J. OPERATOR THEORY
28(1992), 105–120

SUR LES CONTRACTIONS DANS LA CLASSE $\mathbb{A}_n$

M. OUANNASSER

1. INTRODUCTION

Soit H un espace de Hilbert, complexe, séparable de dimension infinie et soit $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs (linéaires bornés) sur H. La classe $\mathbb{A}(H)$ est l'ensemble des contractions T, sur H, absolument continues pour lesquelles $\Phi_T : H^\infty \to \mathcal{L}(H)$, le calcul fonctionnel de Sz-Nagy–Foiaş est isométrique. On sait que pour $T \in \mathbb{A}$, l'image de Φ_T coincide avec $\mathcal{A}_T$, l'algèbre duale engendrée par T, et que Φ_T est un homéomorphisme faible-* de H^∞ sur $\mathcal{A}_T$. Rappelons qu'une algèbre duale sur H est une sous-algèbre (unitaire) de $\mathcal{L}(H)$ fermée pour la topologie faible-* de $\mathcal{L}(H)$ résultant de la dualité $\mathcal{L}(H) = (\mathcal{C}^1(H))'$, où $\mathcal{C}^1(H)$ désigne l'espace de Banach des opérateurs à trace finie sur H. (Pour une telle algèbre duale, $\mathcal{A}$, on a, en effet, $\mathcal{A} = (Q_\mathcal{A})'$ avec $Q_\mathcal{A} = \mathcal{C}^1(H)/{}^\perp A$).

Etant donnée une algèbre duale, $\mathcal{A}$, sur H, nous écrivons $[L]$, $L \in \mathcal{C}^1(H)$, pour l'élément générique de $Q_\mathcal{A}$ et $x \otimes y$ pour l'opérateur de rang $\leqslant 1$ associé aux vecteurs x et $y \in H$, $((x \otimes y)(u) = (u, y)x)$. Etant donnés deux cardinaux $1 \leqslant n$, $m \leqslant \aleph_0$, on dit que l'algèbre duale $\mathcal{A}$ a la propriété $(\mathrm{A}_{m,n})$ $((\mathrm{A}_n)$ si $m = n)$ si pour tout $([L_{ij}])_{0 \leqslant i < m,\, 0 \leqslant j < n}$ de $Q_\mathcal{A}$, il existe $(x_i)_{0 \leqslant i < m}$, $(y_i)_{0 \leqslant j < n}$ dans H tel que:

$$(*) \qquad [L_{ij}] = [x_i \otimes y_j] \quad 0 \leqslant i < m,\ 0 \leqslant j < n.$$

Si de plus, pour tout $s > \rho$ ($\rho > 0$ donné) on peut résoudre $(*)$ avec:

$$\|x_i\| < \left(s \sum_{0 \leqslant j < n} \|[L_{ij}]\| \right)^{1/2} \quad 0 \leqslant i < m,$$

$$\|y_j\| < \left(s \sum_{0 \leqslant i < m} \|[L_{ij}]\| \right)^{1/2} \quad 0 \leqslant j < n$$

on dit que $\mathcal{A}$ a la propriété $(\mathrm{A}_{m,n}(\rho))$.

La classe $\mathbb{A}_{m,n}$ (resp. $(\mathbb{A}_{m,n}(\rho))$ est l'ensemble des $T \in \mathbb{A}$ tel que $Q_{\mathcal{A}_T}$ ait la propriété $\mathbb{A}_{m,n}$ (resp. $\mathbb{A}_{m,n}(\rho))$). Rappelons que dans le cas $n = 1$, B. Chevreau dans [6], et H. Bercovici dans [3] ont montré séparément et simultanément que $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1(\rho)$ pour un certain $\rho \geqslant 1$, Bercovici obtenant d'ailleurs la meilleure constante possible $\rho = 1$.

L'objet du présent article est la réponse positive à une question soulevée par Pearcy dans le cas $n = 2$ en 1983.

THÉORÈME 1. Si $T \in \mathbb{A}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ alors $T^{(n)} \in \mathbb{A}_n(H^{(n)})$.

La démonstration de ce résultat s'appuie sur une généralisation des techniques de [6] dont nous utilisons les notations. Cette généralisation porte sur deux points essentiels.

— Une version séquentielle des Lemmes d'approximations fonctionnelles (Lemmes 2.3 et 2.4)

— Une exploitation plus systématique de la théorie de la multiplicité (appliquée aux parties résiduelles de la dilatation unitaire minimale d'une contraction) que nous développons en section III.

2. PRÉLIMINAIRES

Si T est une contraction absolument continue, sa dilatation unitaire minimale (d.u.m.) $U \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ $(\mathcal{U} \supset H)$ est également absolument continue. La dilatation isométrique minimale (d.i.m.), U_+, de T est la restriction de U au sous-espace $\mathcal{U}_+ = \bigvee_{n\geqslant 0} U^n H$ invariant pour U. Nous écrivons $U_+ = S_* \oplus R$, (S_* shift à droite agissant sur un espace $\mathcal{S}_*$, R opérateur unitaire absolument continu agissant sur $\mathcal{R}$) la décomposition de Wold de U_+. De même l'extension co-isométrique minimale (e.c.i.m.), B, de T est la compression de U au sous-espace $\mathcal{B} = \bigvee_{n\leqslant 0} U^n H = \bigvee_{n\geqslant 0} U^{*n} H$, invariant pour U^* (donc semi-invariant pour U) et la décomposition de Wold de B^* donne $B = S^* \oplus R_*$, S^* shift à gauche agissant sur un espace $\mathcal{S}$ réduisant pour B et R_* opérateur unitaire sur $\mathcal{R}_*$. Nous désignons par Q, Q_*, A, A_*, les projections orthogonales de $\mathcal{U}$ sur les sous-espace $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_*$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_*$. On sait que si T est une contraction absolument continue sur H, il existe une application sesquilinéaire $H \times H \to L^1(\mathbf{T})$

$$(x, y) \to x \overset{T}{\bullet} y$$

telle que fonction $x \overset{T}{\bullet} y$ ait comme coefficients de Fourier $((T^{-n}x, y)$ pour $n \leqslant 0$, $(T^{*n}x, y)$ pour $n > 0)$. Alternativement $x \overset{T}{\bullet} y$ peut être définie comme la densité de la mesure $(E(\cdot)x, y)$ (où E est la mesure spectrale de U sur $\mathbf{T}$) par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}$, notée m. On a donc pour $x, y \in H$

$$x \overset{T}{\bullet} y = x \overset{U}{\bullet} y = x \overset{U+}{\bullet} y.$$

Désormais on écrit tout simplement $x \bullet y$. Il résulte facilement de la définition de $x \bullet y$ que $[x \bullet y] = \varphi_T([x \otimes y]_T)$, φ_T désignant l'application (contractante) de $Q_T (= Q_{\mathcal{A}_T})$ dans le prédual L^1/H_0^1 de H^∞ tel que $(\varphi_T)^* = \Phi_T$.

Posant, pour $T \in \mathbf{A}$ et $f \in L^1(\mathbf{T})$, $[f]]_T = \varphi_T^{-1}([f]_{L^1/H_0^1})$, on a donc $[x \otimes y]_T =$ $= [x \cdot y]]_T$.

Les opérateurs unitaires R et R_* étant absolument continus il existe donc des boréliens Σ et Σ_* de $\mathbf{T}$ tels que les mesures m_Σ et m_{Σ_*} (définies par $m_\Sigma(E) =$ $= m(\Sigma \cap E)$, E borélien de $\mathbf{T}$ et de façon analogue pour m_{Σ_*}) soient des mesures spectrales scalaires pour R et R_* respectivement, (cf. [9, p. 8]).

