J. OPERATOR THEORY
24(1990), 137–154

EXTENSION DU THÉORÈME DE BROWN-DOUGLAS-FILLMORE AU CAS DES OPÉRATEURS NON BORNÉS

JEAN-PHILIPPE LABROUSSE, BRIGITTE MERCIER

0. INTRODUCTION

En 1973 L. Brown, R. G. Douglas et P. A. Fillmore ont démontré dans [1] un résultat sur la caractérisation de certaines classes d'équivalence d'opérateurs par leur tableau spectral. Ce travail est destiné à étendre ce résultat aux opérateurs non bornés, extension déjà partiellement réalisée dans [7]. Il nous a paru intéressant, en outre, d'établir quelques propriétés des opérateurs essentiellement normaux non bornés, même si elles ne sont pas pertinentes pour la démonstration du résultat principal.

NOTATIONS ET RAPPELS DE RÉSULTATS. Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe et soit A un opérateur linéaire défini dans $\mathscr{H}$ et à valeurs dans $\mathscr{H}$. On notera $\mathrm{D}(A)$ son domaine, $\mathrm{N}(A)$ son noyau et $\mathrm{R}(A)$ son image. On notera

$$\mathrm{G}(A) = \{\{u, Au\} \mid u \in \mathrm{D}(A)\} \subset \mathscr{H} \times \mathscr{H},$$

le *graphe de A* et on dira que A est *fermé* si $\mathrm{G}(A)$ est fermé. Si A est fermé et $\mathrm{D}(A)$ est dense dans $\mathscr{H}$ alors il existe un opérateur fermé à domaine dense A^* défini dans $\mathscr{H}$ et à valeurs dans $\mathscr{H}$, *l'adjoint de A*. Alors (cf. [8], § 118) l'opérateur $I + A^*A$ défini dans $\mathscr{H}$ et à valeurs dans $\mathscr{H}$ est fermé, surjectif et a un domaine dense dans $\mathscr{H}$; si on pose $R_A = (I + A^*A)^{-1}$, on trouve: $(AR_A)^* = A^*R_{A^*}$ d'ou $\forall\, u \in \mathscr{H}$,

$$\|2AR_Au\|^2 + \|(2R_A - I)u\|^2 = \|u\|^2. \tag{0.1}$$

De (0.1) on déduit immédiatement que:

$$\|AR_A\| \leqslant 1/2; \quad \|R_A\| \leqslant 1. \tag{0.2}$$

La projection orthogonale sur $G(A)$ dans $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ est donnée par:

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^* R_{A^*} \\ A R_A & I - R_{A^*} \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

(cf. [9], [2]).

On notera $C(\mathscr{H})$ l'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense dans $\mathscr{H}$ et à valeurs dans $\mathscr{H}$, muni de la métrique g définie par

$$g(A, B) = \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\|, \quad \forall\, A, B \in \mathscr{H}. \tag{0.4}$$

Cette métrique induit la topologie uniforme habituelle sur $L(\mathscr{H})$, le sous ensemble des éléments bornés de $C(\mathscr{H})$ (cf. [2] et la bibliographie qui y est citée). Posons encore

$$S_A = (I + A^* A)^{-1/2}.$$

Alors

$$(A S_A)^* = A^* S_{A^*}$$

et

$$\|A S_A u\|^2 + \|S_A u\|^2 = \|u\|^2, \quad \forall\, u \in \mathscr{H}. \tag{0.5}$$

Remarque 0.1. L'identité $(A S_A)^* = A^* S_{A^*}$ entraîne que si $u \in D(A^*)$,

$$A^* S_{A^*} u = S_A A^* u$$

et

$$(I + S_A)^{-1} A^* u = A^* (I + S_{A^*})^{-1} u. \tag{0.6}$$

Soit $A \in C(\mathscr{H})$. Posons $c(A) = \inf \dfrac{\|Au\|}{\|u\|}$ où l'inf est pris sur tous les $u \in D(A) \cap N(A)^{\perp}$. $c(A)$ est appelée la *conorme* de A et $R(A)$ est fermé si et seulement si $c(A) > 0$.

Si $A \in C(\mathscr{H})$ avec $R(A)$ fermé et $\max\{\dim N(A), \dim N(A)^*\} < \infty$ on dira que A est *Fredholm* (noté $A \in F(\mathscr{H})$). Si $A \in C(\mathscr{H})$ avec $R(A)$ fermé et $\min\{\dim N(A), \dim N(A^*)\} < \infty$, on dira que A est *semi-Fredholm* (noté $A \in SF(\mathscr{H})$). Evidemment $F(\mathscr{H}) \subset SF(\mathscr{H})$ et si $A \in SF(\mathscr{H})$, $\mathrm{Ind}(A) = \dim N(A) - \dim N(A^*)$ est appelé *l'indice* de A. Si $A \in C(\mathscr{H})$ avec $R(A)$ fermé et si $\forall\, n \in \mathbf{N}$ on a $N(A^n) \subset R(A)$ on dira que A est *régulier* (cf. [5], Définition 4.1.1 et Proposition 4.1.1). On posera $\mathrm{Reg}(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid A - \lambda I \text{ est régulier}\}$. Si $A, B \in C(\mathscr{H})$ on dira que A est *faiblement compact-équivalent* à B (et on notera $A \sim_K B$) si $P_{G(A)} - P_{G(B)}$ est un opérateur compact de $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ dans lui-

-même. Dans ce cas on peut montrer que l'opérateur $I + A^*B \in \mathrm{F}(\mathscr{H})$ et on dira que A est *fortement compact-équivalent* à B (et on notera $A \approx_K B$) si $A \sim_K B$ et si $\mathrm{Ind}(I + A^*B) = 0$ (pour toutes ces définitions voir [6]). Enfin on écrira:

$$\rho_e(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid A - \lambda I \in \mathrm{F}(\mathscr{H})\}$$

$\rho_e(A)$ est appelé le *résolvant essentiel* de A.

PROPOSITION 0.2 (voir, par exemple, [3]). *Soit $A \in L(\mathscr{H})$ avec* $\mathrm{R}(A)$ *fermé. Alors il existe un unique $B \in L(\mathscr{H})$ tel que:*
$ABA = A$; $BAB = B$;
$AB = (B^*A^*)^*$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{R}(A)$*;*
$BA = (A^*B^*)^*$ et $I - BA$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{N}(A)$*; B est appelé l'inverse de Moore-Penrose de A.*

REMARQUE 0.3. $\mathrm{R}(B)$ est fermé et si B est l'inverse de Moore-Penrose de A alors A est l'inverse de Moore-Penrose de B. Enfin si A est inversible, alors A^{-1} est l'inverse de Moore-Penrose de A.

