G]) + 2 \sum_k \eta(\lambda_k) G(r_k)$$

où η désigne la fonction définie par $\eta(t) = -t \ln(t)$.

Preuve. Soit $(e_j^k)_{j,k}$ une famille de projecteurs minimaux de $N' \cap M$ telle que $\sum_j e_j^k = r_k$ pour tout k . D'après ([8], Théorème 4.4) on a

$$\begin{aligned} H(M : N) &= \sum_{j,k} \tau(e_j^k) \ln([E_{e_j^k}] / \tau(e_j^k)^2) = \\ &= \sum_k E(r_k) \ln([E_{r_k}] / E(r_k)^2) = \sum_k \lambda_k G(r_k) \ln([G_k] / \lambda_k^2 G(r_k)^2) = \\ &= \sum_k \lambda_k G(r_k) \ln([G] / \lambda_k^2) = \sum_k \lambda_k G(r_k) \ln([G]) - 2 \sum_k \lambda_k G(r_k) \ln(\lambda_k) = \\ &= \ln([G]) + 2 \sum_k \eta(\lambda_k) G(r_k). \quad \square \end{aligned}$$

1.13. COROLLAIRE ([8], Corollaire 4.5). *Soit N un sous-facteur d'indice fini d'un facteur M de type II_1 . Alors*

(i)
$$H(M | N) \leq \ln([M : N]_{\min}) \leq \ln([M : N]).$$

(ii) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $H(M | N) = \ln([M : N]_{\min}).$

b) $H(M | N) = \ln([M : N]).$

c) *L'espérance conditionnelle canonique qui respecte les traces et l'espérance minimale coïncident.*

Preuve. Reprenons les notations de la proposition précédente. Par concavité de la fonction η on a

$$\sum_k G(r_k) \eta(\lambda_k) \leq \eta(\sum_k G(r_k) \lambda_k) \leq \eta(1) = 0;$$

d'où l'assertion (i).

Par stricte concavité l'égalité ne peut avoir lieu que si tous les λ_k sont confondus et donc égaux à 1. On obtient l'équivalence des conditions a) et c). Il est clair que b) implique a) et que (a) et c) implique b). ▣

REMARQUE. Du corollaire précédent et de la proposition 1.11 on déduit le corollaire 4.6 de [8].

1.14. COROLLAIRE ([8], Corollaire 4.8). *Soit N un sous-facteur d'indice fini dans un facteur M .*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe un projecteur $f \in N' \cap M$ et un isomorphisme θ de fMf sur $(1 - f)M(1 - f)$ tel que $N = \{x \oplus \theta(x), x \in fMf\}$.*

b) $[M : N]_{\min} = 4$ et $N' \cap M$ n'est pas trivial.

(ii) *Supposons de plus que M est de type II_1 et désignons par τ la trace normalisée sur M . Si les conditions précédentes sont réalisées, posons $t = \tau(f)$; on a alors*

$$[M : N] = 1/t(1 - t) \quad \text{et} \quad H(M | N) = 2\eta(t) + 2\eta(1 - t).$$

Preuve. (i) a) \Rightarrow b). On a donc $fMf = fNf$ et $(1 - f)M(1 - f) = (1 - f)N(1 - f)$. Soit E une application bécarre de $E(M, N)$. Posons $t = E(f)$. On a alors d'après le corollaire 1.4

$$[E] = t^{-1} + (1 - t)^{-1} \geq 4.$$

Donc $[M : N]_{\min} \geq 4$.

Soit $k = (2t)^{-1}f + (2(1-t))^{-1}(1-f)$. Alors $E(k) = 1$ et si $G = E(k \cdot)$ alors f appartient au centralisateur de G par suite on a

$$[G] = G(f)^{-1} + (1 - G(f))^{-1} = 4.$$

D'où G est minimale et $[M: N]_{\min} = 4$.

b) \Rightarrow a). Soit G l'espérance minimale. Il existe dans $N' \cap M$ deux projecteurs non nuls f et $1 - f$. On a alors

$$4 = [G_f]G(f)^{-1} + [G_{1-f}]G(1-f)^{-1}.$$

La seule possibilité est $[G_f] = [G_{1-f}] = 1$ et $G(f) = G(1-f) = 1/2$. Donc $fMf = fNf$ et $(1-f)M(1-f) = (1-f)N(1-f)$. Comme N est un facteur les inductions par f et $1-f$ sont des isomorphismes et il en résulte l'existence de θ .

(ii) Soit E l'espérance conditionnelle qui préserve la trace. On a alors $t = \tau(f) = \tau \circ E(f)$ et donc

$$[M: N] = [E] = t^{-1} + (1-t)^{-1} = 1/t(1-t).$$

D'après la proposition 1.12 avec $h = k^{-1}$ on déduit $h(M, N) = 2\eta(t) + 2\eta(1-t)$. \square

Nous nous proposons dans la fin de ce paragraphe de démontrer que la minimalité est conservée dans la construction de base. Pour cela nous établissons d'abord deux lemmes dans une situation plus générale que celle des facteurs.