Finalement si M est un sous-espace semi-invariant pour T (on note $M \in \mathrm{SI}(T)$) (i.e. $M = N_1 \cap N_2^\perp$ avec $N_2 \subset N_1$ et $N_i \in \mathrm{Lat}T$), on affectera de l'indice exposant M les diverses notions liées à la d.u.m. de T_M (i.e. U^M, U_+^M, B^M, …, Q^M, … Σ_*^M …). Notons que si $T \in \mathbf{A}$ et $M \in \mathrm{SI}(T)$ avec T_M non unitaire l'e.c.i.m. de T_M, B^M est dans $\mathbf{A}$. L' application $j = \varphi_{B^M}^{-1} \circ \varphi_T$ est donc une isométrie de Q_T sur Q_{B^M} qui possède des propriétés analogues à celles développées pour $\varphi_B^{-1} \circ \varphi_T$ dans [9, lemmes 3.5–3.8]. En outre, on a immédiatement $j([f]]_T) = [f]]_{B^M}$ pour $f \in L^1(\mathbf{T})$.

PROPOSITION 2.1. *Soit T une contraction absolument continue sur H d'e.c.i.m. $B = S^* \oplus R_* \in \mathcal{L}(\mathcal{S} \oplus \mathcal{R}_*)$ avec $\mathcal{R}_* \neq (0)$, $\mathcal{R}_0$ un sous-espace de $\mathcal{R}_*$ réduisant pour R_* telque $R_*|\mathcal{R}_0$ soit unitairement équivalent à $M_{e^{it}}$ sur $L^2(\Sigma_*)$ et $\mathcal{R}_0 \subset \overline{A_* H}$. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$, $a \in H$, $(b^j)_{j=1}^N \in \mathcal{R}_*$ et $(h^j)_{j=1}^N \in L^1(\Sigma_*)$ il existe une suite $(v_p)_p \subset H$ convergeant faiblement vers 0 et des suites $(c_p^j)_p$ $(j = 1, \ldots, N)$ dans $\mathcal{R}_*$ telles que:*

1) $\lim\limits_{p\to\infty} \|A_* a \cdot b^j + h^j - A_*(a + v_p) \cdot c_p^j\| = 0$;

2) $\|v_p\| \leqslant 2 \left(\sum\limits_{j=1}^N \|h^j\|\right)^{1/2}$;

3) $\|c_p^j\| \leqslant \|b^j\| + \|h^j\|^{1/2}$ $\quad j = 1, \ldots, N$;

4) $c_p^j - b^j \in \mathcal{R}_0$ *et* $\|Qv_p\| \to 0$.

Démonstration. C'est une adaptation facile de [7, prop. 2.3]. La condition $\overline{A_* H} \supset \mathcal{R}_0$ permet d'obtenir la conclusion de la proposition avec $\rho = 1$.

DÉFINITION 2.2. Etant donnés $M \in \mathrm{SI}(T)$, $\mathcal{L}$ un sous-espace de H contenant M et $\theta \in [0, 1]$ nous désignons par $\mathcal{E}_\theta^r(\mathcal{A}_T, M, \mathcal{L})$ l'ensemble des $[L]$ de Q_T pour lesquels il existe des suites (x_n), (y_n) dans la boule unité fermée de M vérifiant:

(i) $\lim \|[L] - [x_n \otimes y_n]\| \leqslant \theta$

(ii) $\forall \omega \in \mathcal{L}$, $\lim \|[x_n \otimes \omega]\| = 0$, et $y_n \to 0$ faiblement.

On définit de même $\mathcal{E}_\theta^l(\mathcal{A}_T, M, \mathcal{L})$ par symétrie sur la 2-ème condition, et pour toute partie Ω d'un espace vectoriel normé X, ecef(Ω) désigne l'enveloppe convexe équilibrée fermée de Ω dans X.

Le lemme suivant est une généralisation de [6, lemme 2.3].

LEMME 2.3. *Soient $T \in \mathrm{A}(H)$, $M \in \mathrm{SI}(T)$ avec T_M non unitaire, $\mathcal{L}$ un sous--espace de H contenant M, $c \in M$, $d^j = \omega^j + b^j \in \mathcal{S}^M \oplus \mathcal{R}_*^M$, $f^j \in L^1(\Sigma_*^M)$, $[K^j]_{B^M} \in \beta\,\mathrm{ecef}(\mathcal{E}_\theta^r(\mathcal{A}_{B^M}, M, \mathcal{L})$ et des scalaires $0 < \theta < 1$, $0 < \beta < \delta_1, \delta_2 > > \|f^j\|$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$, $1 \leqslant j \leqslant N$ $(N \in \mathbb{N})$. Supposons donné $\mathcal{R}_0$ un sous-espace de $\mathcal{R}_*^M$ reduisant pour R_*^M tel que $\mathcal{R}_0 \subset \overline{\mathcal{A}_*^M(M)}$ et $R_0 = R_*^M|\mathcal{R}_0$ est unitairement équivalent a $M_{e^{it}}$ sur $L^2(\Sigma_*^M)$.*

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout système fini de vecteurs $(v_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ dans $\mathcal{S}^M \oplus \mathcal{R}_*^M$, il existe $(\overline{c}) \in M$, $\overline{d}^j = \overline{\omega}^j + \overline{b}^j$ dans $\mathcal{S}^M \oplus \mathcal{R}_*^M$ tels que:

$$\|[K^j]_{B^M} + [f^j]]_{B^M} + [c \otimes d^j]_{B^M} - [\overline{c} \otimes \overline{d}^j]_{B^M}\| < \theta\delta_1,\ j = 1, \ldots, N.$$

De plus on a les propriétés suivantes:

1) $\overline{c} = c + u + \overline{u}$ où u et $\overline{u}$ sont dans M, $\overline{u}$ pouvant, en outre, être choisi dans une suite $(\overline{u}_p)_p$ de M qui tend faiblement vers zéro.

2) $\|u\| < (N\delta_1)^{1/2}$, $\|\overline{u}\| < 2(N\delta)^{1/2}$, $\|Q\overline{u}\| < \varepsilon$.

3) $\|[u \otimes \omega^j]_{B^M}\| < \varepsilon$, $\|\overline{\omega}^j - \omega^j\| < (\delta_1)^{1/2}$, $\|[v_k \otimes (\overline{\omega}^j - \omega^j)]_{B^M}\| < \varepsilon$, $j = = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, q$.

4) $\overline{b}^j - b^j \in \mathcal{R}_0$ et $\|\overline{b}^j\| < \|b^j\| + (\delta)^{1/2}$, $j = 1, \ldots, N$.