Nous incluons ici une proposition dont la teneur est bien connue mais dont la démonstration est difficile à trouver dans la littérature. Nous avons besoin tout d'abord d'un lemme:

LEMME 0.4. *Soit $C \in L(\mathscr{H})$, symétrique tel que $0 \leqslant C \leqslant 1$. Alors:*

$$\|C(I - C)^n\| < 1/(2n), \quad \forall\, n \in \mathbf{N}. \tag{0.7}$$

Démonstration.

$$(I - C + C)^{2k} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} C^j (I - C)^{2k-j}, \quad \forall\, k \in \mathbf{N},$$

$$(I - C - C)^{2k} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (-1)^j C^j (I - C)^{2k-j}, \quad \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Donc $I \geqslant I - (I - 2C)^{2k} \geqslant 4kC(I - C)^{2k-1}$ ou encore: $\forall\, u \in \mathscr{H}$, $\langle C(I - C)^{2k-1}u, u\rangle \leqslant \leqslant \|u\|^2/(4k)$ d'où:

$$\|C(I - C)^{2k-1}\| < 1/(4k - 2), \quad \forall\, k \in \mathbf{N}. \tag{0.8}$$

En outre, $|\langle C(I - C)^{2k}u,\ u\rangle|^2 = |\langle C(I - C)^{2k-1}(I - C)u, u\rangle|^2$ et en utilisant l'inégalité de Schwarz généralisée (cf. [8], § 104) on trouve

$$|\langle C(I-C)^{2k}u, u\rangle|^2 \leqslant \langle C(I-C)^{2k-1}u, u\rangle \, \langle C(I-C)^{2k+1}u, u\rangle \leqslant$$

$$\leqslant 1/[(4k)(4k+4)] \, \|u\|^2 < 1/(4k)^2\|u\|^4.$$

Donc

$$\|C(I-C)^{2k}\| < 1/(4k), \quad \forall\, k \in \mathbf{N} \tag{0.9}$$

et le lemme se déduit de (0.8) et de (0.9).

PROPOSITION 0.5. *Soit $A \in L(\mathscr{H})$ un opérateur symétrique positif tel que $\|A\| \leqslant 1$. Alors il existe une suite de polynomes $\{p_n(A)\}$ satisfaisant les conditions suivantes:*

1) *$p_n(A)$ est de degré 2^{n-1},*
2) *$p_n(0) = 0$.*

Si $B \in L(\mathscr{H})$ est l'unique opérateur symétrique positif tel que $B^2 = A$

3) *$0 \leqslant p_n(A) \leqslant B \leqslant I$,*
4) *$\|B - p_n(A)\| < 1/n, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. Posons

$$p_1(A) = A/2$$

$$p_{n+1}(A) = p_n(A) + [A - p_n^2(A)]/2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{0.10}$$

1) et 2) se démontrent aisément par induction sur n. Pour démontrer 3) observons que

$$B - p_1(A) = B(I - B/2) \geqslant 0.$$

d'où

$$0 \leqslant p_1(A) \leqslant B \leqslant I$$

Supposons 3) démontré pour n; alors

$$B - p_{n+1}(A) = B - p_n(A) - [B^2 - p_n^2(A)]/2.$$

Donc

$$B - p_{n+1}(A) = [B - p_n(A)]\,[I - (B + p_n(A))/2]. \tag{0.11}$$

Comme $B - p_n(A)$ et $I - (B + p_n(A))/2$ sont tous deux positifs (par hypothèse d'induction) et commutent entre eux (ils sont tous deux des polynomes en B) leur produit est également positif. Donc $p_{n+1}(A) \leqslant B \leqslant I$.

En outre d'après (0.10) et l'hypothèse d'induction, $p_{n+1}(A)$ est la somme de deux opérateurs positifs et par conséquent positif lui même, ce qui démontre 3).

Finalement $I - (B + p_n(A))/2 = I - B/2 - p_n(A)/2 \leqslant I - B/2$.
Donc de (0.11) on déduit que

$$B - p_{n+1}(A) \leqslant [B - p_n(A)]\,(I - B/2)$$

et par induction que

$$B - p_n(A) \leqslant [B - p_1(A)]\,(I - B/2)^{n-1}, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$$

d'où

$$\|B - p_n(A)\| \leqslant \|B(I - B/2)^n\| = 2\|(B/2)\,(I - B/2)^n\|, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$$

et 4) se déduit du lemme 0.2 en prenant $C = B/2$.

1. BISSECTEURS

DÉFINITION 1.1. Soit $A \in C(\mathscr{H})$. Posons $\tilde{A} = AS_A(I + S_A)^{-1}$. Pour des raisons que nous exposerons ci-dessous nous appelerons $\tilde{A}$ le *bissecteur* de A. Cette notion a été introduite dans [4].

PROPOSITION 1.2. *Soit* $A \in C(\mathscr{H})$. *Alors*
(1) $\|\tilde{A}\| \leqslant 1$,
(2) $(\tilde{A})^* = \tilde{A^*}$,
(3) $R_{\tilde{A}} = (I + S_A)/2$,
(4) $\tilde{A}R_{\tilde{A}} = AS_A/2$.

Démonstration.

(1) $$\|\tilde{A}\| \leqslant \|AS_A\|\,\|(I + S_A)^{-1}\| \leqslant 1, \qquad \text{(en utilisant (0.5))}$$

(2) $$(\tilde{A})^* = (I + S_A)^{-1}A^*S_{A^*} = A^*S_{A^*}(I + S_{A^*})^{-1} = \tilde{A^*}, \qquad \text{(en utilisant (0.6))},$$

(3) $$\begin{aligned} I + \tilde{A}^*\tilde{A} &= I + (I + S_A)^{-1}A^*S_{A^*}AS_A(I + S_A)^{-1} = \\ &= I + (I + S_A)^{-1}(I - R_A)(I + S_A)^{-1} = 2(I + S_A)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$R_{\tilde{A}} = (I + S_A)/2$$

(4) $$\tilde{A}R_{\tilde{A}} = AS_A(I + S_A)^{-1}(I + S_A)/2 = AS_A/2.$$

PROPOSITION 1.3. *Soit* $M_A = \begin{pmatrix} S_A & A^*S_{A^*} \\ AS_A & -S_{A^*} \end{pmatrix}$. *Alors* M_A *est un opérateur unitaire et symétrique de* $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ *sur lui-même qui laisse invariant le graphe de* $\tilde{A}$ *et envoie le graphe de* A *sur* $\mathscr{H} \times \{0\}$ *et réciproquement.*