1.15. LEMME. Soient $N \subset M$ deux algèbres de von Neumann, $E \in E(M, N)$ d'indice fini, $M^1 = \mathcal{L}_N(X_E)$ et $E^1 \in E(M^1, M)$ l'espérance conditionnelle de la construction de base. Soient r un projecteur de M_E et $(A_E(m_\beta))_\beta$ une base orthonormale de $A_E(Mr)$. Posons

$$T_\beta = \theta_{A_E(m_\beta), A_E(zr)} \quad \text{où } z = \text{Ind}(E)^{1/2}$$

Alors $(A_{E^1}(T_\beta))_\beta$ est une base orthonormale du M -module $A_{E^1}(\pi'_E(r)M^1\pi'_E(r))$.

Preuve. Rappelons tout d'abord que le commutant relatif de l'algèbre $\pi_E(M)$ dans $\mathcal{L}_N(X_E)$ est $\pi'_E(N' \cap M)$ ([1], Remarques 3.4 (ii)). Comme r appartient au centralisateur de E , l'opérateur $\pi'_E(r)$ est le projecteur orthogonal sur le sous-module utodual $A_E(Mr)$. Soit $(A_E(m_\beta))_{\beta \in B}$ une base orthonormale de $A_E(Mr)$ que nous complétons pour obtenir une base $(A_E(m_\beta))_{\beta \in B'}$ de X_E ([1], Conséquences 1.8). Tout $T \in M^1$ se décompose sous la forme $A_{E^1}(T) = \sum_{\beta \in B'} A_{E^1}(\theta_{A_E(m_\beta), A_E(z)}) \cdot m'_\beta$ avec $m'_\beta =$

$= E^1(\theta_{A_E(z), T^*A_E(m_\beta)})$ ([I], § 3.10). Si T appartient à $\pi'_E(r)M^1\pi'_E(r)$ alors $T^*A_E(m_\beta)$ est nul si β n'appartient pas à B et on a donc

$$A_{E^1}(T) = \sum_{\beta \in B} A_{E^1}(\theta_{A_E(m_\beta), A_E(z)\pi'_E(r)} \cdot m'_\beta \sum_{\beta' \in B} A_{E^1}(T_{\beta'}) \cdot m'_{\beta'}).$$

La famille $(A_{E^1}(T_\beta))_{\beta \in B}$ est donc génératrice du M -module $\pi'_E(r)M^1\pi'_E(r)$, et orthogonale car $T_\beta^*T_{\beta'} = 0$ si $\beta \neq \beta'$. De plus on a

$$\begin{aligned} E^1(T_\beta^*T_\beta) &= E^1(\theta_{A_E(zr) \cdot E \cdot m_\beta^* m_\beta, A_E(zr)}) = \\ &= \text{Ind}(E)^{-1} zrE(m_\beta^* m_\beta)rz = rE(m_\beta^* m_\beta). \end{aligned}$$

Donc $(A_{E^1}(T_\beta))_\beta$ est une base orthonormale de $A_{E^1}(\pi'_E(r)M^1\pi'_E(r))$. ▣

1.16. LEMME. Soient $N \subset M$ deux algèbres de von Neumann, $E \in E(M, N)$ d'indice fini et E^1 l'espérance conditionnelle de la construction de base.

(i) Soit $x \in N' \cap M$. Alors x appartient au centralisateur de E si et seulement si $\pi'_E(x)$ appartient au centralisateur de E^1 .

(ii) E est une application bécarre si et seulement si E^1 est une application bécarre.

Preuve. (i) Soient x et y dans $N' \cap M$ et $(A_E(m_\beta))_\beta$ une base orthonormale de X_E . On a

$$\begin{aligned} E^1(\pi'_E(x)\pi'_E(y)) &= E^1(\pi'_E(yx)) = \\ &= E^1(\pi'_E(yx) \sum_{\beta} \theta_{A_E(m_\beta), A_E(m_\beta)}) = \\ &= E^1(\sum_{\beta} \theta_{A_E(m_\beta yx), A_E(m_\beta)}) = \\ &= \text{Ind}(E)^{-1} \sum_{\beta} m_\beta yx m_\beta^* = E^1(\sum_{\beta} \theta_{A_E(m_\beta y), A_E(m_\beta x^*)}) = \\ &= E^1(\pi'_E(y) \pi'_E(x^*)^*). \end{aligned}$$

Or $x \in M_E$ si et seulement si $\pi'_E(x^*) = \pi'_E(x)^*$. L'assertion (i) en résulte immédiatement.

L'assertion (ii) est une conséquence immédiate de (i). ▣

1.17. COROLLAIRE. Soient N un sous-facteur d'indice fini dans un facteur M et E l'espérance minimale. Alors l'espérance conditionnelle E^1 de la construction de base est minimale pour l'inclusion π_E de M dans $\mathcal{L}_N(X_E)$.

