J. OPERATOR THEORY
33(1995), 249–258

SIMPLIFICATION DE LA CARACTÉRISATION DES OPÉRATEURS SPECTRAUX CONIQUES

ALAIN ALBUGUES

Communicated by Norberto Salinas

ABSTRACT. The caracterization of the spectral conical operators is simplified. We use the subdifferentiability property, and a property we call semi-adjointness.

KEYWORDS: *Conic spectral operator, monoton maximal operator, semi self-adjoint operator, subgradient, semigroup, semiring, semialgebra.*

AMS SUBJECT CLASSIFICATION: Primary 47H; Secondary 20M, 49N.

Les opérateurs spectraux coniques sont ceux définis sur des espaces hilbertiens réels, et admettant une décomposition spectrale par rapport à une résolution de l'identité de projecteurs sur des cônes convexes fermés. Les opérateurs spectraux coniques linéaires sont les opérateurs autoadjoints positifs habituels. En général, les propriétés des opérateurs spectraux coniques sont voisines d'une certaine façon de celles du cas linéaire (voir [6]).

La reconnaissance pratique de ces opérateurs est rendue délicate par leur caractérisation, que nous nous proposons de simplifier.

Soit donc la caractérisation des opérateurs spectraux coniques:

THÉORÈME ([6], Théorème 5.2, p.113). *Une application $T : D(T) \longrightarrow H$, $D(T) \subset H, H$ Hilbert réel, est un opérateur spectral conique, de décomposition*

$$T = \int_0^{+\infty} x \, \mathrm{d}P_x$$

où $(P_x)_{-\infty}^{+\infty}$ est une résolution spectrale de l'identité conique de support contenu dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ si et seulement si:

(a) *T est maximal monotone, et toutes ses puissances $T^k, k \geqslant 2$, sont monotones;*

(b) $T(aI + bT) = (aI + bT)T, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}_+;$

(c) $(T^h x, T^k x) = (T^{h'} x, T^{k'} x)$, $\forall h + k = h' + k', \quad h, h', k, k' \in \mathbf{N}$, $\forall x \in D(T^h) \cap D(T^k) \cap D(T^{h'}) \cap D(T^{k'})$.

1. LES RELATIONS DE SYMETRIE

Nous commençons par simplifier la condition (c) du théorème, en supposant le domaine de l'opérateur convexe (c'est le cas des opérateurs spectraux coniques). Nous faisons la remarque suivante:

1. REMARQUE. *Supposons que* Dom(T) *soit convexe (resp. ouvert), et que*

(i) *T est positivement homogène;*

(ii) *T commute avec $I + aT$, pour $a > 0$, suffisamment petit, (pourvu que $(I + aT)T$ et $T(I + aT)$ soient définis sur l'élément considéré).*

Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(T^{n+1}), \quad T^n(I + aT)x = (I + aT)T^n x,$$

pour a assez petit.

Cette relation se vérifie simplement par récurrence sur n, compte tenu du fait que, T étant positivement homogène, Dom(T) est un cône convexe et donc que $(I + aT)x \in \mathrm{Dom}(T^m)$, pour $x \in \mathrm{Dom}(T^{n+2})$, $m \leqslant n + 1$.

On vérifie alors

2. REMARQUE. *Si* Dom(T) *est convexe (resp. ouvert), et si*

(i) *T est positivement homogène;*

(ii) *T commute avec $I + aT$, pour $a > 0$, suffisamment petit;*

(iii) $\forall x \in \mathrm{Dom}(T^2), \ (T^2 x, x) = (Tx, Tx)$.

Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(T^{n+1}), \quad (T^{n+1}x, x) = (T^n x, Tx).$$

Cette relation se démontre simplement par récurrence pour $n \geqslant 2$. Pour $x \in \mathrm{Dom}(T^{n+2})$, $n \geqslant 1$, $(I + aT)x \in \mathrm{Dom}(T^{n+1}) \subset \mathrm{Dom}(T^n)$. La relation étant supposée vraie jusqu'à l'ordre n, la remarque 1 permet de développer

$$(T^n(I + aT)x, T(I + aT)x) = (T^{n+1}(I + aT)x, (I + aT)x)$$

qui donne le résultat.

3. REMARQUE. *Si*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\,(T^{n+1}), \quad (T^{n+1}x, x) = (T^n x, Tx)$$

alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\,(T^n), \quad \forall m \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant m \leqslant n,$$

$$(T^n x, x) = (T^{n-m}x, T^m x).$$

On peut supposer $0 < m < n$. Si $n - m < m$, on se ramène au cas contraire en posant $p = n - m$. Il suffit donc de vérifier la relation par récurrence sur les m tels que $n - m \geqslant m$, en la supposant vraie pour m tel que $n - m \geqslant m$, avec $n - (m+1) \geqslant (m+1)$, (poser $q = n - 2m - 1$).