Démonstration. On vérifie sans difficulté que $M_A^* = M_A$ et que $M_A M_A = I$. En outre, soit $\{u, v\} \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$. Alors, en utilisant (0.3) et la proposition 1.2, on trouve:

$$M_A\{u, v\} = \{u, v\} \Leftrightarrow (I + M_A)/2\{u, v\} = \{u, v\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{G(\tilde{A})}\{u, v\} = \{u, v\} \Leftrightarrow \{u, v\} \in G(\tilde{A}).$$

Finalement si $u = D(A)$ on a

$$M_A\{u, Au\} = \{S_A u + A^*S_{A^*}Au, 0\} \in \mathscr{H} \times \{0\},$$

et

$$M_A\{u, 0\} = \{S_A u, AS_A u\} \in G(A).$$

REMARQUE 1.4. C'est cette propriété de $G(\tilde{A})$ qui nous a amené à appeler $\tilde{A}$ le bissecteur de A: si $\mathscr{H} = \mathbf{R}$, $G(\tilde{A})$ est la droite bissectrice de l'angle compris entre l'axe des abcisses et $G(A)$.

PROPOSITION 1.5 (cf. [4]). *Soit* $A \in L(\mathscr{H})$. *Alors* $\|\tilde{A}\| < 1$. *Plus précisément, si* A *est borné, alors*

$$\|\tilde{A}\| = \frac{\|A\|}{1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}}.$$

Réciproquement si $\|\tilde{A}\| < 1$, *alors* A *est borné et*

$$\|A\| = \frac{2\|\tilde{A}\|}{1 - \|\tilde{A}\|^2}.$$

Démonstration. Soit A borné; $\forall\, u \in \mathscr{H}$ on a

$$\|u\|^2 = \|S_A u\|^2 + \|AS_A u\|^2 \leqslant (1 + \|A\|^2)\|S_A u\|^2.$$

Donc $\|S_A u\|^2 \geqslant \dfrac{1}{1 + \|A\|^2}\|u\|^2$ et par conséquent

$$\|AS_A u\|^2 = \|u\|^2 - \|S_A u\|^2 \leqslant \frac{\|A\|^2}{1 + \|A\|^2}\|u\|^2.$$

D'où

$$\|AS_A\| \leqslant \frac{\|A\|}{\sqrt{1 + \|A\|^2}} . \tag{1.1}$$

On a aussi

$$\|S_A^{-1}u\| \leqslant \sqrt{1 + \|A\|^2}\,\|u\|$$

et par conséquent

$$\langle u,\ S_A^{-1}u\rangle \leqslant \sqrt{1 + \|A\|^2}\,\|u\|^2.$$

L'inégalité de Schwarz généralisée (cf. [8], § 104) donne alors

$$|\langle u,\ S_A v\rangle|^2 \leqslant \langle u,\ S_A u\rangle\,\langle v,\ S_A v\rangle, \quad \forall\, u,\, v \in \mathscr{H}.$$

En prenant $v = S_A^{-1}u$ on obtient

$$\|u\|^4 \leqslant \langle u,\ S_A u\rangle\,\langle u,\ S_A^{-1}u\rangle$$

d'où

$$\langle u,\ S_A u\rangle \geqslant \frac{1}{\sqrt{1 + \|A\|^2}}\,\|u\|^2.$$

Donc

$$\|(1 + S_A)u\|^2 = \|u\|^2 + \|S_A u\|^2 + 2\langle u,\ S_A u\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 + \frac{1}{1 + \|A\|^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + \|A\|^2}}\right)\|u\|^2$$

et finalement

$$\|(I + S_A)^{-1}\| \leqslant \frac{\sqrt{1 + \|A\|^2}}{1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}} . \tag{1.2}$$

En utilisant (1.1) et (1.2) on trouve

$$\|\tilde{A}\| \leqslant \|AS_A\|\,\|(I + S_A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A\|}{1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}} < 1. \tag{1.3}$$

Réciproquement, si $\|B\| < 1$ on voit que $I - B^*B$ est inversible et par conséquent $A = 2B(I - B^*B)^{-1}$ est borné. Il est facile de vérifier que $\tilde{A} = B$ et comme

$$\langle (I - \tilde{A}^*\tilde{A})u,\ u\rangle = \|u\|^2 - \|\tilde{A}u\|^2 \geqslant (1 - \|\tilde{A}\|^2)\|u\|^2$$

on voit que $\|(I - \tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{1 - \|\tilde{A}\|^2}$, ce qui donne $\|A\| \leqslant \dfrac{2\|\tilde{A}\|}{1 - \|\tilde{A}\|^2}$, d'où $\|A\|\,\|\tilde{A}\|^2 + 2\|\tilde{A}\| - \|A\| \geqslant 0$. On peut exclure le cas où $A = 0$, la proposition étant alors évidente. On déduit donc de l'inégalité précédente et de (1.3) que

$$\|\tilde{A}\| \geqslant \frac{-1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}}{\|A\|} = \frac{\|A\|}{1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}} \geqslant \|\tilde{A}\|$$

d'où on déduit immédiatement le reste de la démonstration.

DÉFINITION 1.6. Nous noterons $C_0(\mathscr{H})$ l'ensemble des contractions T de $L(\mathscr{H})$ (c'est à dire des $T \in L(\mathscr{H})$ avec $\|T\| \leqslant 1$) telles que $\mathrm{N}(I - T^*T) = \{0\}$, muni de la topologie induite par celle de $L(\mathscr{H})$.