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous nous dispensons d'écrire l'exposant M. Soit $\mu > 0$ tel que $\beta\theta + 7\mu < \theta\delta_1$ et $\mu < \varepsilon$. L'hypothèse sur $([K^j]_B)_{1 \leqslant j \leqslant N}$ entraîne l'existence d'entiers $l_0 = 0 < l_1 < \ldots < l_N$, d'éléments $([K_k^j]_B)_{l_{j-1} < k \leqslant l_j}$ (pour $1 \leqslant j \leqslant N$) dans $\mathcal{E}_\theta^r(\mathcal{A}_B, M, \mathcal{L})$ et de scalaires $(\alpha_k^j)_{l_{j-1} < k \leqslant l_j}$ (pour $1 \leqslant j \leqslant N$) tels que:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \left\| [K^j]_B - \displaystyle\sum_{l_{j-1} < k \leqslant l_j} \alpha_k^j [K_k^j]_B \right\| < \mu \\ \displaystyle\sum_{l_{j-1} < k \leqslant l_j} \left|\alpha_k^j\right| < \beta \end{cases} \qquad (1 \leqslant j \leqslant N).$$

Soient $(x_{k,n}^j)_n$, $(y_{k,n}^j)_n$ les suites de M traduisant l'appartenance de $[K_k^j]_B$ à $\mathcal{E}_\theta^r(\mathcal{A}_B, M, \mathcal{L})$. Quitte à supprimer un nombre fini de termes dans chacune des suites on peut supposer que pour tout $0 \leqslant k \leqslant l_N$ et tout $n \in \mathbf{N}$ on a:

$$\text{(b)} \qquad \left\| [K_k^j]_B - [x_{k,n}^j \otimes y_{k,n}^j]_B \right\| < \theta + \mu/\delta_1.$$

Etant donné un l_N-uplet $\nu = (n_1, \ldots, n_{l_N})$ on pose:

$$\text{(c)} \qquad [L_\nu^j]_B = [c \otimes d^j]_B + \sum_{l_{j-1} < k \leqslant l_j} \alpha_k^j [x_{k,n_k}^j \otimes y_{k,n_k}^j]_B + [f^j]]_B$$

et on a:

$$\|[L_\nu^j]_B - ([c \otimes d^j]_B + [K^j]_B + [f^j]]_B)\| < \mu + \beta(\theta + \mu/\delta_1) < \beta\theta + 2\mu.$$

Nous transformons

$$[L_\nu^j]_B = [P_\nu^j]_B + [M_\nu^j]_B$$

où:

$$[P_\nu^j]_B = [Qc \otimes Qd^j]_B + \sum_{l_{j-1} < k \leqslant l_j} \alpha_k^j [Qx_{k,n_k}^j \otimes Qy_{k,n_k}^j]_B,$$

$$[M_\nu^j]_B = [A_* c \otimes A_* d^j]_B + \sum_{l_{j-1} < k \leqslant l_j} \alpha_k^j [A_* x_{k,n_k}^j \otimes A_* y_{k,n_k}^j]_B + [f^j]]_B.$$

Soient

$$u_\nu = \sum_{j=1}^{N} \sum_{l_{j-1} < k \leqslant l_j} (\alpha_k^j)^{1/2} x_{k,n_k}^j, \quad \tilde{u}_\nu^j = \sum_{l_{j-1} < k \leqslant l_j} (\overline{\alpha}_k^j)^{1/2} y_{k,n_k}^j.$$

On peut choisir $\nu = \nu_p$ tel que (avec $u_p = u_{\nu_p}$ et $\tilde{u}_p^j = \tilde{u}_{\nu_p}^j$):

$$\left\| [P_{\nu_p}^j]_B - [Q(c + u_p) \otimes Q(d^j + \tilde{u}_p^j)]_B \right\| < \mu$$

$$\|c + u_p\|^2 \simeq \|c\|^2 + \|u_p\|^2; \ \ \|d^j + \tilde{u}_p^j\|^2 \simeq \|d^j\|^2 + \|\tilde{u}_p^j\|^2$$

$$\|u_p\|^2 \simeq \sum_{j,k} \left|\alpha_k^j\right| < N\beta \leqslant N\delta_1$$

$$\|\tilde{u}_p^j\|^2 \simeq \sum_{l_{j-1} < k \leqslant l_j} \left|\alpha_k^j\right| < \delta_1$$

$$\left\|[A_* u_p \otimes A_* d^j]_B\right\| < \mu, \ \ \left\|[v_k \otimes Q\tilde{u}_p^j]_B\right\| < \mu \ \ (1 \leqslant k \leqslant p).$$

Posant $c_p = c + u_p$ et $M_p^j = A_* c_p \cdot A_* d^j + h^j$ où:

$$h^j = \sum_{l_{j-1} < k \leqslant l_j} \alpha_k^j A_* x_{k,n_k}^j \cdot A_* y_{k,n_k}^j + f^j.$$

On voit facilement que pour tout $(1 \leqslant j \leqslant N)$ on a $h^j \in L^1(\Sigma_*)$, $\|h^j\| \leqslant \delta$ et que:

$$\left\| [M_{\nu_p}^j]_B - [M_p^j]]_B \right\| < \mu.$$

La proposition 2.1 permet d'obtenir $\overline{u}_p \in M$ et $\overline{b}_p^j \in \mathcal{R}_*^M$ tels que:

$$\|M_p^j - A_*(c_p + \overline{u}_p) \cdot \overline{b}_p^j\| < \mu$$

$$\|Q\overline{u}_p\| < \mu/(1 + |\varepsilon^j| + |\overline{u}_p^j|), \quad \|\overline{u}_p\| < 2(N\delta)^{1/2}, \quad \|\overline{b}_p^j\| < \|b^j\| + \delta^{1/2}$$

$$\overline{b}_p^j - b^j \in \mathcal{R}_0,$$

$\overline{u}_p$ choisie dans une suite qui converge faiblement vers que zéro.

On a alors avec $\overline{c} = c_p + \overline{u}_p$

$$\left\|[M_p^j]_B - [A_*\overline{c} \otimes b^j]_B\right\| < \mu$$

$$\left\|[P_{\nu_p}^j]_B - [Qc \otimes Q(d^j + \tilde{u}_p^j)]_B\right\| < 2\mu.$$

Posant $\overline{d}^j = Q(d^j + \tilde{u}_p^j) + \overline{b}_p^j$ on a:

$$\left\|[L_{\nu_p}^j]_B - ([M_p^j]]_B + [P_{\nu_p}^j]_B)\right\| = \left\|[M_p^j]]_B - [M_{\nu_p}]_B\right\| > \nu.$$

Donc:

$$\left\|[L_{\nu_p}^j]_B - [\overline{c} \otimes \overline{d}^j]_B\right\| < 4\mu.$$

D'où $\left\|[\overline{c} \otimes \overline{d}^j]_B - ([c \otimes d^j]_B + [K^j]_B + [f^j]]_B)\right\| < 4\mu + \beta\theta + 2\mu < \theta\delta_1$. Au cours de la démonstration la plupart des proprietés annoncées dans 2.3 sont établies, la seule qui reste, en fait, est: $\|Q\overline{u}_p\| < \varepsilon$.

On sait que $\overline{u}_p$ donné par la proposition 2.1 vérifie: $\left\|Q^M\overline{u}_p\right\| < \varepsilon$.

Or $\lim \|T_M^n \overline{u}_p\| = \left\|A_*^M \overline{u}_p\right\|$ et $\|\overline{u}_p\|^2 = \left\|Q^M\overline{u}_p\right\|^2 + \left\|A_*^M\overline{u}_p\right\|^2 = \|Q\overline{u}_p\|^2 + \|A_*\overline{u}_p\|^2$; le fait que: $\|T^n\overline{u}_p\| \geqslant \|T_M^n\overline{u}_p\|$ (et donc $\|A_*\overline{u}_p\| \geqslant \left\|A_*^M\overline{u}_p\right\|$) implique que:

$$\|Q\overline{u}_p\| \leqslant \left\|Q^M\overline{u}_p\right\| < \varepsilon.$$

Le lemme 2.3 admet une version duale dont la démonstration peut se baser sur la dilatation isométrique minimale U_+^M.

