J. OPERATOR THEORY
29(1993), 157–165

© Copyright by IMAR, 1993

ITERATION DE MOSER ET ESTIMATION GAUSSIENNE DU NOYAU DE LA CHALEUR

THIERRY COULHON

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie réel, connexe, unimodulaire, et $\{X_1, \ldots, X_k\}$ une famille de champs de vecteurs sur G, invariants par translation à gauche, vérifiant la condition de Hörmander: l'algèbre de Lie engendrée par $X_1, \ldots, X_k$ est l'algèbre de Lie de G toute entière. Sous cette condition, d'une part l'opérateur $\Delta = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ est hypoelliptique, et d'autre part les champs $X_1, \ldots, X_k$ fournissent une distance sur G: étant donnés $x, y \in G$, notons $C_{x,y}$ l'ensemble des chemins absolument continus $l\colon [0,1] \to G$ tels que $l(0) = x$, $l(1) = y$, $l'(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) X_i$ p.p. en $t \in [0,1]$, et soit $|l| = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2(t) \right)^{1/2} dt$; alors la quantité $\rho(x,y) = \inf\{|l|;\, l \in C_{x,y}\}$ est finie, et ρ est une distance.

Une mesure de Haar sur G étant fixée, notons $V(t)$ la mesure de la boule centrée en l'origine e du groupe et de rayon $t > 0$ pour la distance ρ; on sait qu'il existe un entier d et $C > 0$ tels que $C^{-1}t^d \leqslant V(t) \leqslant Ct^d$, $\forall t \in]0,1[$. Nous supposerons par ailleurs que G est à croissance polynômiale du volume, c'est-à-dire qu'il existe un entier D et $C > 0$ tels que $C^{-1}t^D \leqslant V(t) \leqslant Ct^D$, $\forall t > 1$. Pour des détails et des références sur tout ce qui précède, voir [11].

Soit $P_t = e^{t\Delta}$ le semi-groupe de la chaleur associé à Δ, et p_t son noyau:

$$P_t f(x) = \int f(y) p_t\left(y^{-1}x\right) \, dy.$$

Varopoulos a montré dans [11] que, sous les hypothèses précédentes, il existe $C > 0$ tel que:

$$(*) \qquad p_t(e) = \sup_{x \in G} p_t(x) = \|P_t\|_{1 \to \infty} \leqslant C V^{-1}(\sqrt{t}), \quad \forall t > 0.$$

Il a aussi montré comment déduire de cette estimation uniforme de $p_t(x)$ une estimation qui tienne compte de $|x| = \rho(x, e)$.

Plus précisément, il obtient l'existence de $C > 0$ tel que:

$$p_t(x) \leqslant C t^{-d/2} \left(1 + \frac{|x|^2}{t}\right)^{\alpha} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad \forall x \in G, \quad \forall t \in]0, 1[,$$

et

$$p_t(x) \leqslant C t^{-D/2} \left(1 + \frac{|x|^2}{t}\right)^{\beta} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad \forall x \in G, \quad \forall t > 1,$$

pour $\alpha = \frac{d}{2} + 1$ et $\beta = \frac{1}{2} \max[d, D] + 3$.

Sa méthode a pour point de départ une idée de Davies ([4]), qui consiste à estimer $\|e^{-\lambda\varphi} T_t e^{\lambda\varphi}\|_{1 \to \infty}$ en fonction de λ et t, uniformément en les fonctions φ C^∞ à support compact telles que $|\nabla\varphi| \leqslant 1$, à approcher $|\cdot|$ par de telles fonctions φ, et à optimiser en choisissant λ en fonction de x et de t. Pour estimer $\|e^{-\lambda\varphi} T_t e^{\lambda\varphi}\|_{1 \to \infty}$, on dispose d'inégalités de type de Sobolev sur l'opérateur $e^{-\lambda\varphi} \Delta e^{\lambda\varphi}$, obtenue à partir de celles sur Δ, qui elle-mêmes proviennent de l'estimation uniforme $(*)$. Pour exploiter ces inégalités de Sobolev, Varopoulos met en œuvre une machinerie abstraite de semi-groupes d'opérateurs, élaborée dans [7], [8] et [9], et inspirée du procédé itératif de Moser ([6]).