Preuve. D'après le lemme précédent E^1 est une application bécarre. Soit r un projecteur de $N' \cap M$. On a $E^1(\pi'_E(r)) = E(r)$ (Proposition 1.10). Le lemme 1.15

nous permet de construire une base orthonormale $(A_{E^1}(T_\beta))_\beta$ de $A_{E^1}(\pi'_E(r)\mathcal{L}_N(X_E) \cdot \pi'_E(r))$. D'après [1], § 3.9 appliqué à E^1 on a

$$\begin{aligned} \text{Ind}(E^1_r) &= \sum_\beta T_\beta E^1(\pi'_E(r)) T_\beta^* = \\ &= E(r) \sum_\beta \theta_{A_{E^1}(m_\beta), E^1(r^2r), A_{E^1}(m_\beta)} = \\ &= [E]E(r)^2 \pi'_E(r). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} [E^1_r] &= [E] E(r)^2 = \\ &= [E^1] E^1(\pi'_E(r))^2 \quad (\text{car } [E^1] = [E] ([1], \text{ § 3.10})) \end{aligned}$$

Cette égalité caractérise l'espérance minimale (Proposition 1.10 iii). ▣

2. ESPÉRANCE MINIMALE (CAS DES CENTRES DE DIMENSION FINIE)

2.1. NOTATIONS. Nous considérons une paire $N \subset M$ d'algèbres de von Neumann avec des centres de dimension finie. Nous désignons par $(p_i)_{i=1, \dots, m}$ (respectivement $(q_j)_{j=1, \dots, n}$) les projecteurs minimaux du centre de M (respectivement N) et par M_i (respectivement N_j) l'algèbre réduite $M p_i$ (respectivement $N q_j$).

Nous conviendrons que les indices i et k varient de 1 à m et les indices j et l de 1 à n . Posons $A = \{(i, j); p_i q_j \neq 0\}$. Pour (i, j) dans A , désignons par M_{ij} (respectivement N_{ij}) la réduite de M (respectivement l'induite de N) par le projecteur $p_i q_j$, et soit σ_{ij} l'isomorphisme de N_{ij} sur N_j réciproque de l'induction par $p_i q_j$. Si (i, j) n'appartient pas à A on pose $\sigma_{ij}(0) = 0$.

2.2. PROPOSITION. Soit E appartenant à $E(M, N)$.

(i) Pour tout i l'image du projecteur p_i par E appartient au centre de N et il existe donc des scalaires uniques $(\gamma_{ij})_j$ tels que

$$E(p_i) = \sum_j \gamma_{ij} q_j.$$

Nous pouvons donc associer à E la matrice $\Gamma_E = (\gamma_{ij})_{i,j}$. Cette matrice est markovienne suivant les colonnes et $\gamma_{ij} \neq 0$ si et seulement si (i, j) appartient à A .

ii) Pour tout (i, j) dans A l'espérance E définit un élément $E_{ij} \in E(M_{ij}, N_{ij})$ par

$$E_{ij}(t) = \gamma_{ij}^{-1} p_i E(t) \quad \text{pour tout } t \in M_{ij}.$$

(iii) On a $E(x) = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \sigma_{ij}(E_{ij}(p_i q_j x q_j))$ (si on pose $E_{ij}(0) = 0$ pour $(i, j) \notin A$).

Preuve. (i). On a $E(p_i q_j) = \gamma_{ij} q_j$; donc γ_{ij} appartient à $[0, 1]$ et par fidélité de E il est clair que $\gamma_{ij} = 0$ si et seulement si $p_i q_j = 0$.

Par ailleurs $q_j = E(q_j) = \sum_i E(p_i q_j) = \sum_i \gamma_{ij} q_j$. Donc $\sum_i \gamma_{ij} = 1$ pour tout j .

L'assertion (ii) se vérifie aisément.

(iii). Pour tout x de M on a

$$p_i E(p_i q_j x q_j) = \gamma_{ij} E_{ij}(p_i q_j x q_j);$$

d'où

$$E(p_i q_j x q_j) = \gamma_{ij} \sigma_{ij}(E_{ij}(p_i q_j x q_j)).$$

Par suite

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{i,j} E(p_i q_j x) = \\ &= \sum_{i,j} E(p_i q_j x q_j) = \quad (\text{car } q_j \in Z(N) \subset M_E) \\ &= \sum_{i,j} \gamma_{ij} \sigma_{ij}(E_{ij}(p_i q_j x q_j)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Réciproquement on a la proposition suivante.

2.3. PROPOSITION. Soit $\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j}$ une matrice markovienne suivant les colonnes et telle que $\gamma_{i,j} \neq 0$ si et seulement si $p_i q_j \neq 0$, et pour tout (i, i) de A soit $E'_{ij} \in E(M_{ij}, N_{ij})$. Alors il existe une unique espérance conditionnelle $E \in (M, N)$ telle que $\Gamma_E = \Gamma$ et $E_{ij} = E'_{ij}$ pour tout $(i, j) \in A$.