LEMME 2.4. *Soient $T \in \mathbf{A}$, $M \in \mathrm{SI}(T)$ avec T_M non unitaire, $\mathcal{L}$ un sous-espace de H contenant M, $b \in M$, $(a^i)_{(1 \leqslant i \leqslant N)} \in \mathcal{S}_*^M \oplus \mathcal{R}^M$,*

$$[K^i]_{U_+^M} \in \beta\mathrm{ecef}(\mathcal{E}_\theta^l(A_{U_+^M}, M, \mathcal{L})), \; f^i \in L^1(\Sigma^M)$$

et des scalaires $0 < \beta < \delta_1$, $0 < \theta < 1$, $\delta_2 > \|f^i\|, (1 \leqslant i \leqslant N)$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Soit $\mathcal{R}_0$ un sous-espace de $\mathcal{R}^M$ réduisant pour R^M tel que $\mathcal{R}_0 \subset \overline{A^M(M)}$ et $R_0 = R^M|\mathcal{R}_0$ soit unitairement équivalent à $M_{e^{it}}$ sur $L^2(\Sigma^M)$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, et tout système fini de vecteurs $(v_k)_{1\leqslant k\leqslant q} \in \mathcal{S}_*^M \oplus \mathcal{R}^M$, il existe $\bar{b} \in M$ et $(\bar{a}^i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ dans $\mathcal{S}_*^M \oplus \mathcal{R}^M$ tels que:

$$\left\|[K^i]_{U_+^M} + [f^i]]_{U_+^M} + [a^i \otimes b]_{U_+^M} - [\bar{a}^i \otimes \bar{b}]_{U_+^M}\right\| < \theta\delta_1,\ i = 1, \ldots, N.$$

De plus on a les proprietés suivantes:

(1) $\bar{b} = b + u + \bar{u}$, où $\bar{u} \in M$, $\bar{u} \in (\bar{u}_p)_p \subset M$, $\bar{u}_p$ converge faiblement vers zéro;

(2) $\|u\| < (N\delta_1)^{1/2}$, $\|\bar{u}\| < 2(N\delta)^{1/2}$, $\|Q_*\bar{u}\| < \varepsilon$;

(3) $\left\|[Q_*^M a^i \otimes u]_{U_+^M}\right\| < \varepsilon$, $\left\|Q_*^M(\bar{a}^i - a^i\right\| < (\delta_1)^{1/2}$, $\left\|[Q(\bar{a}^i - a^i) \otimes v_k]_{U_+^M}\right\| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, q$;

(4) $A^M\bar{a}^i - A^M a^i \in \mathcal{R}_0$ et $\left\|A^M\bar{a}^i\right\| < \left\|A^M a^i\right\| + (\delta)^{1/2}$, $i = 1, \ldots, N$.

3. MULTIPLICITÉ D'UN OPÉRATEUR UNITAIRE ABSOLUMENT CONTINU SUR UN BORELIEN DE $\mathbf{T}$

DEFINITION 3.1. Soit R un opérateur unitaire absolument continu sur $\mathcal{R}$ et Ω un borélien de $\mathbf{T}$, on dit que R *est de multiplicité* $\geqslant n (n \geqslant 1)$ sur Ω s'il existe un sous-espace $\mathcal{R}_0$ de $\mathcal{R}$ réduisant pour R tel que $R_0 = R|\mathcal{R}_0$ soit unitairement équivalent à $(M_{e^{it}})^{(n)}$ sur $(L^2(\Omega))^{(n)}$.

LEMME 3.2. *Soit $R \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ un opérateur unitaire absolument continu, de multiplicité supérieure ou égale à n ($n \geqslant 1$) sur Ω.*

Alors pour tous $x_1, \ldots, x_{n-1}$ dans $\mathcal{R}$, il existe un sous-espace $\mathcal{R}_0'$ de $\mathcal{R}$ réduisant pour R, orthogonal au sous-espace de $\mathcal{R}$ noté $\mathcal{R}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ réduisant pour R, engendré par $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et tel que $R_0' = R|\mathcal{R}_0'$ soit unitairement équivalent à $M_{e^{it}}$ sur $L^2(\Omega)$.

Demonstration. On part du fait que pour $x \in \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_x = \bigvee_{n\in\mathbf{Z}} R^n x$ il existe Σ_x borélien de $\mathbf{T}$ tel que $R|\mathcal{R}_x \sim M_{e^{it}}$ sur $L^2(\Sigma_x)$.

Soit $\mathcal{R}_0$ réduisant pour R tel que $R|\mathcal{R}_0 \sim (M_{e^{it}})^{(n)}$ sur $(L^2(\Omega))^{(n)}$. Il est clair que $R|\mathcal{R}_0 \cap (\mathcal{R}(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ est de multiplicité $\leqslant n - 1$ sur Ω, donc $R|\mathcal{R}_0 \cap (\mathcal{R}(x_1, \ldots, x_{n-1}))^\perp$ est de multiplicité $\geqslant 1$ sur Ω, donc il existe un sous-espace $\mathcal{R}_0' \subset (\mathcal{R}(x_1, \ldots, x_{n-1}))^\perp$ réduisant pour R tel que $R|\mathcal{R}_0'$ soit unitairement équivalent à $M_{e^{it}}$ sur $L^2(\Omega)$.

PROPOSITION 3.3. *Soient $T \in \mathsf{A}$, $M \in \mathrm{SI}(T)$ avec T_M non unitaire et R_*^M de multiplicité $\geqslant n$ ($n \geqslant 1$) sur Σ_*^M, $\overline{A_*^M}(M) = \mathcal{R}_*^M$, $\mathcal{L}$ un sous-espace de H contenant M.*

Supposons donnés $(c^i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in M$, $d^j = \omega^j + b^j$ $(1 \leqslant j \leqslant n) \in \mathcal{S}^M \oplus \mathcal{R}_*^M$, $(f^{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in L^1(\Sigma_*^M)$, $[K^{ij}]_{B^M} \in \beta\mathrm{ecef}(\mathcal{E}_\theta^r(\mathcal{A}_{B^M}, M, \mathcal{L}))$, et des scalaires $0 < \theta <$

$< 1,\ 0 < \beta < \delta_1, \delta_2 > \|f^{ij}\|$ et $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(\underline{c}^i) \in M$, $(\underline{d}^j = \underline{\omega}^j + \underline{b}^j) \in \mathcal{S}^M \oplus \mathcal{R}_*^M$ $(1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$ tels que:

$$\left\|[c^i \otimes d^j]_{B^M} + [K^{ij}]_{B^M} + [f^{ij}]]_{B^M} - [\underline{c}^i \otimes \underline{d}^j]_{B^M}\right\| < \theta\delta \quad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$$

$$\left\|\underline{c}^i - c^i\right\| < 3(n\delta)^{1/2}, \quad \left\|\underline{d}^j\right\| < \left\|d^j\right\| + 2n(\delta)^{1/2},$$

de plus on a les proprietés suivantes:

(1) $\underline{c}^i = c^i + u^i + \overline{u}^i$ où u^i et $\overline{u}^i$ sont dans M, $\overline{u}^i = \overline{u}^i_p$ pour un p assez grand et $(\overline{u}^i_m)_m$ est une suite dans M qui converge faiblement vers zéro, et

(2) $\left\|Q\overline{u}^i\right\| < \varepsilon$.

Demonstration. On va procéder par étapes en utilisant les lemmes 2.3 et 3.2.

. Comme dans la démonstration de 2.3 on se dispensera d'écrire l'exposant M. Soit $\mu > 0$ tel que $\theta\delta_1 + n\mu < \theta\delta$ et $\mu < \varepsilon$.

1ère etape: On transforme les termes $[c^1 \otimes d^j]_B + [K^{1j}]_B + [f^{1j}]]_B$ sans trop modifier les termes $[c^i \otimes d^j]_B + [K^{ij}]_B + [f^{ij}]]_B$ pour $i \neq 1$.

Pour cela, soit $\mathcal{R}_0^1$ sous-espace de $\mathcal{R}_*$ réduisant pour R_* orthogonal au vecteurs $\{A_* c^i,\ 2 \leqslant i \leqslant n\}$ et $R_*|\mathcal{R}_0^1$ soit unitairement équivalent à $M_{e^{it}}$ sur $L^2(\Sigma_*)$.