PROPOSITION 1.7 (cf. [4]). *L'application $A \mapsto \tilde{A}$ de $C(\mathscr{H})$ dans $C_0(\mathscr{H})$ est bijective, ouverte, envoie les éléments non bornés de $C(\mathscr{H})$ sur les éléments de norme 1 de $C_0(\mathscr{H})$ et les éléments bornés de $C(\mathscr{H})$ sur les éléments de norme < 1 de $C_0(\mathscr{H})$.*

Démonstration. Montrons d'abord la surjectivité de l'application. Soit $B \in C_0(\mathscr{H})$. Nous avons déjà vu que si $\|B\| < 1$ il existe un $A \in L(\mathscr{H})$ tel que $B = \tilde{A}$. Si $\|B\| = 1$, posons

$$\mathrm{D}(A) = \mathrm{R}(I - B^*B);$$

et si

$$u = (I - B^*B)w \in \mathrm{D}(A),$$

$$Au = 2Bw.$$

Alors $A = C(\mathscr{H})$, A est non borné et $\tilde{A} = B$. En effet, $\mathrm{D}(A) = \mathrm{R}(I - B^*B)$ est dense dans $\mathscr{H}$. En outre A est fermé car si $\{u_n\}$ est une suite d'éléments de $\mathrm{D}(A)$ qui converge vers u dans $\mathscr{H}$ et telle que Au_n converge vers v dans $\mathscr{H}$, alors en posant $w_n = (I - B^*B)^{-1}u_n$ et $t_n = R_B^{-1}w_n$ on a

$$u_n = (I - B^*B)w_n = (2R_B - I)R_B^{-1}w_n = (2R_B - I)t_n \to u$$

$$Au_n = 2Bw_n = 2BR_Bt_n \to v$$

et par conséquent, en vertu de (0.1), $\{t_n\}$ est une suite de Cauchy et il existe $t \in \mathscr{H}$ tel que $t_n \to t$ avec

$$w = R_Bt, \quad u = (I - B^*B)w \in \mathrm{D}(A) \text{ et } v = 2Bw = Au.$$

Un calcul simple montre qu'alors $\tilde{A} = B$. Enfin A n'est pas borné car $\mathrm{D}(A) \neq \mathscr{H}$. En effet, si $\mathrm{D}(A) = \mathscr{H}$ alors $I - B^*B$ serait inversible ce qui entrainerait que

$\|B\| < 1$, contradiction. Finalement (cf. [2])

$$g^2(A, A') \leqslant \|R_A - R_{A'}\|^2 + \|R_{A^*} - R_{A'^*}\|^2 + 2\|AR_A - A'R_{A'}\|^2$$

et comme

$$\|R_A - R_{A'}\| \leqslant \|S_A - S_{A'}\| \, \|S_A\| + \|S_{A'}\| \, \|S_A - S_{A'}\| \leqslant 2\|S_A - S_{A'}\|$$

$$\|R_{A^*} - R_{A'^*}\| \leqslant \|S_{A^*} - S_{A'^*}\| \, \|S_{A^*}\| + \|S_{A'^*}\| \, \|S_{A^*} - S_{A'^*}\| \leqslant 2\|S_{A^*} - S_{A'^*}\|$$

$$\|AR_A - A'R_{A'}\|^2 \leqslant [\|AS_A - A'S_{A'}\| \, \|S_A\| + \|A'S_{A'}\| \, \|S_A - S_{A'}\|]^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2[\|AS_A - A'S_{A'}\|^2 + \|S_A - S_{A'}\|^2]$$

$$g^2(A, A') \leqslant 4[2\|S_A - S_{A'}\|^2 + \|S_{A^*} - S_{A'^*}\|^2 + \|AS_A - A'S_{A'}\|^2].$$

En outre

$$\|S_A - S_{A'}\| \leqslant 2g(\tilde{A}, \tilde{A}'); \quad \|S_{A^*} - S_{A'^*}\| \leqslant 2g(\tilde{A}, \tilde{A}')$$

et

$$\|AS_A - A'S_{A'}\| \leqslant 2g(\tilde{A}, \tilde{A}').$$

Donc

$$g^2(A, A') \leqslant 64\, g^2(\tilde{A}, \tilde{A}')$$

d'où

$$g(A, A') < 8\, g(\tilde{A}, \tilde{A}'). \tag{1.4}$$

Comme sur $C_0(\mathscr{H})$ la topologie uniforme est équivalente à celle induite par g (cf. [2]) la proposition est démontrée.

Ce résultat justifie la terminologie suivante:

DÉFINITION 1.8. Soit $A \in C(\mathscr{H})$. L'ensamble $\sigma_\infty(A) = \sigma_e(\tilde{A}) \cap \mathbf{C}$, où $\mathbf{C} = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \|\lambda\| = 1\}$, est appelé *spectre à l'infini* de A. On voit facilement que $\sigma_\infty(A) = \sigma(\tilde{A}) \cap \mathbf{C}$ et que si A est borné, $\sigma_\infty(A)$ est vide.

2. COMPALENCE

DÉFINITION 2.1. Soit $A, B \in C(\mathscr{H})$. Nous dirons que A et B sont *compalent* s'il existe un opérateur unitaire U tel que $A \approx_K UBU^*$.

REMARQUE 2.2. La définition 2.1 coïncide avec la définition habituelle (cf. [1]) si A et B sont bornés.

PROPOSITION 2.3.

$$A \approx_K UBU^* \Leftrightarrow U^*AU \approx_K B$$

La compalence est une relation d'équivalence sur $C(\mathscr{H})$.

Démonstration. Posons $C = UBU^*$. On verifie facilement que

$$R_C = UR_BU^*;\ R_{C^*} = UR_{B^*}U^*;\ CR_C = UBR_BU^*;\ C^*R_{C^*} = UB^*R_{B^*}U^*.$$

Donc en posant $V = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ on voit immédiatement que $P_{G(C)} = VP_{G(B)}V^*$; $I + A^*C = U(I + U^*A^*UB)U^*$. Donc

$$P_{G(U^*AU)} - P_{G(B)} = V^*(P_{G(A)} - VP_{G(B)}V^*)V = V^*(P_{G(A)} - P_{G(C)})V$$

est compact et $\mathrm{Ind}(I + U^*A^*UB) = \mathrm{Ind}(I + A^*C) = 0$.

La transivité de la relation s'établit de la même manière.

PROPOSITION 2.4. *Soit A, $B \in C(\mathscr{H})$ tels que A et B soient compalents. Alors*

1) $\rho_e(A) = \rho_e(B)$,

2) $\forall\ \lambda \in \rho_e(A)$, $\mathrm{Ind}(A - \lambda I) = \mathrm{Ind}(B - \lambda I)$.

Démonstration. En utilisant le théorème 3.1 de [6] on trouve

$$\rho_e(A) = \rho_e(UBU^*) = \rho_e(B)$$

$$\mathrm{Ind}(A - \lambda I) = \mathrm{Ind}(UBU^* - \lambda I) = \mathrm{Ind}(U(B - \lambda I)U^*) = \mathrm{Ind}(B - \lambda I),$$

$\forall\ \lambda \in \rho_e(A)$.