Cependant, l'estimation ci-dessus n'est pas optimale. Davies, qui, dans une situation analogue, a d'abord démontré dans [4] l'estimation plus faible

$$(**) \qquad \forall \delta > 0,\ p_t(x) \leqslant C_\delta V^{-1}(\sqrt{t}) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(1+\delta)t}\right), \quad \forall x \in G,\ \forall t > 0$$

en utilisant le théorème de Gross sur les inégalités de Sobolev logarithmiques, a ensuite réussi avec Pang ([5]) à reprendre cette méthode pour obtenir:

$$(***) \qquad \begin{aligned} p_t(x) &\leqslant C \min\left\{ t^{-d/2} \left(1 + \tfrac{|x|^2}{t}\right)^{d/2}, t^{-D/2} \left(1 + \tfrac{|x|^2}{t}\right)^{D/2} \right\} \exp\left(-\tfrac{|x|^2}{4t}\right), \\ &\qquad \forall x \in G, \forall t > 0, \text{ si } d \leqslant D, \text{ et} \\ p_t(x) &\leqslant C \max\left\{ t^{-d/2} \left(1 + \tfrac{|x|^2}{t}\right)^{d/2}, t^{-D/2} \left(1 + \tfrac{|x|^2}{t}\right)^{D/2} \right\} \exp\left(-\tfrac{|x|^2}{4t}\right), \\ &\qquad \forall x \in G, \forall t > 0, \text{ si } d \geqslant D. \end{aligned}$$

Enfin, Carlen, Kusuoka et Strook, en utilisant pour leur part les inégalités de Nash, écrivent dans [1] une estimation $(**)$ où C_δ est explicite, de sorte qu'un bref calcul à partir de leur théorème doit pouvoir donner à nouveau $(***)$.

Le but de cet article peut paraître assez futile: il s'agit de montrer que le procédé itératif de Moser peut aussi donner les exposants optimaux (ou du moins les meilleurs connus à ce jour). Toutefois, il n'est peut-être pas inutile de savoir que les trois méthodes disponibles sont à égalité dans ce domaine, d'autant que le procédé de Moser est rendu plus performant non pas au prix d'une complication, mais d'une simplification conceptuelle. L'amélioration porte en fait sur un énoncé abstrait de semi-groupes d'opérateurs (Théorème 2 ci-dessous), qui est susceptible de rendre d'autres services.

La méthode s'applique bien sûr aux diverses situations considérées par Davies, Strook et alia (opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété riemannienne, opérateurs uniformément elliptiques du second ordre sur $\mathbb{R}^n$), mais nous avons choisi pour être plus bref de nous limiter au contexte des groupes de Lie considéré dans [11]. Une autre solution aurait consisté à se placer dans la cadre général de [1], ou bien dans celui des semi-groupes de diffusion à la Bakry-Emery.

Il serait intéressant de voir ce que donne cette méthode, d'une part pour les minorations (en exploitant l'idée de Moser, reprise récemment par Bakry et Michel, de considérer des "normes" $L^p, p < 0$), d'autre part pour les marches aléatoires.

1. PERTURBATION DU NOYAU DE LA CHALEUR

Dans cette section, nous allons brièvement rappeler les éléments de la preuve, dûs à Davies et Varopoulos, auxquels nous n'apporterons pas de modification.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\varphi \in C_0^\infty(G)$; posons $T_t f(x) = e^{-\lambda\varphi(x)} P_t(e^{\lambda\varphi} f)(x)$. Nous définissons ainsi un semi-groupe T_t fortement continu sur les espaces $L^p(G, \mathrm{d}x)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Soit $-A$ son générateur infinitésimal: $-Af(x) = e^{-\lambda\varphi(x)} \cdot \Delta(e^{\lambda\varphi} \cdot f)(x)$. Désignons par $(\,,\,)$ le produit scalaire dans $L^2(G, \mathrm{d}x)$, et, pour $f \in C_0^\infty(G)$, soit ∇f le vecteur $(X_1 f, \ldots, X_k f)$ et $|\nabla f|$ sa norme euclidienne.