On applique alors le lemme 2.3 avec c^1, $d^j = \omega^j + b^j$, f^{1j}, K^{1j}, β, δ_1, δ_2 et $v_k = c_k$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$, $\mu > 0$. Il existe donc $\underline{c}_1 \in M$, $d_1^j = \omega_1^j + b_1^j \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}_*$ tels que:

$$\left\|[c^1 \otimes d^j]_B + [K^{1j}]_B + [f^{1j}]]_B - [\underline{c}^1 \otimes d_1^j]_B\right\| < \theta\delta_1$$

avec les propriétés (1), (2), (3), (4) données par 2.3.

(1) $\underline{c}^1 = c^1 + u^1 + \overline{u}^1$, où u^1 et $\overline{u}^1 \in M$, $\overline{u}^1$ choisie dans une suite $(\overline{u}^1_p)_p$ qui tend faiblement vers zéro.

(2) $\left\|u^1\right\| < (n\delta_1)^{1/2}$, $\left\|\overline{u}^1\right\| < 2(n\delta)^{1/2}$, $\left\|Q\overline{u}^1\right\| < \mu$.

(3) $\left\|[u^1 \otimes \omega^j]_B\right\| < \mu$, $\left\|\omega_1^j - \omega^j\right\| < (\delta_1)^{1/2}$, $\left\|[c_k \otimes (\omega_1^j - \omega^j)]_B\right\| < \mu$ $(2 \leqslant k \leqslant$ $\leqslant n)$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

(4) $b_1^j - b^j \in \mathcal{R}_0^1$ et $\left\|b_1^j\right\| < \left\|b^j\right\| + (\delta)^{1/2}$.

· Les proprietés 3) et 4) nous donnent que pour tout $i \geqslant 2$ on a:

$$\left\|[c^i \otimes d^j]_B - [c^i \otimes d_1^j]_B\right\| < \mu.$$

On continue alors ce processus en transformant par exemple à la deuxieme étape:

$$[c^2 \otimes d_1^j]_B + [K^{2j}]_B + [f^{2j}]]_B.$$

kème etape (pour $1 < k < n$): On transforme $[c^k \otimes d_{k-1}^j]_B + [K^{kj}]_B + [f^{kj}]]_B$ sans trop modifier les termes $[\underline{c}^i \otimes d_{k-1}^j]_B$ pour $i \leqslant k-1$ les termes $[c^i \otimes d_{k-1}^j] + [K^{kj}]_B +$ $+ [f^{kj}]]_B$ pour $k < i \leqslant n$ (on note $d_0^j = d^j$).

Pour cela soit $\mathcal{R}_0^k$ un sous-espace de $\mathcal{R}_*$ réduisant pour R_* orthogonal au vecteurs $\{A_*\underline{c}^i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{A_*c^i$ pour $k < i \leqslant n\}$ et $R_*|\mathcal{R}_0^k$ soit unitairement équivalent à $M_{e^{it}}$ sur $L^2(\Sigma_*)$.

On applique alors le lemme 2.3 avec:

$$c^i,\ \mu > 0,\ d_{k-1}^j = \omega_{k-1}^j + b_{k-1}^j,\ f^{kj},\ [K^{kj}]_B,\ \beta > 0,\ \delta_1,\ \delta_2$$

et

$$\{v_p = \underline{c}_p \text{ pour } p \leqslant k-1,\ v_p = c^p \text{ pour } p \geqslant k+1\}.$$

Il existe donc $\underline{c}^k \in M,\ d_k^j = \omega_k^j + b_k^j \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}_*$ tels que:

$$\left\| [\underline{c}^k \otimes d_k^j]_B - ([c^k \otimes d_{k-1}^j]_B + [K^{kj}]_B + [f^{kj}]]_B) \right\| < \theta\delta_1$$

avec les propriétés 1), 2), 3) et 4) données par 2.3, en particulier 3), 4) qui nous assurent que:

$$\left\| [\underline{c}^i \otimes (d_{k-1}^j - d_k^j)]_B \right\| < \mu \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant k-1$$

$$\left\| [c^i \otimes (d_{k-1}^j - d_k^j)]_B \right\| < \mu \text{ pour } k+1 \leqslant i \leqslant n.$$

$n^{\text{éme}}$ *etape*: On transforme $[c^n \otimes d_{n-1}^j]_B + [K^{nj}]_B + [f^{nj}]]_B$ sans trop modifier les termes $[\underline{c}^i \otimes d_{n-1}^j]_B$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Pour cela, soit $\mathcal{R}_0^n$ un sous-espace de $\mathcal{R}_*$ réduisant pour R_* orthogonal au vecteurs $\{A_*\underline{c}^i,\ i \leqslant n-1\}$ et $R_*|\mathcal{R}_0^n$ soit unitairement équivalent à $M_{e^{it}}$ sur $L^2(\Sigma_*)$.

On applique alors le lemme 2.3 avec:

$$\mu > 0,\ \underline{c}^n \in M,\ d_{n-1}^j = \omega_{n-1}^j + b_{n-1}^j,\ f^{nj},\ [K^{nj}]_B,\ \beta,\ \delta_1,\ \delta_2$$

et

$$v_p = \{\underline{c}^p,\ 1 \leqslant p \leqslant n-1\}.$$

Donc il existe $\underline{c}^n \in M,\ d_n^j = \omega_n^j + b_n^j \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}_*$ tels que:

$$\left\| [c^n \otimes d_{n-1}^j]_B + [K^{nj}]_B + [f^{nj}]]_B - [\underline{c}^n \otimes d_n^j]_B \right\| < \theta\delta_1.$$

avec les propriétés 1), 2), 3) et 4). En particulier 3) et 4) nous assurent que pour $i \leqslant n-1$ on a:

$$\left\| [\underline{c}^i \otimes (d_{n-1}^j - d_n^j)]_B \right\| < \mu.$$

On pose alors $\underline{d}^j = d_n^j$ et on a:

$$\|c^1 \otimes d^j]_B + [K^{1j}]_B + [f^{1j}]]_B - [\underline{c}^1 \otimes \underline{d}^j]_B\| \leqslant \|c^1 \otimes d^j]_B + [K^{1j}]_B + [f^{1j}]]_B -$$

$$- [\underline{c}^1 \otimes d^j]_B \| + \sum_{k=1}^{n-1} \left\| [\underline{c}^1 \otimes (d^j_k - d^j_{k+1})]_B \right\| \leqslant \theta\delta_1 + (n-1)\mu < \theta\delta.$$

Pour $1 < i < n$:

$$\|[c^i \otimes d^j]_B + [K^{ij}]_B + [f^{ij}]]_B - [\underline{c}^i \otimes \underline{d}^j]_B\| \leqslant \|[c^i \otimes d^j]_B + [K^{ij}]_B + [f^{ij}]]_B -$$
$$- [\underline{c}^i \otimes d^j_i]_B \Big\| + \sum_{p=0}^{i-2} \left\| [\underline{c}^i \otimes (d^j_p - d^j_{p+1})]_B \right\| + \sum_{p=i}^{n-1} \left\| [c^i \otimes (d^j_p - d^j_{p+1})]_B \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \theta\delta_1 + (n-1)\mu < \theta\delta;$$

$$\|[c^n \otimes d^j]_B + [K^{nj}]_B + [f^{nj}]]_B - [\underline{c}^n \otimes \underline{d}^j]_B\| \leqslant \Big\|[c^n \otimes d^j_{n-1}]_B + [K^{nj}]_B + [f^{nj}]]_B -$$
$$- [\underline{c}^n \otimes d^j_n]_B \| + \sum_{p=0}^{n-2} \left\| [\underline{c}^n \otimes (d^j_p - d^j_{p+1}]_B \right\| \leqslant \theta\delta_1 + (n-1)\mu < \theta\delta.$$

En ce qui concerne les inégalités on a:

(1) $\|\underline{c}^i - c^i\| = \|u^i + \overline{u}^i\| \leqslant 3(n\delta)^{1/2}$.