PROPOSITION 2.5. *Soit A, $B \in C(\mathscr{H})$. Alors*

$$\tilde{A} \text{ et } \tilde{B} \text{ sont compalents} \Rightarrow A \text{ et } B \text{ sont compalents.}$$

Démonstration. Sous les hypothèses de la proposition il existe un opérateur unitaire U tel que $\tilde{A} = U\tilde{B}U^* + K$. Posons $C = UBU^*$. Alors $\tilde{C} = U\tilde{B}U^*$ et

$$\tilde{A} = \tilde{C} + K \Rightarrow P_{G(\tilde{A})} - P_{G(\tilde{C})} \text{ est compact} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_A - S_C,\ S_{A^*} - S_{C^*},\ AS_A - CS_C \text{ sont compacts} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A - R_C,\ R_{A^*} - R_{C^*},\ AR_A - CR_C \text{ sont compacts} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{G(A)} - P_{G(C)} \text{ est compact} \Rightarrow A \sim_K C.$$

En outre si $V_{AC} = S_A S_C + A^* S_{A^*} C S_C$ on a

$$V_{AC} = (S_A - S_C)S_C + (A^* S_{A^*} - C^* S_{C^*})CS_C + R_C + C^*CR_C =$$

$$= I + \text{compact}.$$

Donc $V_{AC} \in F(\mathscr{H})$ et $\operatorname{Ind}(V_{AC}) = 0$. Or on voit facilement que $I + A^*C = S_{A^{-1}} V_{AC} S_{C^{-1}}$ et comme $S_{A^{-1}}$ et $S_{C^{-1}}$ sont Fredholm d'indices nuls

$$\operatorname{Ind}(I + A^*C) = \operatorname{Ind}(S_{A^{-1}}) + \operatorname{Ind}(V_{AC}) + \operatorname{Ind}(S_{C^{-1}}) = 0$$

(cf. [2], Théorème 2.1). Donc $A \approx_K C$.

Définition 2.6. Soit $A, B \in C(\mathscr{H})$. Alors nous dirons que A et B sont *strictement compalents* si $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont compalents.

Remarque 2.7. Soit A, $B \in L(\mathscr{H})$. Alors si A et B sont compalents au sens habituel (cl. [1]) ils sont strictement compalents.

Proposition 2.8. *Soit A, $B \in C(\mathscr{H})$, tels que $A \sim_K B$ et* $\mathrm{R}(A)$, $\mathrm{R}(B)$ *fermés. Alors $P_{\mathrm{N}(A)} - P_{\mathrm{N}(B)}$ est compact*

Démonstration. Soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments de $\mathscr{H}$ telle que $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\|u_n\| = 1$ Alors (cf. [6], Proposition 2.6)

$$\|(I - P_{\mathrm{G}(A)})\{(I - P_{\mathrm{N}(A)})P_{\mathrm{N}(B)}u_n, 0\}\| \geqslant \frac{c(A)}{\sqrt{1 + c^2(A)}} \|(I - P_{\mathrm{N}(A)})P_{\mathrm{N}(B)}u_n\|.$$

Or

$$(I - P_{\mathrm{G}(A)})\{(I - P_{\mathrm{N}(A)})P_{\mathrm{N}(B)}u_n, 0\} = (I - P_{\mathrm{G}(A)})\{P_{\mathrm{N}(B)}u_n, 0\} =$$

$$= (I - P_{\mathrm{G}(A)})P_{\mathrm{G}(B)}\{P_{\mathrm{N}(B)}u_n, 0\}.$$

Donc

$$\|(I - P_{\mathrm{N}(A)})P_{\mathrm{N}(B)}u_n\| \leqslant \frac{\sqrt{1 + c^2(A)}}{c(A)} \|(I - P_{\mathrm{G}(A)})P_{\mathrm{G}(B)}\{P_{\mathrm{N}(B)}u_n, 0\}\|$$

et comme $A \sim_K B \Rightarrow (I - P_{\mathrm{G}(A)})P_{\mathrm{G}(B)} = (P_{\mathrm{G}(A)} - P_{\mathrm{G}(B)})P_{\mathrm{G}(B)}$ est compact, il existe une sous suite de $\{u_n\}$ (notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité) telle que $\{(I - P_{\mathrm{N}(A)})P_{\mathrm{N}(B)}u_n\}$ soit convergente. Donc $(I - P_{\mathrm{N}(A)})P_{\mathrm{N}(B)}$ est compact et par symétrie entre A et B, $(I - P_{\mathrm{N}(B)})P_{\mathrm{N}(A)}$ est également compact.

Donc $P_{\mathrm{N}(A)} - P_{\mathrm{N}(B)} = (I - P_{\mathrm{N}(B)})P_{\mathrm{N}(A)} - [(I - P_{\mathrm{N}(A)})P_{\mathrm{N}(B)}]^*$ est compact.

3. OPÉRATEURS ESSENTIELLEMENT NORMAUX

DÉFINITION 3.1. Soit $A \in C(\mathscr{H})$. Nous dirons que A est *essentiellement normal* si

$$A^*A \approx_K AA^*.$$

REMARQUE 3.2. Si $A \in L(\mathscr{H})$ cette définition est équivalente à la définition habituelle pour les opérateurs bornés: A est essentiellement normal si $A^*A - AA^*$ est un opérateur compact (cf. [1], [6], Proposition 2.5).

PROPOSITION 3.3 (cf. [7]). *Soit $A \in C(\mathscr{H})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *A est essentiellement normal;*
2) *$R_A - R_{A^*}$ est compact;*
3) *$\tilde{A}$ est essentiellement normal;*
4) *Il existe une suite $\{A_n\} \subset L(\mathscr{H})$ telle que*
   a) *$\forall\ n \in \mathrm{N}$, A_n est essentiellement normal,*
   b) *$g(A, A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.*

Démonstration. 1) $\Leftrightarrow$ 2). D'après la remarque 2.3 de [6]

$$\text{(3.1)} \qquad 1) \Leftrightarrow AA^*S_{AA^*}S_{A^*A} - S_{AA^*}A^*AS_{A^*A} \text{ est compact.}$$

Or

$$[I + (A^*A)^2]u = (I + A^*A)^2u - 2(I + A^*A)u + 2u, \quad \forall\, u \in \mathrm{D}((A^*A)^2).$$

En posant $u = R_{A^*A}v$, on trouve

$$v = (I + A^*A)^2R_{A^*A}v - 2(I + A^*A)R_{A^*A}v + 2R_{A^*A}v$$

d'où

$$R_A^2v = [I - 2R_A(I - R_A)]R_{A^*A}v.$$

Or $R_A(I - R_A) = A^*R_{A^*}AR_A$ et par conséquent

$$\|R_A(I - R_A)\| = \|AR_A\|^2 \leqslant 1/4, \qquad \text{(en utilisant (0.2))}.$$

Donc $I - 2R_A(I - R_A) \geqslant 1/2$ est inversible et on peut écrire

$$R_{A^*A} = R_A^2[I - R_A(I - 2R_A)]^{-1}$$

d'où

$$S_{A^*A} = R_A[I - 2R_A(I - R_A)]^{-1/2}$$

et de même

$$S_{AA^*} = R_{A^*}[I - 2R_{A^*}(I - R_{A^*})]^{-1/2}.$$

En remplaçant ces valeurs dans (3.1) on trouve

$$[I - 2R_{A^*}(I - R_{A^*})]^{-1/2}(R_A - R_{A^*})[I - 2R_A(I - R_A)]^{-1/2}$$

qui est compact et par conséquent $R_A - R_{A^*}$ est compact.