Un calcul élémentaire montre que, pour $p > 1$ et $f \in C_0^\infty(G)$, positive,

$$(-Af, f^{p-1}) = (\Delta f, f^{p-1}) + \lambda^2 \int |\nabla\varphi|^2 f^p \,\mathrm{d}x - \lambda(p-2) \int \nabla\varphi \cdot f^{p-1} \nabla f \,\mathrm{d}x.$$

Faisons maintenant l'hypothèse essentielle que $|\nabla\varphi| \leqslant 1$. On a alors, pour $p = 2$,

$$(-Af, f) \leqslant (\Delta f, f) + \lambda^2 \|f\|_2^2,$$

et plus généralement, pour $p \geqslant 2$ et $f \geqslant 0$,

$$(-Af, f^{p-1}) \leqslant (\Delta f, f^{p-1}) + \lambda^2 \int f^p \,\mathrm{d}x + |\lambda|(p-2) \int f^{p-1} |\nabla f| \,\mathrm{d}x.$$

L'inégalité de Hölder permet alors de dominer le troisième terme du membre de droite par la valeur absolue des deux premiers, et d'obtenir finalement:

$$(-Af, f^{p-1}) \leqslant \frac{1}{2} (\Delta f, f^{p-1}) + p\lambda^2 \|f\|_p^p.$$

Cette inégalité vaut dans un cadre général, cf. [1], Theorem 3.9.

Supposons maintenant que $\|P_t\|_{1\to\infty} \leqslant Ct^{-n/2}$, $\forall t > 0$, pour $n > 2$, ou bien de façon équivalente (cf. [7], [3]) que $\|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leqslant C(-\Delta f, f)$, $\forall f \in C_0^\infty(G)$. En appliquant l'inégalité précédente à $f^{p/2}$, pour $f \geqslant 0$ et $p > 1$, on obtient:

$$\|f\|^p_{\frac{pn}{n-2}} \leqslant \frac{Cp^2}{4(p-1)}\left(-\Delta f, f^{p-1}\right).$$

Ce dernier point, comme le précédent, vaut en fait pour tout semi-groupe sous-markovien symétrique (cf. [8], p.246). Finalement, pour $p > 2$,

$$\|f\|^p_{\frac{pn}{n-2}} \leqslant \frac{Cp^2}{p-1}\left(\left(A + p\lambda^2\right) f, f^{p-1}\right),$$

et $\|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leqslant C\left(\left(A+\lambda^2\right) f, f\right)$, où C est indépendant de p et de λ.

Admettons (ce sera l'objet de la prochaine section) qu'une telle famille d'inégalités entraîne:

$$\|T_t\|_{2\to\infty} \leqslant Ct^{-n/4}\left(1+\lambda^2 t\right)^{n/4} e^{\lambda^2 t}, \quad \forall t > 0, \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Puisque le transposé T_t^* s'écrit $e^{\lambda\varphi} P_t e^{-\lambda\varphi}$, il vérifie la même estimation, autrement dit

$$\|T_t\|_{1\to 2} = \|T_t^*\|_{2\to\infty} \leqslant Ct^{-n/4}\left(1+\lambda^2 t\right)^{n/4} e^{\lambda^2 t},$$

et finalement

$$\|T_t\|_{1\to\infty} \leqslant \|T_{t/2}\|_{1\to 2}\|T_{t/2}\|_{2\to\infty} \leqslant Ct^{-n/2}\left(1+\lambda^2 t\right)^{n/2} e^{\lambda^2 t}, \quad \forall t > 0, \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Comme T_t a pour noyau $\tilde{p}_t(x,y) = e^{-\lambda\varphi(x)} p_t\left(y^{-1}x\right) e^{\lambda\varphi(y)}$, on obtient ainsi:

$$e^{-\lambda\varphi(x)} p_t(x) e^{\lambda\varphi(e)} \leqslant \sup_{x,y} \tilde{p}_t(x,y) \leqslant Ct^{-n/2}\left(1+\lambda^2 t\right)^{n/2} e^{\lambda^2 t}, \quad \forall t > 0, \forall \lambda \in \mathbf{R},$$

d'où

$$p_t(x) \leqslant Ct^{-n/2}\left(1+\lambda^2 t\right)^{n/2} e^{\lambda^2 t + \lambda(\varphi(x) - \varphi(e))}.$$