Preuve. L'unicité résulte de l'assertion (iii) de la proposition précédente et on vérifie facilement que pour E définie par cette formule les conclusions sont vérifiées. \blacksquare

2.4. DÉFINITIONS. Nous appellerons *matrice d'indices* définie par E , la matrice L de $M_{m,n}(\bar{\mathbf{R}}_+)$ déterminée par

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } (i, j) \notin A \\ [E_{ij}]^{1/2} & \text{si } (i, j) \in A \text{ et } E_{ij} \text{ d'indice fini} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous désignerons par $\tilde{\Gamma}$ la matrice de $M_{n,m}(\bar{\mathbf{R}}_+)$ définie par

$$\tilde{\gamma}_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma_{ij} = 0 \\ \lambda_{ij}^2 \gamma_{ij}^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.5. THÉORÈME. Soit E appartenant à $E(M, N)$. L'espérance E est d'indice fini si et seulement si sa matrice d'indices est à coefficients finis. De plus on a dans ce cas

$$\text{Ind}(E) = \sum_i \left(\sum_j \tilde{\gamma}_{ji} \right) p_i.$$

Preuve. Si E est d'indice fini alors toutes les espérances conditionnelles E_{ij} le sont également ([1], § 3.9).

Réciproquement supposons maintenant que la matrice d'indices de E soit à coefficients finis. Pour construire une base orthonormale du module X_E , remarquons que les sous-modules $\Lambda_E(p_i q_i M q_j)$ sont deux à deux orthogonaux. Appliquons le lemme 1.3 (ii) avec $f = p_i q_i$ et $e = p_i q_i$. Nous obtenons donc une base orthonormale de $\Lambda_E(p_i q_i M q_j)$ de la forme $(\gamma_{ij}^{-1/2} \Lambda_E(V_h m_\beta))_{h,\beta}$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{h,\beta} \gamma_{ij}^{-1/2} V_h m_\beta \gamma_{ij}^{-1/2} m_\beta^* V_h^* &= \gamma_{ij}^{-1} \sum_h V_h \left(\sum_\beta m_\beta m_\beta^* \right) V_h^* = \\ &= \gamma_{ij}^{-1} \lambda_{ij}^2 \sum_h V_h V_h^* = \tilde{\gamma}_{ji} p_i q_i. \end{aligned} \quad \square$$

Donc

$$\text{Ind}(E) = \sum_{i,j} \tilde{\gamma}_{ji} p_i q_i = \sum_i \left(\sum_j \tilde{\gamma}_{ji} \right) p_i.$$

2.6. REMARQUES. Supposons E d'indice fini.

La plus petite constante K telle que $(KE - \text{Id})$ soit complètement positive est $\|\text{Ind}(E)\| = \text{Max}_i \left(\sum_j \tilde{\gamma}_{ji} \right)$.

Le centre de $M^2 = \mathcal{L}_N(X_E)$, constitué des opérateurs $\pi'_E(z)$ de multiplication à droite, avec z dans $Z(N)$, est donc de dimension finie; ses projecteurs minimaux sont les $(\pi'_E(q_j))_j$. L'espérance conditionnelle E^1 de la construction de base est également d'indice fini et nous pouvons calculer les matrices associées.

2.7. PROPOSITION. Soient $E \in E(M, N)$ d'indice fini et $E^1 \in E(M^1, M)$ l'espérance conditionnelle de la construction de base. On a pour tout (j, i)

$$\gamma_{ji}^1 = \tilde{\gamma}_{ji} \left(\sum_l \tilde{\gamma}_{li} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda_{ji}^1 = \lambda_{ij};$$

d'où

$$\tilde{\gamma}_{ij}^1 = \gamma_{ij} \sum_l \tilde{\gamma}_{li}.$$

Dans le cas où $\text{Ind}(E)$ est scalaire les formules se simplifient, on a alors

$$\Gamma^1 = [E]^{-1} \tilde{\Gamma}, \quad L^1 = {}^1L \quad \text{et} \quad \tilde{\Gamma}^1 = [E] \Gamma.$$

Preuve. Soient p un projecteur de $Z(M)$ et q un projecteur de $Z(N)$. Alors pq est dans le centralisateur de l'espérance E et par suite l'opérateur $\pi'_E(pq) = \pi_E(p)\pi'_E(q)$ est le projecteur orthogonal sur le sous-module autodual $A_E(pMq)$. On voit en particulier que $p\pi'_E(q)$ est nul si et seulement si pq est nul.

Supposons maintenant que $p = p_i$, $q = q_j$ et $p_i q_j \neq 0$. Comme $A_E(pMp) = \bigoplus_l A_E(pq_l Mq)$ nous obtenons grâce au lemme 1.3 une base orthonormale de ce sous-module de la forme $(\gamma_{ij}^{-1/2} A_E(V_h^l m_\beta^l))_{l,h,\beta}$. Soit F le poids opératoriel de M^1 dans M associé à E ([1], Théorème 3.5). On a alors

$$\begin{aligned} F(p\pi'_E(q)) &= F\left(\sum_l \sum_{h,\beta} \gamma_{ij}^{-1/2} \theta_{A_E(V_h^l m_\beta^l), A_E(V_h^l m_\beta^l)}\right) = \\ &= \gamma_{ij}^{-1} \sum_l \sum_{h,\beta} V_h^l m_\beta^l m_\beta^{l*} V_h^{l*} = \gamma_{ij}^{-1} \sum_l \sum_h V_h^l \lambda_{ij}^2 p_i q_j V_h^{l*} = \\ &= \tilde{\gamma}_{ji} \sum_l \sum_h V_h^l V_h^{l*} = \quad \quad \quad (\text{car } V_h^l \in p_i q_j M q_j) \\ &= \tilde{\gamma}_{ji} p. \end{aligned}$$