2) $\Rightarrow$ 3). En utilisant la proposition 0.5 on voit que 2) $\Rightarrow S_A - S_{A^*} = \lim_{n\to\infty} [p_n(R_A) - p_n(R_{A^*})]$ est compact, ce qui est équivalent à dire que $R_{\tilde{A}} - R_{\tilde{A}^*}$ est compact. Comme $R_{\tilde{A}} - R_{\tilde{A}^*} = R_{\tilde{A}}(\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A})R_{\tilde{A}^*}$ et A est borné et par conséquent $R_{\tilde{A}}$ et $R_{\tilde{A}^*}$ sont inversibles, on en déduit que $\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A}$ est compact.

3) $\Rightarrow$ 4). Si A est borné 4) est banalement vrai. Supposons donc A non borné. Posons $\tilde{A}_n = (1 - 1/n)\tilde{A}$. Alors $\tilde{A}_n$ est essentiellement normal et comme $\|\tilde{A}_n\| \leqslant 1 - 1/n < 1$,

$$A_n = 2(1 - 1/n)\tilde{A}[I - (1 - 1/n)^2\tilde{A}^*\tilde{A}]^{-1} \in L(\mathscr{H})$$

et A_n est essentiellement normal car $A_n^*A_n - A_nA_n^*$ est compact (simple vérification). En outre $\tilde{A}_n \to \tilde{A}$ dans $L(\mathscr{H})$ quand $n \to \infty$. Donc d'après (1.3) $g(A_n, A) \to 0$ quand $n \to \infty$.

4) $\Rightarrow$ 2). Soit $\{A_n\} \subset L(\mathscr{H})$ telle que $\forall\, n \in \mathbf{N}$, A_n soit essentiellement normal et $g(A, A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors

$$\|R_{A_n} - R_A\| \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty$$

et

$$\|R_{A_n^*} - R_{A^*}\| \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Donc $R_{A^*} - R_A$ est limite uniforme des opérateurs compacts $R_{A_n^*} - R_{A_n}$ et par conséquent est compact.

COROLLAIRE 3.4. *Soit $A \in C(\mathscr{H})$, A essentiellement normal. Alors*

$$A - \lambda I \text{ est essentiallement normal}, \quad \forall\, \lambda = \mathbf{C}.$$

Démonstration. En vertu de 4) il existe $\{A_n\} \subset L(\mathscr{H})$ telle que $\forall\, n \in \mathbf{N}$, A_n soit essentiellement normal et $g(A, A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors $\forall\, \lambda \in \mathbf{C}$, $\{A_n - \lambda I\}$ est une suite d'opérateurs bornés essentiellement normaux avec $g(A - \lambda I, A_n - \lambda I) \to 0$ quand $n \to \infty$ (cf. [6], Proposition 2.6). Donc $A - \lambda I$ est essentiellement normal.

PROPOSITION 3.5. *Soit $A \in C(\mathscr{H})$, A essentiellement normal et* R(A) *fermé. Alors A est quasi-Fredholm.*

Démonstration, $R(A)$ fermé $\Rightarrow R(A^*)$ fermé $\Rightarrow R(A^*A)$ et $R(AA^*)$ sont fermés. D'après la proposition 2.6 on en déduit que $P_{N(A^*)} - P_{N(A)} = P_{N(AA^*)} - P_{N(A^*A)}$ est compact. Donc $I - P_{N(A^*)} + P_{N(A)} \in F(\mathscr{H})$ et par conséquent $R[I - P_{N(A^*)} + P_{N(A)}] =$ $= R(P_{R(A)} + P_{N(A)}]$ est fermé et de codimension finie. Comme $R(A) + N(A) \supset$ $\supset R[P_{R(A)} + P_{N(A)}]$ on en déduit que $R(A) + N(A)$ est fermé et de codimension finie. Symétriquement $R(A^*) + N(A^*)$ est fermé et de codimension finie, d'où $R(A) \cap N(A)$ est de dimension finie. La suite $\{R(A^j) \cap N(A)\}$, $j = 1, 2, \ldots$ est une suite décroissante de sous espaces de dimensions finies; il existe donc un $d \in N$ tel que

$$\forall n \in N,\ n \geqslant d \Rightarrow R(A^n) \cap N(A) \supset R(A^d) \cap N(A).$$

$R(A^d) \cap N(A)$ est fermé (car de dimension finie). $R(A) + N(A^d)$ est fermé (car de codimension finie). Donc A est quasi-Fredholm (cf. [5], Définition 3.1.2).

COROLLAIRE 3.6. *Soit $A \in C(\mathscr{H})$ essentiellement normal. Alors*

1) $\mathrm{Reg}(A) \subset \rho_e(A)$;

2) *Si A est semi-Fredholm, il est Fredholm.*

Démonstration. 1) Si $\lambda \in \mathrm{Reg}(A)$, $R(A - \lambda I)$ est fermé et comme $A - \lambda I$ est régulier

$$\dim N(A - \lambda I) = \dim[N(A - \lambda I) \cap R(A - \lambda I)] < \infty$$

$$\dim N(A^* - \bar{\lambda} I) = \dim[N(A^* - \bar{\lambda} I) \cap R(A^* - \bar{\lambda} I)] < \infty$$

et par conséquent $\lambda \in \rho_e(A)$.