On choisit alors pour φ une approximation C^∞ à support compact de $|\cdot|$ telle que $\varphi(e) \approx 0$, $\varphi(x) \approx |x|$ et $|\nabla\varphi| \leqslant 1$; après passage à la limite, on obtient

$$p_t(x) \leqslant Ct^{-n/2}\left(1+\lambda^2 t\right)^{n/2} e^{\lambda^2 t + \lambda|x|},$$

et en choisissant $\lambda = -\dfrac{|x|}{2t}$,

$$p_t(x) \leqslant Ct^{-n/2}\left(1 + \frac{|x|^2}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad \forall t > 0, \forall x \in G.$$

L'estimation $(***)$ en découle si $d \leqslant D$, puisqu'alors, d'après $(*)$, $\sup_{x\in G} p_t(x) \leqslant Ct^{-n/2}$, $\forall n \in [d, D]$. Le cas $d \geqslant D$ sera traité en III.

2. ITERATION DE MOSER

Notre but dans cette section est de prouver le:

THÉORÈME 2. *Soit* $(T_t)_{t\geqslant 0}$ *un semi-groupe, de générateur infinitésimal* $-A$, *opérant sur les espaces* $L^p(X,\zeta)$, $p\geqslant 2$, *où* (x,ξ) *est un espace mesuré* σ*-fini.*

Supposons que, $\forall p\geqslant 2$, $\|f\|_q^p\leqslant C_p\mathrm{Re}((A+\alpha\gamma_p)f,f_p)$, $\forall f\in\mathcal{D}$, *avec* $q=\dfrac{np}{n-2}$, $n>2$, C_p *et* γ_p *des fonctions positives de* p *majorées par un polynôme,* $\alpha>0$ *et* $\gamma_2=1$; $\mathcal{D}$ *est un espace de fonctions dense dans le domaine de* A, *et* $f_p=\mathrm{sgn}\,(f)|f|^{p-1}$.

Alors $\exists C$ *ne dépendant que de* n, C_p *et* γ_p *tel que:*

$$\|T_t\|_{2\to\infty}\leqslant Ct^{-n/4}(1+\alpha t)^{n/4}e^{\alpha t},\quad \forall t>0.$$

Nous allons d'abord montrer comment fonctionne l'idée de base en donnant une preuve très simple de l'énoncé qui intervient dans l'obtention de l'estimation uniforme (*) (cf. [8]). Cette preuve est extraite de [3].

THÉORÈME 1. *Soit* $(T_t)_{t\geqslant 0}$ *un semi-groupe équicontinu sur* $L^1(X,\zeta)$ *et* $L^\infty(X,\zeta)$, *et* p,q *tels que* $1<p<q\leqslant +\infty$. *Supposons qu'il existe* $C>0$ *tel que*

$$\|f\|_q^p\leqslant C\mathrm{Re}(Af,f_p),\quad \forall f\in\mathcal{D}.$$

Alors $\|T_t\|_{1\to\infty}\leqslant Ct^{-n/2}$, $\forall t>0$, *avec* $n=\dfrac{2q}{q-p}$.

Preuve. $\forall f\in\mathcal{D}$, $\forall t>0$, $\|T_tf\|_q^p\leqslant C\mathrm{Re}(AT_tf,(T_tf)_p)=-C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|T_tf\|_p^p$, donc en intégrant, $\displaystyle\int_0^t\|T_sf\|_q^p\,\mathrm{d}s\leqslant C\left(\|f\|_p^p-\|T_tf\|_p^p\right)$.

Comme $(T_t)_{t\geqslant 0}$ est équicontinu sur $L^q(X,\zeta)$, le membre de gauche majore $\dfrac{1}{M}t\|T_tf\|_q^p$, ou $M=\left(\sup\limits_t\|T_t\|_{q\to q}\right)^p$.

Finalement $\|T_t\|_{p\to q}\leqslant M^{\frac{1}{p}}t^{\frac{-1}{p}}$, $\forall t>0$.