D'où

$$E^1(p\rho_E(q)) = \text{Ind}(E)^{-1} \tilde{\gamma}_{ji} p \quad \text{et} \quad \gamma_{ji}^1 = \tilde{\gamma}_{ji} (\sum_l \tilde{\gamma}_{li})^{-1}.$$

En appliquant successivement le lemme 1.15 en prenant $r = pq$, le paragraphe 3.9 de [1] avec E^1 et le projecteur $\pi'_E(pq)$, et le calcul de γ_{ji}^1 , il vient que $(\tilde{\gamma}_{ji}^{-1/2} \theta_{A_E(m_\beta), A_E(pq)})_\beta$ est une base orthonormale de $X_{E_{ji}^1}$ si $(A_{E(m_\beta)})_\beta$ est une base orthonormale de $A_E(Mpq)$.

Par suite

$$\text{Ind}(E_{ji}^1) = \tilde{\gamma}_{ji} \sum_\beta \theta_{A_E(m_\beta), E(pq), A_E(pq)} = \tilde{\gamma}_{ji} \gamma_{ij} \sum_\beta \theta_{A_E(m_\beta), A_E(m_\beta)} = \lambda_{ij}^2 \pi'_E(pq).$$

Donc $\lambda_{ji}^1 = \lambda_{ij}$. ▣

2.8. LEMME. Soit $E' \in E(M, N)$ d'indice fini.

(i) Il existe une espérance $E' \in E(M, N)$ telle que $E_{ij} = E'_{ij}$ pour tout $(i, j) \in t$ $\| \text{Ind}(E) \| = \text{Inf} \{ \| \text{Ind}(F) \| \text{ avec } F_{ij} = E'_{ij} \}$.

(ii) Si l'inclusion de N dans M est indécomposable alors cette espérance est unique et d'indice scalaire.

Preuve. Pour $\gamma = (\gamma_{ij})_{(i,j) \in A}$ dans $[0, 1]^{\text{card}(A)}$, posons

$$f_k(\gamma) = \sum_{j \in A_k} [E_{kj}] \gamma_{kj}^{-1} \quad \text{où } A_k = \{j; (k, j) \in A\},$$

et

$$f(\gamma) = \text{Max}_k f_k(\gamma).$$

Pour tout (k, j) dans A il existe $c_{kj} > 0$ tel que pour $\gamma_{kj} \leq c_{kj}$ on ait

$$f(\gamma) \geq f_k(\gamma) \geq [E_{kj}] \gamma_{kj}^{-1} > \|\text{Ind}(E)\|.$$

Soit $C = \{\gamma ; c_{kj} \leq \gamma_{kj} \text{ et } \sum_k \gamma_{kj} = 1\}$. La fonction f est continue sur le compact C et y atteint son minimum. Compte tenu de la définition de C c'est aussi le minimum de f sur tous les γ définissant une espérance. D'où l'existence de E dont la norme de l'indice est minimum.

(ii) Considérons le graphe bicolore associé à la matrice d'indices Γ_E de E . Il admet pour sommets m points notés l_1, \dots, l_m et n points notés c_1, \dots, c_n . Ce graphe est connexe puisque l'inclusion est indécomposable ([3], 1.3). Remarquons que si dans la colonne j de la matrice il n'y a qu'un seul terme non nul à la ligne i alors, d'une part il n'y a qu'une arête de sommet c_j et d'autre part γ_{ij} vaut 1. Nous supprimons alors γ_{ij} de la liste des variables, le sommet c_j et l'arête correspondante du graphe qui reste connexe. Nous dirons que l_i est à distance d de l_k s'il existe un chemin reliant l_i à l_k et passant par d sommets (c_j) et s'il n'en existe pas passant par moins de d sommets. On a toujours $1 \leq d \leq D = \text{Min}(n, m - 1)$.

Posons $a = \|\text{Ind}(E)\| = f(\gamma)$ et $K_0 = \{k ; f_k(\gamma) < a\}$. Supposons que E n'est pas d'indice scalaire, alors K_0 est non vide. Soit $K_d = \{i ; l_i \text{ est à distance } d \text{ d'un } k \text{ de } K_0\}$. Pour tout $k \in K_0$ il est possible de diminuer tout les $(\gamma_{kj})_j$ en conservant $f_k(\gamma) < a$. Pour tout $i \in K_1 \setminus K_0$ on peut alors augmenter les (γ_{ij}) pour conserver $\sum_i \gamma_{ij} = 1$. Pour tout $k \in K_1 \setminus K_0$ la valeur $f_k(\gamma)$ a donc strictement diminué et on a $f_k(\gamma) < a$ pour tout $k \in K_0 \cup K_1$. Il suffit d'itérer le procédé en partant cette fois de $K_0 \cup K_1$ et on obtient $f_k(\gamma) < a$ pour tout $k \in K_0 \cup K_1 \cup K_2$. On obtient donc au bout de D itérations maximum $f_k(\gamma) < a$ pour tout k . Ce qui contredit le fait que $\|\text{Ind}(E)\|$ est minimum. Donc E est d'indice scalaire.