2) Si $A \in SF(\mathscr{H})$, il existe un voisinage U de 0 telque $\forall \lambda \in U$, $\mathrm{Ind}(A - \lambda I) =$ $= \mathrm{Ind}(A)$. Or si $\lambda \in U \setminus \{0\}$,

$$\dim N(A - \lambda I) \leqslant \dim[N(A) \cap R(A)] < \infty$$

et

$$\dim N(A^* - \bar{\lambda} I) \leqslant \dim[N(A^*) \cap R(A^*)] < \infty.$$

Donc $\mathrm{Ind}(A) = \mathrm{Ind}(A - \lambda) < \infty$ et par conséquent $A \in F(\mathscr{H})$.

PROPOSITION 3.7. *Soit $A \in C(\mathscr{H})$ essentiellement normal. Alors $g\ (A^*A, AA^*) < 1$.*

Démonstration. Par hypothèse $P_{G(A^*A)} - P_{G(AA^*)}$ est compact et autoadjoint et $g(A^*A, AA^*) \leqslant 1$. Pour que $g(A^*A, AA^*) = 1$ il faudrait que $P_{G(A^*A)} - P_{G(AA^*)}$ admette ± 1 comme valeur propre. Supposons par exemple que $\{u, v\} \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$, soit tel que $\|\{u, v\}\| = 1$, $P_{G(A^*A)}\{u, v\} - P_{G(AA^*)}\{u, v\} = \{u, v\}$. Alors

$$\|[I + P_{G(AA^*)}]\{u, v\}\|^2 = \|\{u, v\}\|^2 + \langle 3P_{G(AA^*)}\{u, v\}, \{u, v\}\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \|P_{G(A^*A)}\{u, v\}\|^2 \leqslant \|\{u, v\}\|^2.$$

Donc $P_{G(AA^*)}\{u, v\} = \{0, 0\}$ et $P_{G(A^*A)}\{u, v\} = \{u, v\}$ où encore

$$R_{AA^*}u + AA^*R_{AA^*}v = 0; \quad AA^*R_{AA^*}u + v - R_{AA^*}v = 0;$$

$$R_{A^*A}u + A^*AR_{A^*A}v = u; \quad A^*AR_{A^*A}u + v - R_{A^*A}v = v$$

d'où

$$v \in \mathrm{D}(AA^*), \ u = -AA^*v, \ u \in \mathrm{D}(A^*A) \ \text{et} \ v = A^*Au.$$

Donc $u = -AA^*A^*Au$ et par conséquent

$$\|Au\|^2 = -\langle Au, AAA^*A^*Au\rangle = -\|A^*A^*Au\|^2.$$

Donc $\|Au\| = 0$, d'où $Au = 0$ et $u = 0$ et $v = 0$, contradiction.

Si $P_{G(A^*A)}\{u, v\} - P_{G(AA^*)}\{u, v\} = -\{u, v\}$ on procède de la même façon, en utilisant la symétrie entre A et A^*.

4. THÉORÈME DE BROWN-DOUGLAS-FILLMORE

PROPOSITION 4.1. *Soit A une contraction essentiellement normale et soit $\lambda = \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| < 1$ et $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ soit fermé. Alors si $F(\lambda) = (A - \lambda I) + \lambda(A^* - \bar{\lambda} I)A$ il existe un opérateur borné inversible C et un opérateur compact K tels que*

$$F(\lambda) = (A - \lambda I)C + K.$$

Démonstration. Soit $B(\lambda)$ l'inverse de Moore-Penrose de $A - \lambda I$. Comme $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ est fermé, $B(\lambda)$ est borné et à image fermée. En outre

$$B^*(\lambda)(A^* - \bar{\lambda} I) = (A - \lambda I)B(\lambda) = P_{\mathrm{R}(A-\lambda I)}\,.$$

Or

$$A^* - \bar{\lambda} I = (A^* - \bar{\lambda} I)B^*(\lambda)(A^* - \bar{\lambda} I) = (A^* - \bar{\lambda} I)(A - \lambda I)B(\lambda) =$$

$$= (A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda} I)B(\lambda) + \text{compact}.$$

Donc

$$F(\lambda) = (A - \lambda I) + \lambda(A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda)A + \text{compact}.$$

Ou encore

$$F(\lambda) = (A - \lambda I)[I + \lambda(A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda)A] + \text{compact}. \tag{4.1}$$

Posons

$$U(\lambda) = (A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda).$$

Alors

$$U^*(\lambda)U(\lambda) = B^*(\lambda)(A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I)B(\lambda) = B^*(\lambda)(A^* - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)B(\lambda) +$$

$$+ \text{compact} = P_{\mathbf{R}(A-\lambda I)} + \text{compact}.$$

Donc

$$\sqrt{U^*(\lambda)U(\lambda)} = \lim_{n\to\infty} p_n(P_{\mathbf{R}(A-\lambda I)} + \text{compact}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [p_n(P_{\mathbf{R}(A-\lambda I)}) + \text{compact}] = P_{\mathbf{R}(A-\lambda I)} + \text{compact}.$$

En utilisant la décomposition polaire de $U(\lambda)$ on obtient $U(\lambda) = T\sqrt{U^*(\lambda)U(\lambda)}$ où T est une isométrie partielle. Donc $U(\lambda) = TP_{\mathbf{R}(A-\lambda I)} + K(\lambda)$ où $K(\lambda)$ est compact et par conséquent $\|U(\lambda) - K(\lambda)\| \leqslant 1$. Finalement

$$F(\lambda) = (A - \lambda I)\{I + \lambda U(\lambda)A\} + \text{compact} =$$

$$= F(\lambda) = (A - \lambda I)\{I + \lambda[U(\lambda) - K(\lambda)]A\} + \text{compact},$$

et comme $|\lambda| < 1$, $\|\lambda[U(\lambda) - K(\lambda)]A\| < 1$ et par conséquent en prenant $C = I + \lambda[U(\lambda) - K(\lambda)]A$ la proposition est démontrée.