On applique alors le lemme d'extrapolation de [2], II.

Dans la situation qui nous intéresse ici, c'est à dire dans le cas du semi-groupe perturbé introduit à la Section 2, la majoration de $\|T_t\|_{q\to q}$ que l'on peut écrire a priori n'est pas suffisamment bonne pour donner par extrapolation l'estimation souhaitée de $\|T_t\|_{2\to\infty}$; mais on dispose de toute une famille d'inégalités de Sobolev L^p-L^q, pour $p>2$, qui, si on les intègre comme ci-dessus, fourniront une famille d'estimations de $\|T_t\|_{p_\nu\to p_{\nu+1}}$, avec $p_\nu\to\infty$. En restant une fraction t_ν du temps t entre p_ν et $p_{\nu+1}$ en mettant ces estimations bout à bout, et en choisissant convenablement les t_ν, on obtiendra l'estimation cherchée.

Preuve du Théorème 2. Il s'agit de montrer que $\|T_t\|_{2\to\infty} \leqslant Ct^{-n/4}$, $\forall\alpha, t > 0$ tels que $\alpha t \leqslant 1$, et que $\|T_t\|_{2\to\infty} \leqslant C\alpha^{n/4}e^{\alpha t}$, $\forall\alpha, t > 0$ tels que $\alpha t \geqslant 1$. Mais la deuxième estimation est une conséquence facile de la première et des hypothèses. En effet, la première estimation donne en particulier $\|T_{\frac{1}{\alpha}}\|_{2\to\infty} \leqslant C\alpha^{-n/4}$, $\forall\alpha \geqslant 0$, et par hypothèse $\mathrm{Re}((A+\alpha)f, f) \geqslant 0$, $\forall f \in \mathcal{D}$, donc $\|T_t\|_{2\to2} \leqslant e^{\alpha t}$; finalement, pour $\alpha t \geqslant 1$,

$$\|T_t\|_{2\to\infty} \leqslant \left\|T_{\frac{1}{\alpha}}\right\|_{2\to\infty} \left\|T_{t-\frac{1}{\alpha}}\right\|_{2\to2} \leqslant C\alpha^{n/4}e^{\alpha\left(t-\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Fixons maintenant $p \geqslant 2$ et $q = \frac{np}{n-2}$. Si l'on note $\tilde{T}_t = e^{-\alpha\gamma_p t}T_t$, l'hypothèse se traduit par $\left\|\tilde{T}_t f\right\|_q^p \leqslant -C_p \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\tilde{T}_t f\right\|_p^p$, et donc, en intégrant,

$$\int_0^t e^{-\alpha p\gamma_p s}\|T_s f\|_q^p \,\mathrm{d}s \leqslant C_p \left(\|f\|_p^p - e^{-\alpha p\gamma_p t}\|T_t f\|_p^p\right), \quad \forall t > 0, \forall f \in \mathcal{D}$$

(on identifie abusivement les fonctions C_p et $\dfrac{C_p}{p}$).

A fortiori,

$$\int_0^t e^{-\alpha p\gamma_q s}\|T_s f\|_q^p \,\mathrm{d}s \leqslant C_p\|f\|_p^p, \quad \forall t > 0, \forall f \in \mathcal{D}$$

(rien n'empêche de supposer la suite γ_p croissante).

Mais comme $\mathrm{Re}((A+\alpha\gamma_q)f, f_q)$ est positif, le semi-groupe $e^{-\alpha\gamma_q t}T_t$ est contractant sur $L^q(X,\zeta)$, et $e^{-\alpha p\gamma_q t}\|T_t f\|_q^p \leqslant e^{-\alpha p\gamma_q s}\|T_s f\|_q^p$, pour $s < t$.