Supposons qu'il existe deux espérances distinctes E_1 et E_2 d'indice minimum. Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $E = \alpha E_1 + (1 - \alpha) E_2$.

On a alors $\Gamma = \alpha \Gamma_1 + (1 - \alpha) \Gamma_2$ et il existe (k, l) tel que $\gamma_{kl}^1 \neq \gamma_{kl}^2$. Il en résulte pour tout $(i, j) \in A$ on a

$$(\gamma_{ij})^{-1} \leq \alpha (\gamma_{ij}^1)^{-1} + (1 - \alpha) (\gamma_{ij}^2)^{-1}$$

avec inégalité stricte pour (k, l) .

Par suite, soit $\|\text{Ind}(E)\| < \|\text{Ind}(E_1)\|$, soit $\|\text{Ind}(E)\| = \|\text{Ind}(E_1)\|$ et $\text{Ind}(E)$ n'est pas scalaire. Dans les deux cas on obtient une contradiction.

2.9. THÉORÈME. Soit $N \subset M$ une paire d'algèbres de von Neumann avec des centres de dimension finie, telle qu'il existe une espérance conditionnelle dans $E(M, N)$ d'indice fini. Alors

- (i) Il existe une espérance conditionnelle dont la norme de l'indice est minimale.
- (ii) Si l'inclusion est indécomposable cette espérance est une application bécarre, elle est unique et d'indice scalaire.

(iii) Parmi les espérances minimales il en existe une dont l'indice est minimal; elle est unique et c'est une application bécarre dont l'indice est à valeurs dans $Z(M) \cap Z(N)$.

Preuve. Pour tout $(i, j) \in A$ notons E_{ij} l'espérance minimale de $E(M_{ij}, N_{ij})$ (Théorème 1.8) et considérons ensuite une espérance E dont la norme de l'indice est minimale pour les (E_{ij}) (lemme 2.8). Comme les (E_{ij}) sont des applications bécarres il en est de même pour E (Proposition 2.2 iii)). Soit $F \in E(M, N)$ telle que $\|\text{Ind}(F)\| \leq \|\text{Ind}(E)\|$. La matrice Γ_F et les espérances (E_{ij}) définissent une espérance E' (Proposition 2.3) telle que $\text{Ind}(E') \leq \text{Ind}(F)$ et on a donc $\|\text{Ind}(E')\| \leq \|\text{Ind}(F)\| \leq \|\text{Ind}(E)\|$.

D'après la minimalité de E on a $\|\text{Ind}(E')\| = \|\text{Ind}(E)\|$ et par suite $\|\text{Ind}(F)\| = \|\text{Ind}(E)\|$. D'où l'assertion (i).

Si l'inclusion est indécomposable alors E est d'indice scalaire (lemme 2.8 ii)). Si pour tout $(i, j) \in A$ on a $F_{ij} = E_{ij}$ alors $F = E$; sinon on a $\text{Ind}(E') < \text{Ind}(F)$, mais par unicité $E = E'$; d'où une contradiction. Ceci prouve l'assertion (ii).

Dans le cas général, soit (r_h) les projecteurs minimaux de $Z(M) \cap Z(N)$. On vérifie aisément que les inclusions de N_{r_h} dans M_{r_h} sont indécomposables et que pour tout $G \in E(M, N)$ on a $\text{Ind}(G) = \sum_h \text{Ind}(E_{r_h})$. L'assertion (iii) résulte alors immédiatement de (ii). ▣

3. ESPÉRANCE MINIMALE PRÉSERVANT UNE TRACE

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à une inclusion $N \subset M$ d'algèbres de von Neumann finies. Toutes les traces considérées seront supposées normales et fidèles.

3.1. DÉFINITION ([3], Définition 3.7.1). Soient $N \subset M$ une paire d'algèbres de von Neumann finies, τ une trace normalisée sur M et E l'espérance conditionnelle de $E(M, N)$ qui respecte cette trace. Nous dirons que τ est une *trace de Markov de module β* si τ s'étend en une trace finie τ^1 sur $\mathcal{L}_N(X_E)$ telle que pour tout x de M on ait

$$\beta \tau^1(xe) = \tau(x)$$

où e désigne le projecteur de $\mathcal{L}_N(X_E)$ défini par E .

3.2. PROPOSITION. Reprenons les données précédentes. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) τ est une trace de Markov de module β .
- (ii) E est d'indice fini scalaire et $[E] = \beta$.

Lorsque ces conditions sont remplies on a $\tau^1 = \tau \circ E^1$.