(2) $\|\underline{d}^j\|^2 = \|\underline{\omega}^j\|^2 + \|\underline{b}^j\|^2$.

Or

$$\|\underline{\omega}^j\| \leqslant \|\omega^j\| + \sum_{k=1}^{n} \left\|\omega^j_k - \omega^j_{k-1}\right\| \leqslant \|\omega^j\| + n(\delta_1)^{1/2}, \text{ et } \|\underline{b}^j\| \leqslant \|b^j\| + (n(\delta)^{1/2})$$

donc

$$\|\underline{d}_j\|^2 \leqslant (\|\omega^j\| + n(\delta)^{1/2})^2 + (\|b^j\| + n(\delta)^{1/2})^2 \leqslant (\|d^j\|^2 + 2n(\delta)^{1/2})^2.$$

D'où $\|\underline{d}^j\| \leqslant \|d^j\| + 2n(\delta)^{1/2}$.

La proposition 3.3 admet une version duale, dont la démonstration peut se baser sur le lemme 2.4.

PROPOSITION 3.4. *Soient $T \in \mathbb{A}$, $M \in \mathrm{SI}(T)$ avec T_M non unitaire, R^M de multiplicité $\geqslant n$ ($n \geqslant 1$) sur Σ^M, $\overline{A^M}(M) = \mathcal{R}^M$, $\mathcal{L}$ un sous-espace de H contenant M.*

Supposons donnés $(a^i = \omega^i + \mu^i) \in \mathcal{S}^M_* \oplus \mathcal{R}^M$, $(b^j) \in M$ $(1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$, $(f^{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in L^1(\Sigma^M)$ $[K^{ij}]_{U^M_+} \in \beta ecef(\mathcal{E}^1_\theta(\mathcal{A}_{U^M_+}, M, \mathcal{L})$, et des scalaires $0 < \theta < < \cdot 1$, $0 < \beta < \delta_1$, $\delta_2 > \|f^{ij}\|$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\underline{a}_i = \underline{\omega}^i + \underline{\mu}^i \in \mathcal{S}^M_* \oplus \mathcal{R}^M$, $(\underline{b}^j) \in M$ $(1 \leqslant j,\ j \leqslant n)$ tels que:

$$\left\|[K^{ij}]_{U^M_+} + [f^{ij}]]_{U^M_+} + [a^i \otimes b^j]_{U^+_M} - [\underline{a}^i \otimes \underline{b}^j]_{U^M_+}\right\| < \theta\delta$$
$$\|\underline{b}^j - b^j\| < 3(n\delta)^{1/2} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$
$$\|\underline{a}^i\| < \|a^i\| + 2n(\delta)^{1/2} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

De plus on a:

(1) $\underline{b}^j = b^j + v^j + \overline{v}^j$, v^j *et* $\overline{v}^j$ *dans* M, $\overline{v}^j = \overline{v}^j_p$ *pour un* p *assez grand et* $(\overline{v}^j_m)_m$ *est une suite dans* M *qui converge faiblement vers zéro, et*

(2) $\|Q\overline{v}^j\| < \varepsilon$.

4. $T^{(n)} \in \mathbb{A}_n$

Rappelons que pour $T \in \mathcal{L}(H)$ et $n \geqslant 1$, on définit $T^{(n)} \in \mathcal{L}(H^{(n)})$ où $H^{(n)} = H \oplus \ldots \oplus H$ (n copies) par: $T^{(n)}(u_1 \oplus \ldots \oplus u_n) = Tu_1 \oplus \ldots \oplus Tu_n$.

Nous partons comme dans [6] de la triangulation de T sous la forme(cf. [11, p.73]):

$$T = \begin{pmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \text{ avec } T_0 \in C_{0\cdot} \text{ et } T_1 \in C_{1\cdot},$$

relativement à la décomposition $H = H_0 \oplus H_1$ où $H_0 = \{x \in H \mid \|T^n x\| \to 0\}$ ainsi $H_0 \subset \mathcal{S}$.

Soit $E_0 = E_T$ le borélien essentiel maximal pour T_0 ([6, Proposition 3.3]), et $E_1 = \mathbf{T} \setminus E_0$.

Du résultat $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1(1)$ nous déduisons le résultat suivant qui n'est autre que la proposition 6.2 de [6] avec $\theta = 0$. (Nous désignons par $\sigma_p(T)$ le spectre punctuel de l'opérateur T.)

PROPOSITION 4.1. *Soit* $T \in \mathbb{A}$ *et* $\lambda \in \mathbf{D} \setminus \sigma_p(T)$ *alors* $[C_\lambda]_T$ (cf. [6, p.278]) $\in \mathcal{E}_0^r(\mathcal{A}_T)$, *plus précisement il existe une suite* $(x_{n,\lambda})_n$ *dans la boule unité de* H *tel que:*

$$\lim \|[C_\lambda]_T - [x_{n,\lambda} \otimes x_{n,\lambda}]_T\| = 0 \tag{1}$$

$$\forall \omega \in H,\ \|[x_{n,\lambda} \otimes \omega]_T\| \to 0. \tag{2}$$

Démonstration. Puisque $[C_\lambda]_T \in Q_T$ et $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1(1)$, il existe $u, v \in H$ tel que $[C_\lambda]_T = [u \otimes v]_T$ et ceci entraine que:

$$((T-\lambda)^k u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

et la suite de la démonstration est exactement celle de 6.2 de [6] faite directement avec T au lieu de $T^{(2)}$.

Rappelons quelques définitions et résultats de [6] simplifiés en tenant compte de 4.1.

Pour chaque $\lambda \in \mathbf{D} \setminus \sigma_p(T)$ soit $(x_{n,\lambda})_n$ une suite de H vérifiant la proposition 4.1, on pose $\gamma_\lambda = \lim \left\| x^0_{n,\lambda} \right\|$ ($\forall x \in H$, $x = x^0 + x^1$ relativement à la décomposition $H = H_0 \oplus H_1$) et on définit pour $\gamma \in [0, 1/2]$, $\mathcal{D}_\gamma = \{\lambda \in \mathbf{D} \setminus \sigma_p \mid \mid \gamma_\lambda \leqslant \gamma\}$.