On obtient ainsi

$$\|T_t\|_{p\to q} \leqslant C_p^{1/p}e^{\alpha\gamma_q t}t^{-1/p}, \quad \forall t > 0.$$

Posons maintenant $k = \dfrac{n}{n-2}$, $p_\nu = 2k^\nu$ pour $\nu \in \mathbf{N}$, et observons que $\sum\limits_{\nu=0}^{+\infty} 1/p_\nu = n/4$. On a, pour toute suite (t_ν) de réels positifs vérifiant $\sum\limits_{\nu=0}^{+\infty} t_\nu = 1$,

$$\|T_t\|_{2\to+\infty} \leqslant \prod_{\nu=0}^{+\infty} \|T_{tt_\nu}\|_{p_\nu\to p_{\nu+1}},$$

et donc, d'après la majoration précédente,

$$\|T_t\|_{2\to+\infty} \leqslant \prod_{\nu=0}^{+\infty} C_{p_\nu}^{1/p_\nu} \prod_{\nu=0}^{+\infty} t_\nu^{-1/p_\nu} e^{\alpha t\sum\limits_{\nu=0}^{+\infty}\gamma_{p_{\nu+1}}t_\nu} t^{-n/4}, \quad \forall t > 0.$$

Grâce à la croissance polynômiale de C_p, on a $\prod\limits_{\nu=0}^{+\infty} C_{p_\nu}^{1/p_\nu} < +\infty$. Il suffit donc de choisir les t_ν pour que $\prod\limits_{\nu=0}^{+\infty} t_\nu^{-1/p_\nu} < +\infty$ et $\sum\limits_{\nu=0}^{+\infty} \gamma_{p_{\nu+1}}t_\nu < +\infty$, ce qui est facile, grâce à la croissance polynômiale de γ_p, pour terminer la preuve du théorème.

3. LE CAS GÉNÉRAL

Supposons maintenant $d > D$. On a, d'après $(*)$, $\|P_t\|_{1\to\infty} \leqslant Ct^{-d/2}$, pour $t \leqslant 1$, et $\|P_t\|_{1\to\infty} \leqslant Ct^{-D/2}$, pour $t > 1$.

Il en résulte (voir [2]) que:

$$\|f\|^2_{\frac{2d}{d-2}} \leqslant C(-\Delta f, f) + \|f\|_2^2$$

et

$$\|Sf\|^2_{\frac{2D}{D-2}} \leqslant C(1 + \|S\|_{2\to\frac{2D}{D-2}})(-\Delta f, f), \quad \forall f \in C_0^\infty(G),$$

où S est, disons, sous-markovien symétrique.

Des calculs analogues à ceux de la Section 1 donnent:

$$\|f\|^p_{\frac{pd}{d-2}} \leqslant C_p \mathrm{Re}((A + \alpha\gamma_p + 1)f, f_p), \quad \forall f \in C_0^\infty(G), \forall p \geqslant 2 \tag{1}$$

et

$$\|T_s f\|^p_{\frac{pD}{D-2}} \leqslant C_p \mathrm{Re}((A + \alpha\gamma_p)f, f_p)\left(1 + \|T_s\|_{2\to\frac{2D}{D-2}}\right), \tag{2}$$

$\forall s > 0, \forall f \in C_0^\infty(G), \forall p \geqslant 2$.

Il s'agit alors de montrer que

$$\|T_t\|_{2\to\infty} \leqslant C \max\{t^{-d/4}(1 + \alpha t)^{d/4}, t^{-D/4}(1 + \alpha t)^{D/4}\}e^{\alpha t}, \quad \forall t > 0,$$

autrement dit:

$$\|T_t\|_{2\to\infty} \leqslant Ct^{-d/4}, \text{ si } \alpha t \leqslant 1 \text{ et } t \leqslant 1 \tag{a}$$

$$\|T_t\|_{2\to\infty} \leqslant Ct^{-D/4}, \text{ si } \alpha t \leqslant 1 \text{ et } t \geqslant 1 \tag{b}$$

$$\|T_t\|_{2\to\infty} \leqslant C\alpha^{d/4}e^{\alpha t}, \text{ si } \alpha t \geqslant 1 \text{ et } \alpha \geqslant 1 \tag{c}$$

$$\|T_t\|_{2\to\infty} \leqslant C\alpha^{D/4}e^{\alpha t}, \text{ si } \alpha t \leqslant 1 \text{ et } \alpha \leqslant 1. \tag{d}$$

En partant de (1) et en appliquant le théorème 2 au semi-groupe $e^{-t}T_t$, on obtient:

$$\|T_t\|_{2\to\infty} \leqslant Ce^t t^{-d/4}(1 + \alpha t)^{d/4} e^{\alpha t},$$

donc (a).