Preuve. (i) \Rightarrow (ii). Puisque τ^1 prolonge τ il existe une unique espérance conditionnelle E' telle que $\tau^1 = \tau \circ E'$. On a alors pour tout x de M

$$\tau(x) = \beta \tau^1(xe) = \beta \tau(E'(xe)) = \beta \tau(xE'(e)).$$

D'où $\tau(x(E'(e) \cdot \beta^{-1})) = 0$ et donc $E'(e) = \beta^{-1}$.

Le poids opératoire $F = \beta E'$ de $\mathcal{L}_N(X_E)$ sur M est tel $F(e) = 1$. Donc E est d'indice fini et $[E] = \beta$ ([1], Théorème 3.5).

(ii) \Rightarrow (i). Posons $\tau^1 = \tau \circ E^1$. Pour tout x, y, x' et y' dans M on a

$$\begin{aligned} \tau^1(xeyx'ey') &= \tau(xE^1(eyx'e)y') = \\ &= \tau(xE^1(E(yx')e)y') = & \text{([1], Proposition 3.2 (ii))} \\ &= \tau(xE(yx')\beta^{-1}y') = \beta^{-2}\tau(E(yx')y'x) = \\ &= \beta^{-1}\tau(E(yx')E(y'x)) = \beta^{-2}\tau(E(y'x)E(yx')) = \tau^1(x'ey'xey). \end{aligned}$$

Par linéarité et normalité il résulte de cette égalité que τ^1 est une trace. De plus pour tout $x \in M$ on a

$$\beta \tau^1(xe) = \beta \tau \circ E^1(xe) = \tau(x). \quad \square$$

3.3. NOTATIONS. Dans toute la suite nous considérons une paire $N \subset M$ d'algèbres de von Neumann finies avec des centres de dimension finie. Nous conservons les données du paragraphe 2 et nous désignons par tr_i la trace normalisée sur M_i ; nous définissons la *matrice des traces* $T = (c_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbf{R}_+)$ par $c_{ij} = \text{tr}_i(p_i q_j)$ ([3], Définition 3.5.1).

Une trace normalisée τ sur M est déterminée par un vecteur $\vec{s} = (s_i) \in \mathbf{R}_+^m$ tel que $s_i = \tau(p_i)$. Pour tout x de M on a donc

$$\tau(x) = \sum_{ij} s_i \text{tr}_i(p_i q_j x q_j).$$

Posons $\vec{t} := \vec{s} T$. On a alors

$$t_j = \sum_k s_k c_{kj} = \tau(q_j).$$

Définissons enfin la matrice $\tilde{T} = (\tilde{c}_{ij})_{i,j} \in M_{n,m}(\mathbf{R}_+)$ par

$$\tilde{c}_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij}^2 c_{ij}^{-1} & \text{si } (i, j) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{([3], Définition avant Proposition 3.6.8).}$$

3.4. LEMME. Soient $E \in E(M, N)$ et τ une trace finie sur M . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) E préserve τ .

(ii) Pour tout (i, j) l'espérance E_{ij} préserve la trace normalisée tr_{ij} sur M_{ij} et on a

$$t_j \gamma_{ij} = s_i c_{ij}.$$

Preuve. Supposons que $\tau \circ E = \tau$. Pour tout $x \in M_{ij}$ on a

$$\begin{aligned} \tau(E_{ij}(x)) &= \gamma_{ij}^{-1} \tau(p_i E(x)) = \gamma_{ij}^{-1} \tau \circ E(p_i E(x)) = \\ &= \gamma_{ij}^{-1} \tau(E(p_i)E(x)) = \gamma_{ij}^{-1} \gamma_{ij} \tau(E(x)) = \tau(x). \end{aligned}$$

Comme tr_{ij} est proportionnelle à la restriction de τ à M_{ij} on a donc $\text{tr}_{ij} \circ E_{ij} = \text{tr}_{ij}$. De plus ...

$$\gamma_{ij} t_j = \tau \circ E(p_i q_j) = \tau(p_i q_j) = s_i c_{ij}.$$

Réciproquement l'unique espérance G telle que $\tau \circ G = \tau$ coïncide avec E car $\Gamma_E = \Gamma_G$ et $G_{ij} = E_{ij}$ pour tout (i, j) . ▣

3.5. PROPOSITION. Soit $E \in E(M, N)$ préservant une trace finie τ sur M . Posons $\bar{\delta} = \bar{s} T \bar{T} = \bar{i} \bar{T}$. Alors $\text{Ind}(E) = \sum_i \delta_i s_i^{-1} p_i$.

Preuve. D'après le lemme précédent on a $\bar{\gamma}_{ji} = \bar{c}_{ji} t_j s_i^{-1}$. D'où (Théorème 2.5)

$$\text{Ind}(E) = \sum_i \left(\sum_j \bar{c}_{ji} t_j s_i^{-1} \right) p_i = \sum_i \delta_i s_i p_i. \quad \text{▣}$$

3.6. COROLLAIRE. Soit $E \in E(M, N)$ préservant une trace finie τ sur M . Alors $\text{Ind}(E)$ est scalaire si et seulement si \bar{s} est vecteur propre de $T \bar{T}$. Ce scalaire est la valeur propre associée.