PROPOSITION 4.2. *Soit A une contraction essentiellement normale et si $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, posons encore $F(\lambda) = (A - \lambda I) + \lambda(A^* - \bar{\lambda}I)A$. Alors si $F(\lambda)$ est un opérateur de Fredholm $A - \lambda I$ est aussi un opérateur de Fredholm et*

$$\operatorname{Ind}(F(\lambda)) = \operatorname{Ind}(A - \lambda I).$$

Démonstration. Puisque $F(\lambda)$ est Fredholm, $\dim \mathrm{N}(F(\lambda)) < \infty$ et $c(F(\lambda)) > 0$. Posons $K_0 = A^*A - AA^*$. K_0 est compact et symétrique et par conséquent $\mathscr{H}$ se décompose en une somme directe orthogonale au plus dénombrable de sous-espaces M_j, invariants par rapport à K_0, avec $\dim M_j < \infty$ et tels que $K_0|\mathrm{M}_j = \lambda_j I_j$ (I_j désignant la restriction de l'identité à M_j) avec $\lambda_0 = 0$, la suite de nombres réels

$\{|\lambda_j|\}$ étant décroissante à partir de $j = 1$, avec $\lim_{j\to\infty} |\lambda_j| = 0$. Alors $\exists\, M = \sum_{j=1}^{n} M_j$ (donc $\dim M < \infty$) tel que $\|K_0 | M^{\perp}\| \leqslant \min\{c^2(F(\lambda))/5,\ c(F(\lambda))/5\}$. Posons $N = M + \mathrm{N}(F(\lambda))$. Alors $\dim N < \infty$. Supposons que $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ ne soit pas fermé; alors $\mathrm{R}(A - \lambda I) | N^{\perp}$ n'est pas fermé et par conséquent il existe $u \in N^{\perp}$, $\|u\| = 1$ avec $\|(A - \lambda I)u\| \leqslant c(F(\lambda))/5$. Or

$$F(\lambda)u = (A - \lambda I)u + \lambda(A^*A - AA^*)u + \lambda A(A^* - \bar{\lambda} I)u$$

et

$$\|(A^* - \bar{\lambda} I)u\|^2 = (K_0 u,\ u) + \|(A - \lambda I)u\|^2.$$

Donc

$$\|(A^* - \bar{\lambda} I)u\|^2 \leqslant c^2(F(\lambda))\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right) \leqslant \left(\frac{3}{5}\, c(F(\lambda))\right)^2$$

et par conséquent

$$\|F(\lambda)u\| \leqslant c(F(\lambda))/5 + |\lambda| c(F(\lambda))/5 + |\lambda|\, \|A\|\ 3c(F(\lambda))/5 < c(F(\lambda)),$$

contradiction.

Donc $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ est fermé. Mais alors, en vertu de la proposition 4.1, $\exists\, C$ inversible et K compact tels que $F(\lambda) = (A - \lambda I)C + K$. Donc $(A - \lambda I)$ est Fredholm et $\mathrm{Ind}(A - \lambda I) = \mathrm{Ind}(F(\lambda))$.

THÉORÈME 4.3. *Soit* $A \in C(\mathscr{H})$ *essentiellement normal. Pour* $\lambda \in \mathbf{C}$ *avec* $|\lambda| < 1$, *posons*

$$\Phi(\lambda) = \frac{2\lambda}{1 - |\lambda|^2}.$$

Alors $\Phi(\lambda) \in \rho_e(A) \Leftrightarrow \lambda \in \rho_e(\tilde{A})$ *et* $\mathrm{Ind}(A - \Phi(\lambda)I) = \mathrm{Ind}(\tilde{A} - \lambda I)$.

Démonstration.

$$A - \Phi(\lambda)I = 2A(I - \tilde{A}^*\tilde{A})^{-1} - 2\lambda(1 - |\lambda|^2)^{-1}I = 2(1 - |\lambda|^2)^{-1}F(\lambda)(I - \tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}.$$

Comme $(I - \tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}$ est surjectif, il est Fredholm et par conséquent $A - \Phi(\lambda)I$ est Fredholm si et seulement si $F(\lambda)$ l'est aussi et ils ont le même indice. Le reste de la démonstration se déduit immédiatement des deux propositions précédentes.

DÉFINITION 4.4. Soit A, $B \in C(\mathscr{H})$. On dira que A et B ont le même *tableau spectral* si:

1) $\rho_e(A) = \rho_e(B)$,
2) $\forall\, \lambda \in \rho_e(A)$, $\mathrm{Ind}(A - \lambda I) = \mathrm{Ind}(B - \lambda I)$.
3) $\sigma_\infty(A) = \sigma_\infty(B)$.

THÉORÈME 4.5. *Soit A, $B \in C(\mathscr{H})$, essentiellement normaux. Alors A et B sont strictement compalents si et seulement si ils ont le même tableau spectral.*

Démonstration. "seulement si": C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.

"si": Le théorème précédent montre qu'alors on a:

$$\rho_e(\tilde{A}) = \rho_e(\tilde{B})$$

et

$$\mathrm{Ind}(\tilde{A} - \lambda I) = \mathrm{Ind}(\tilde{B} - \lambda I), \quad \forall\ \lambda \in \rho_e(\tilde{A}).$$

Donc, d'après le théorème de Brown-Douglas-Fillmore $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont compalents et par conséquent, A et B sont strictement compalents.

RÉMARQÚE 4.6. Si A et B sont bornés, le théorème 4.5 se ramène exactement au théorème de [1]. Le cas non-borné fait apparaître un nouvel élément dans le tableau spectral, le spectre à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

1. BROWN, L.; DOUGLAS, R. G.; FILLMORE, P. A., Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^*-algebras, in *Rochester Conf. on Operator Theory*, Lectures Notes in Math., **345**, Springer Verlag, New York, 1973, pp. 58–127.
2. CORDES, H. O.; LABROUSSE, J.-PH., The invariance of the index in the metric space of closed operators, *J. Math. Mech.*, **12**: 5(1963), 693–720.
3. GROETSCH, C. W., *Generalized inverses of linear operators*, Marcel Dekker, New York, 1977.
4. LABROUSSE, J.-PH., *Quelques topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert et leurs applications*, Univ. de Nice, Dpt. de Math., Nice, 1970.
5. LABROUSSE, J.-PH., Les opérateurs quasi-Fredholm: une généralisation des opérateurs semi-Fredholm, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **XXIX**(1980), 161–258.
6. LABROUSSE, J.-PH.; MERCIER, B., Equivalences compactes entre deux opérateurs sur un espace de Hilbert, *Math. Nachr.*, **133**(1987), 91–105.
7. MERCIER, B., *Généralisation d'un théorème de Brown-Douglas-Fillmore aux opérateurs fermés à domaine dense*, Univ. de Nice, Dpt. de Math., Nice, 1984.
8. RIESZ, F.; SZ.-NAGY, B., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Akad. Kiadó, Budapest, 1952.
9. STONE, M. H., On unbounded operators on a Hilbert space, *J. Indian Math. Soc.*, **15**(1951), 155–192.

JEAN-PHILIPPE LABROUSSE, BRIGITTE MERCIER
Département de Mathématiques,
Université de Nice,
Parc Valrose, F-06034 Nice Cedex,
France.

Received June 6, 1989.