Le cas (c) en découle, comme à la Section 2, si l'on utilise $\mathrm{Re}((A+\alpha)f,f)\geqslant 0$, qui vient de (2). Le cas (b) est plus subtil. On utilise d'abord (2) et (a) pour écrire:

$$\|T_s f\|_q^p \leqslant C_p e^{\alpha p s}\mathrm{Re}((A+\alpha\gamma_p)f,f_p)s^{-\theta},\ \ \forall s,\alpha\leqslant 1,\ \text{avec } \theta=d/2D.$$

En fixant d'abord s, et en procédant comme au début de la preuve du Théorème 2, on obtient:

$$\|T_{t+s}\|_{p\to q}\leqslant C_p^{1/p}t^{-1/p}e^{\alpha\gamma_q t}s^{-\theta/p}e^{\alpha s},$$

et l'on écrit:

$$\|T_{t+1}\|_{2\to\infty}\leqslant\prod_{\nu=0}^{+\infty}\|T_{tt_\nu+t_\nu}\|_{p_\nu\to p_{\nu+1}},$$

où $p_\nu=2k^\nu$, $k=\dfrac{D}{D-2}$.

En choisissant convenablement les t_ν, on obtient ainsi, pour $\alpha t\leqslant 1$ et $t\geqslant 0$, $\|T_{t+1}\|\leqslant e^\alpha Ct^{-d/4}e^{\alpha t}$.

Le cas (b) est ainsi réglé, et le cas (d) en découle comme précédemment.

Remarquons pour terminer que la méthode de la Section 2 permet, d'une façon générale, de rétablir les estimations écrites dans [10] en 4.I et 4.II (la preuve proposée, issue de [9], fournissait en fait $n/2+1$ au lieu de $n/2$ comme exposant de $1+\dfrac{d^2(x,y)}{t}$).

L'auteur remercie Damien Lamberton d'avoir bien voulu le rassurer en lisant une version préliminaire de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

1. CARLEN, E.; KUSUOKA, S.; STROOK, D., Upper bounds for symmetric Markov transition functions, *Ann. Inst. H. Poincaré, probabilités et statistiques*, suppl. au n° 2, 1987, 245–287.
2. COULHON, T., Dimension à l'infini d'un semi-groupe analytique, *Bull. Sc. Math.*, **114**(1990), 485–500.
3. COULHON, T., Dimensions of continuous and discrete semigroups, in *Semigroup theory and evolution equations*, Clément, Mitidieri, De Pugter, éd., Marcel Dekker Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. **135**(1991), 93–99.
4. DAVIES, E. B., Explicit constants for gaussian upper bounds on heat kernels, *Amer. J. Math.*, **109**(1997), 319–334.
5. DAVIES, E. B.; PANG, M., Sharp heat kernel bounds for some Laplace operators, *Quart. J. Math. Oxford*, **40**(1989), 281–290.
6. MOSER, J., A Harnack inequality for parabolic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **17**(1964), 101–134.
7. VAROPOULOS, N., Isoperimetric inequalities and Markov chains, *J. Funct. Anal.*, **63**(1985) 215–239.
8. VAROPOULOS, N., Hardy-Littlewood theory for semigroups, *J. Funct. Anal.*, **63**(1985), 240–260.

9. Varopoulos, N., Itération de Moser. Perturbation de semi-groupes sous-markoviens, *Compte Rendus Acad. Sci. Paris*, **300**(1985), 617–620.
10. Varopoulos, N., Semi-groupes d'opérateurs sur les espaces L^p, *Compte Rendus Acad. Sci. Paris*, **301**(1985), 865–867.
11. Varopoulos, N., Analysis of Lie groups, *J. Funct. Anal.*, **76**(1988), 346–410.

THIERRY COULHON
Equipe d'Analyse,
Université Paris VI,
Tour 46, 4ème étage,
4, place Jussieu,
75252 Paris Cedex 05,
France.

current address:
Département de Mathématiques,
Université de Cergy-Pontoise,
8, Le Campus,
95033 Cergy,
France.

Received February 4, 1991.