Preuve. L'indice de E est scalaire et vaut β si et seulement si pour tout i on a $\delta_i = \beta s_i$, c'est-à-dire si \bar{s} est vecteur propre de $T \bar{T}$ pour la valeur propre β . ▣

3.7. COROLLAIRE. Soit $N \subset M$ une paire d'algèbres de von Neumann avec $M = \bigoplus_{i=1}^m M_{\mu_i}(\mathbb{C})$ et $N = \bigoplus_{j=1}^n N_{\nu_j}(\mathbb{C})$. Soit E une espérance conditionnelle préservant une trace. Alors

$$\text{Ind}(E) = \sum_{ij} \left(\sum \lambda_{ij} t_j \nu_j^{-1} \right) \mu_i s_i^{-1} p_i.$$

Preuve. En effet dans ce cas on a

$$c_{ij} = \lambda_{ij} \nu_j \mu_i^{-1}$$

d'où

$$\tilde{c}_{ji} = \lambda_{ij} \mu_i \nu_j^{-1}.$$

Il suffit ensuite d'appliquer la proposition 3.5. ▣

3.8. REMARQUES. Dans la situation du corollaire précédent, définissons le vecteur \bar{s}' par $s'_i = \mu_i^{-1} s_i$ pour tout i et le vecteur $\bar{t}' = \bar{s}' L$ (s'_i représente la trace d'un projecteur minimal dans M_i et t'_j la trace d'un projecteur minimal de N_j). On obtient alors

$$(i) \text{Ind}(E) = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{ij} t'_j \right) s_i'^{-1} p_i.$$

(ii) $\text{Ind}(E)$ est scalaire si et seulement si \bar{s}' est vecteur propre de $L'L$.

(iii) $\text{Max}(\sum_i \lambda_{ij} t'_j s_i'^{-1})$ est la plus petite constante K telle que $KE - \text{Id}$ soit

complètement positive.

Le théorème 6.1 de [8] donne la valeur de la plus petite constante K telle que $KE - \text{Id}$ soit positive; c'est avec nos notations $\text{Max}_i (\sum_j \text{Min}(\lambda_{ij}, \nu_j) t'_j s_i'^{-1})$.

3.9. THÉORÈME. Soit $N \subset M$ une inclusion indécomposable entre deux algèbres de von Neumann finies avec des centres de dimension finie, telle qu'il existe un espérance conditionnelle d'indice fini appartenant à $E(M, N)$.

(i) Il existe une unique trace de Markov τ sur M .

(ii) Le module β de τ est le rayon spectral de $T\bar{T}$.

(iii) Soit E l'espérance conditionnelle qui préserve τ . Alors $[E] = \beta$.

(iv) L'espérance E est l'unique espérance ayant un indice de norme minimale parmi toutes les espérances préservant une trace.

Preuve. Comme l'inclusion est indécomposable la matrice $T\bar{T}$ est irréductible (généralisation du lemme 1.3.2. b de [3]). A partir du résultat de la proposition 3.5 il suffit d'appliquer la théorie de Perron-Frobenius ([9], Théorème 2.1 et 2.2) et la proposition 3.2. ▣

REMARQUE. Les assertions (i) et (ii) du théorème précédent sont démontrées dans le corollaire 3.7.4 de [3]. L'indice de N dans M au sens de [3] (Définition 3.7.5) est donc l'indice de l'espérance minimale préservant une trace.

Remerciements. Je tiens à remercier Madame C. Anantharaman, M. Baillet et Y. Denizau pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour leurs remarques pendant l'élaboration de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

1. BAILLET, M.; DENIZEAU, Y.; HAVET, J. F., Indice d'une espérance conditionnelle, *Compositio Math.*, (1988), 199–236.
2. COMBES, F.; DELAROCHE, C., Groupe modulaire d'une espérance conditionnelle dans une algèbre de von Neumann, *Bull. Soc. Math. France*, **103**(1975), 385–426.
3. GOODMAN, F. M.; DE LA HARPE, P.; JONES, V., Coxeter graphs and towers of algebras, (Chapitres 1 à 3) Preprint, Genève.
4. HIAI, F., Minimizing indices of conditionnal expectations onto a subfactor, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **24**(1989), 673–678.
5. JONES, V. F. R., Index for subfactors, *Invent. Math.*, **72**(1983), 1–25.
6. KOSAKI, H., Extension of Jones' theory on index to arbitrary factors, *J. Funct. Anal.*, **66**(1986), 123–140.
7. LONGO, R., Index of subfactors and statistics of quantum fields, *Comm. Math. Phys.*, to appear.
8. PIMSNER M.; POPA, S., Entropy and index for subfactors, *Ann., Sci., École Norm. Sup.*, **19**(1986), 57–106.
9. VARGA, R. J., *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, Inc.

JEAN-FRANÇOIS HAVET
Département de Mathématiques,
Université d'Orléans, B.P. 6759,
45067 Orléans Cedex 2,
France.

Received March 2, 1989; revised September 28, 1989.