PROPOSITION 4.2. *Si* $\lambda \in \mathcal{D}_\lambda$ (cf. [6, p. 285]) *alors* $[C_\lambda]_T \in \mathcal{E}^r_\lambda(\mathcal{A}_T, H_1, H_1)$ *plus précisement:*

$$\overline{\lim} \left\| [C_\lambda]_T - [x^1_{n,\lambda} \otimes x^1_{n,\lambda}]_T \right\| \leqslant \gamma$$

et $\forall \omega \in H_1$ *on a:*

$$\left\| [x^1_{n,\lambda} \otimes \omega]_T \right\| \to 0 \quad \text{où } x^1_{n,\lambda} = P_{H_1}(x_{n,\lambda})$$

et $x_{n,\lambda}$ *donnée par la proposition 4.1.*

PROPOSITION 4.3. *Pour tout* $\gamma \in]0, 1/2[$, $\mathcal{D}_\gamma$ *est dominant pour* E_1 *(i.e.* $E_1 \subset \subset \mathrm{LNT}(\mathcal{D}_\gamma)$*).*

LEMME 4.4. *Soit* $T \in \mathbf{A}$, *tel que* $m(\Sigma^{H_0})$ *et* $m(\Sigma^{H_1}_*) < 1, R^{H_0}$ *(resp.* $R^{H_1}_*$*) de multiplicité* $\geqslant n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) *sur* Σ^{H_0} *(resp.* $\Sigma^{H_1}_*$*), et soient* $([L^{ij}]_T)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *dans* Q_T; a^i, b^j ($1 \leqslant i,\ j \leqslant n$) *dans* H_0, c^i, d^j ($1 \leqslant i,\ j \leqslant n$) *dans* H_1 *et* $\delta > 0$ *tels que:*

$$\left\| [L^{ij}]_T - [(a^i + c^i) \otimes (b^j + d^j)]_T \right\| < \delta.$$

Alors il existe a^i_1, b^j_1 ($1 \leqslant i,\ j \leqslant n$) *dans* H_0, c^i_1, d^j_1 ($1 \leqslant i,\ j \leqslant n$) *dans* H_1 *tel que:*

$$\left\| [L^{ij}]_T - [(a^i_1 + c^i_1) \otimes (b^j_1 + d^j_1)]_T \right\| < (1/4)\delta$$

avec

$$\left\| c^i_1 - c^i \right\| \text{ et } \left\| b^j_1 - b^j \right\| < 3(n\delta)^{1/2}, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n.$$

$$\left\| a^i_1 \right\| < \left\| a^i \right\| + 2n\delta^{1/2}; \quad \left\| d^j_1 \right\| < \left\| d^j \right\| + 2n(\delta)^{1/2}, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n.$$

Demonstration. Soit $f^{ij} \in L^1(\mathbf{T})$ tel que:

$$[f^{ij}]]_T = [L^{ij}]_T - [(a^i + c^i) \otimes (b^j + d^j)]_T \text{ et } \left\| f^{ij} \right\| \leqslant \delta.$$

On décompose $f^{ij} = f^{ij}_0 + f^{ij}_1$ avec $f^{ij}_0 \in L^1(E_0)$ et $f^{ij}_1 \in L^1(E_1)$, $\left\| f^{ij}_0 \right\| < \delta_0$, $\left\| f^{ij}_1 \right\| < \delta_1$ avec $\delta_0 + \delta_1 = 2\delta - 5\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

Fixons $\gamma > 0$ tel que $\gamma(n\delta_1)^{1/2} \left\| b^j \right\| < \varepsilon$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$ et $\gamma < 1/4$. Nous transformons d'abord

$$[c^i \otimes d^j]_{B^{H_1}} + [f^{ij}_1]]_{B^{H_1}}$$

en utilisant la proposition 3.3 avec $M = H_1$ et les propositions 4.2 et 4.3.

En effet la dominance de $\mathcal{D}_\gamma$ pour E_1 entraine que:

$$[f_1^{ij}]]_T \in \left\| f_1^{ij} \right\| \operatorname{ecef}\left(\{[C_\lambda]_T, \lambda \in \mathcal{D}_\gamma\} \subset \delta_1 \operatorname{ecef}\left(\mathcal{E}^r_{1/4}(\mathcal{A}_T, H_1, H_1)\right)\right).$$

Donc $[f_1^{ij}]]_{B^{H_1}} \in \delta_1 \operatorname{ecef}\left(\mathcal{E}^r_{1/4}(\mathcal{A}_{B^{H_1}}, H_1, H_1)\right)$.

Il existe donc $(\underline{c}^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans H_1, $(\underline{d}^j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans $\mathcal{S}^{H_1} \oplus \mathcal{R}_*^{H_1}$ tel que:

$$\left\| [f_1^{ij}]]_{B^{H_1}} + [c^i \otimes d^j]_{B^{H_1}} - [\underline{c}^i \otimes \underline{d}^j]_{B^{H_1}} \right\| < (1/4)\delta_1$$

avec $\left\|\underline{c}^i - c^i\right\| < 3(n\delta_1)^{1/2}$ et $\left\|\underline{d}^j\right\| < \left\|d^j\right\| + 2n(\delta_1)^{1/2}$, $\underline{c}^i = c^i + (u^i)^1 + \overline{u}^i$, $(u^i)^1$ et $\overline{u}^i$ verifiant les propriétés de 2.3. Tenant compte de 4.1 et 4.3 $(u^i)^1$ est la projection orthogonale sur H_1 d'un vecteur $u^i \in H$:

$$u^i = \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{l_{j-1}<k\leqslant l_j} \alpha_k^{ij} x_{k,n_k}^{ij} \text{ avec } \sum_{i,j} \left|\alpha_k^{ij}\right| < n\delta_1$$

et chaque x_{k,n_k}^{ij} est choisie dans une suite $(x_{k,n}^{ij})_n$ telle que:

$$\left\| [x_{k,n}^{ij} \otimes \omega]_T \right\| \underset{n}{\to} 0 \text{ pour tout } \omega \in H, \quad \text{et } \lim_n \left\| (x_{k,n}^{ij})^0 \right\| < \gamma.$$

En prenant tous les n_k assez grands on assurera:

$$\left\| [u^i \otimes b^j]_T \right\| < \varepsilon \text{ et } \left\| (x_{k,n_k}^{ij})^0 \right\| < \gamma \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Puisque $(x_{k,n}^{ij})_n$ tend faiblement vers zéro, le choix succesif des n_k peut se faire de sorte que:

$$\left\| (u^i)^0 \right\|^2 \simeq \sum \left|\alpha_k^{ij}\right| \left\| (x_{k,n_k}^{ij})^0 \right\|^2 < \gamma^2(n\delta_1)$$

donc $\left\| [(u^i)^1 \otimes b^j]_T \right\| < 2\varepsilon$.

De même la proposition 3.3 nous donne que:

$$\left\| Q\overline{u}^i \right\| < \varepsilon/(1 + \|b^j\|), \quad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$$

et puisque $H_0 \subset \mathcal{S}$ (donc $Qb^j = b^j$) on a:

$$\left\| [u^i \otimes b^j]_T \right\| = \left\| [u^i \otimes b^j]_B \right\| = \left\| [Qu^i \otimes b^j]_B \right\| < \varepsilon \quad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$$

ainsi avec $c_1^i = \underline{c}^i$ et $d_1^j = P_{H_1}(\underline{d}^j)$ et puisque $j = (\varphi_{B^{H_1}}^{-1} \circ \varphi_T)$ est une isométrie de Q_T dans $Q_{B^{H_1}}$, on a

$$\left\| [c^i \otimes (b^j + d^j)]_T + [f_1^{ij}]]_T - [c_1^i \otimes (b^j + d_1^j)]_T \right\| < \frac{1}{4}\delta_1 + 3\varepsilon$$

avec les inégalités désirées concernant $\|c_1^i - c^i\|$ et $\left\|d_1^{ij}\right\|$.
D'aprés [6, lemme 6.1] on a $[f_0^{ij}]]_T \in \mathcal{E}_0^l(\mathcal{A}_T, H_0)$. Donc

$$[f_0^{ij}]]_{U_+^{H_0}} \in \mathcal{E}_0^l(\mathcal{A}_{U_+^{H_0}}, H_0)$$

et d'après la proposition 3.4 il existe $(\underline{a}^i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{S}_*^{H_0} \oplus \mathcal{R}^{H_0}$, $(\underline{b}^j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans H_0 tel que:

$$\left\|[a^i \otimes b^j]_{U_+^{H_0}} + [f_0^{ij}]]_{U_+^{H_0}} - [\underline{a}^i \otimes \underline{b}^j]_{U_+^{H_0}}\right\| < \frac{1}{4}\delta_0$$

avec $\|\underline{b}^j - b^j\| < 3(n\delta_0)^{1/2}$, $\|\underline{a}^i\| < \|a^i\| + 2n(\delta_0)^{1/2}$.

En outre $\underline{b}^j = b^j + y_{nj} + \overline{v}^j$ où y_{nj} et $\overline{v}^j$ sont des termes de suites dans H_0 qui convergent faiblement vers 0, donc on peut choisir y_{nj} et $\overline{v}^j$ de sorte que $\|[c_1^i \otimes (y_{nj} + \overline{v}^j)]_T\| < \varepsilon$ (cf. [6, lemme 6.1]).

Finalement avec $a_1^i = P_{H_0}(\underline{a}^i)$ et $b_1^j = \underline{b}^j$ on a:

$$\left\|[a^i \otimes b^j]_T + [f_0^{ij}]]_T - [a_1^i \otimes b_1^j]_T\right\| < (1/4)\delta_0 \quad \text{et} \quad \left\|[c_1^i \otimes (b_1^j - b^j)]_T\right\| < \varepsilon.$$

En regroupant on a:

$$\left\|[L^{ij}]_T - [(a_1^i + c_1^i) \otimes (b_1^j + d_1^j)]_T\right\| \leqslant \frac{1}{4}\delta_1 + 3\varepsilon + \frac{1}{4}\delta_0 + \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\delta$$

ainsi que les diverses inégalites désirées.

THÉORÈME 4.5. *Soit $T \in \mathbf{A}(H)$ tel que R^{H_0} et $R_*^{H_1}$ soient de multiplicité $\geqslant n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sur Σ^{H_0} et $\Sigma_*^{H_1}$ respectivement. Alors $T \in \mathbf{A}_n(H)$.*

Démonstration. Deux cas sont envisageables:

1

1er *cas*: Si $m(\Sigma^{H_0})$ et $m(\Sigma_*^{H_1}) < 1$.

Soient $[L^{ij}]_{T(1\leqslant i,j\leqslant n)}$ dans Q_T et $\delta > \|[L^{ij}]_T\|$ pour tout $(1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$. Le lemme 4.4 nous permet de construire des suites $(a_m^i)_m$, $(b_m^j)_m$ dans H_0, $(c_m^i)_m$, $(d_m^j)_m$ dans H_1 telles que:

$$a_0^i = b_0^j = c_0^i = d_0^j = 0 \quad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$$

$$\|[L^{ij}]_T - [(a_m^i + c_m^i) \otimes (b_m^j + d_m^j)]_T\| < \left(\frac{1}{2}\right)^m \delta$$

$$\|c_{m+1}^i - c_m^i\| \text{ et } \left\|b_{m+1}^j - b_m^j\right\| < 3(n\delta)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \quad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$$

$$\|a_{m+1}^i\| < \|a_m^i\| + n\delta^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m, \quad \left\|d_{m+1}^j\right\| < \|d_m^j\| + n\delta^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m.$$

Ces inégalités montrent que $(c_m^i)_m$ et $(b_m^j)_m$ sont des suites de Cauchy et que les suites $(\|a_m^i\|)_m$, $(\|d_m^j\|)_m$ sont bornées par: $n\delta^{1/2}\dfrac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Posant $b^j = \lim b^j_m$, $c^i = \lim c^i_m$ il vient que:

$$\lim \left\| [L^{ij}]_T - [(a^i_m + c^i) \otimes (b^j + d^j_m)]_T \right\| = 0.$$

Soient a^i et b^j des limites faibles de sous-suites (a^i_n), (d^j_n). Tenant compte de $[a^i_m \otimes d^j_m]_T = 0$ et de la continuité faible des applications: $x \to [x \otimes b^j]$, $y \to [c^i \otimes y]$ on obtient:

$$[L^{ij}]_T = [(a^i + c^i) \otimes (b^j + d^j)]_T \text{ pour tout } 1 \leqslant i,\ j \leqslant n.$$

$2^{\text{ème}}$ *cas*: Si $m(\Sigma^{H_0}) = 1$ ou $m(\Sigma^{H_1}_*) = 1$.

Notons que dans ce cas on a $T_0 \in \mathbb{A}_{\aleph_0,1}$ ou $T_1 \in \mathbb{A}_{1,\aleph_0}$ (cf. [7, théorème 3.5]) et la conclusion découle alors aussi du résultat principal de [10].

THÉORÈME 4.6. *Si $T \in \mathbb{A}(H)$ et $n \in \mathbb{N}^*$ alors $T^{(n)} \in \mathbb{A}_n(H^{(n)})$.*

Demonstration.

C'est une application immédiate de 4.5. En effet partant de

$$T = \begin{pmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \text{ on a } T^{(n)} = \begin{pmatrix} T_0^{(n)} & * \\ 0 & T_1^{(n)} \end{pmatrix}$$

relativement à la décomposition $H_0^{(n)} \oplus H_1^{(n)}$, on a alors la multiplicité de $R^{H_0^{(n)}} = (R^{H_0})^{(n)}$ est $\geqslant n$ sur Σ^{H_0} et il en est de même pour $R_*^{H_1^{(n)}} = (R_*^{H_1})^{(n)}$ sur $\Sigma_*^{H_1}$.

COROLLAIRE 4.7. (i) *Soit $T \in \mathbb{A}$, tel que la multiplicité de R^{H_0} (resp. $R_*^{H_1}$) est égale à $\aleph_0$ sur Σ^{H_0} (resp. $\Sigma_*^{H_1}$). Alors $T \in \mathbb{A}_{\aleph_0}$.*
(ii) *En particulier si $T \in \mathbb{A}$, alors $T^{(\aleph_0)} \in \mathbb{A}_{\aleph_0}$.*

Demonstration. Pour la démonstration de (i) il suffit de remarquer que dans ces conditions $T \in \mathbb{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc $T \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_{\aleph_0}$.

Il en est de même pour (ii).

BIBLIOGRAPHIE

1. APOSTOL, C., Ultraweakly closed algebras, *J. Operator Theory*, **2**(1979), 49–61.
2. BERCOVICI, H., A note on property (A_1), preprint.
3. BERCOVICI, H., Factorization theorems and the structure of operators on Hilbert space, *Ann. of Math.*, **128**(1988), 399–413.
4. BERCOVICI, H.; FOIAŞ, C.; PEARCY, C., Dilation theory and systems of simultaneous equations in the predual of an operator algebra. I, *Michigan Math. J.*, **30**(1983), 335–354.
5. BROWN, S.; CHEVREAU, B.; PEARCY, C., On the structure of contraction operators. II, *J. Funct. Anal.*, **76**(1988), 30–57.

6. CHEVREAU, B., Sur les contractions à calcul fonctionnel isometrique. II, *J. Operator Theory.*, **20**(1988), 269–293.
7. CHEVREAU, B.; EXNER, G.; PEARCY, C., On the structure of contraction operators. III, *Michigan Math. J.*, **36**(1989), 29–62.
8. CHEVREAU, B.; PEARCY, C., On the structure of contraction operators with applications to invariant subspaces, *J. Funct. Anal.*, **67**(1986), 360–379.
9. CHEVREAU, B.; PEARCY, C., On the structure of contraction operators. I, *J. Funct. Anal.*, **76**(1988), 1–29.
10. SAINA, M., Sur l'appartenance aux classes $\mathbb{A}_{n,\aleph_0}$, preprint.
11. SZ-NAGY, B.; FOIAŞ, C., *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North Holland, Amsterdam, 1970.

M. OUANNASSER
U.F.R. Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I
351, Cours de la Libération
33405 Talence Cedex
France

Present address:
Departement de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Université Hassan II,
Casablanca,
Maroc

Received September 17, 1990.