4. REMARQUE. *Si* $\mathrm{Dom}\,(T)$ *est convexe (resp. ouvert), et si*
(i) T *est positivement homogène;*
(ii) T *commute avec* $I + aT$, *pour* $a > 0$, *suffisamment petit;*
(iii) $\forall x \in \mathrm{Dom}\,(T^2)$, $(T^2x, x) = (Tx, Tx)$.
Alors

$$\forall h, k, h', k' \in \mathbf{N}, h + k = h' + k',$$

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\,(T^h) \cap \mathrm{Dom}\,(T^k) \cap \mathrm{Dom}\,(T^{h'}) \cap \mathrm{Dom}\,(T^{k'}),$$

on a

$$(T^h x, T^k x) = (T^{h'}x, T^{k'}x), \quad \text{(c'est la condition(c))}.$$

Démonstration. C'est vrai si $h = h'$. Si $h \neq h'$, alors $k \neq k'$, et on pose

$$n = h + k = h' + k';$$

$$m = \min(h, k, h', k');$$

et p tel que $m + p$ soit l'exposant correspondant de m. La relation devient

$$(T^m x, T^{n-m}x) = (T^{m+p}x, T^{n-m-p}x).$$

Posons $q = n - m$,

$$(T^m x, T^q x) = (T^{m+p}x, T^{q-p}x).$$

Or $m \leqslant q = n - m \leqslant n$.

Posons $r = q - m, y = T^m x$; alors $y \in \mathrm{Dom}\,(T^{q-m}) = \mathrm{Dom}\,(T^r), \ldots$. Puisque $m \leqslant n - m - p = q - p$, et $r - p = (q - p) - m \geqslant 0$, la relation devient $(y, T^r y) = (T^p y, T^{r-p}y)$, vraie d'après la remarque 3. ∎

Compte tenu de la remarque 4, la remarque suivante permet de simplifier la condition (c) de symétrie, et de la remplacer en quelque sorte par la condition (b) de sous différentiabilité, du théorème 7.

5. REMARQUE ([1], p.27). *Si* Dom(T) *est convexe (resp. ouvert), et si*

(i) T *est positivement homogène;*

(ii) T *commute avec* $I + aT$, *pour* $a > 0$, *assez petit;*

(iii) *pour* $n \in \mathbb{N}$ *donné,* $T^n \subset \partial F_{T^n}$, *avec*

$$\forall\, x \in \mathrm{Dom}\,(T^n), \quad F_{T^n} = \frac{1}{2}(T^n x, x);$$

alors

$$\forall\, x \in \mathrm{Dom}\,(T^{n+1}), \quad (T^{n+1}x, x) = (T^n x, Tx).$$

Démonstration. Soit $a > 0$, assez petit. On a $(aT)^n = a^n T^n$, puisque, par récurrence, Dom$\,(aT)^n =$ Dom$\,(T^n)$.

On en déduit aussi que

$$(aT)^n \subset \partial F_{(aT)^n}.$$

Posons $U = aT$, et soit $x \in \mathrm{Dom}\,(U^{n+1}) = \mathrm{Dom}\,(T^{n+1})$.

Alors $x \in \mathrm{Dom}\,(U^n) = \mathrm{Dom}\,(T^n)$. D'après la remarque 1, au moins pour a assez petit,

$$U^n(I + U)x = (I + U)U^n x,$$

les deux membres de l'égalité étant bien définis, puisque, T étant positivement homogène, elle est équivalente à

$$T^n(I + aT)x = (I + aT)T^n x.$$

On peut écrire la relation $(aT)^n \subset \partial F_{(aT)^n}$ sous la forme

$$\forall\, x, y \in \mathrm{Dom}\,(U^n), \quad (U^n x, y) \leqslant \frac{1}{2}(U^n x, x) + \frac{1}{2}(U^n y, y).$$

Avec $x \in \mathrm{Dom}\,(T^{n+1}) = \mathrm{Dom}\,(U^{n+1}) \subset \mathrm{Dom}\,(U^n)$, $y = (I + U)x \in \mathrm{Dom}\,(U^n)$, la propriété de commutation donne, $\forall\, x \in \mathrm{Dom}\,(T^{n+1})$,

$$(U^n x, (I + U)x) \leqslant \frac{1}{2}(U^n x, x) + \frac{1}{2}\,(U^n(I + U)x, (I + U)x)$$

$$(U^n x, x) + (U^n x, Ux) \leqslant \frac{1}{2}(U^n x, x) + \frac{1}{2}(U^n x + U^{n+1}x, x + Ux).$$

Après développement et simplification, en multipliant membre à membre par 2,

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\,(T^{n+1}), \quad (U^n x, Ux) \leqslant (U^{n+1}x, x) + (U^{n+1}x, Ux).$$

En revenant à T, et en simplifiant par a,

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\,(T^{n+1}), \quad (T^n x, Tx) \leqslant (T^{n+1}x, x) + a(T^{n+1}x, Tx).$$

Mais T^n, restriction positivement homogène du sous gradient de F_{T^n}, est positif; en faisant tendre a vers 0,

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\,(T^{n+1}), \quad (T^n x, Tx) \leqslant (T^{n+1}x, x).$$

De même, pour a assez petit, $\forall x \in \mathrm{Dom}\,(T^{n+1})$,

$$(U^n(I+U)x, x) \leqslant \frac{1}{2}(U^n x, x) + \frac{1}{2}(U^n(I+U)x, (I+U)x)$$

$$(U^{n+1}x, x) \leqslant (U^n x, Ux) + (U^{n+1}x, Ux)$$

$$(T^{n+1}x, x) \leqslant (T^n x, Tx) + a(T^{n+1}x, Tx)$$

$$(T^{n+1}x, x) \leqslant (T^n x, Tx). \quad \blacksquare$$

Ces différentes remarques permettent donc de donner les deux caractérisations suivantes:

6. THÉORÈME. *Une application $T : D(T) \longrightarrow H$, où H est un espace hilbertien réel, et $D(T) \subset H$, est un opérateur spectral conique si et seulement si*

(i) *$D(T) = \mathrm{Dom}\,(T)$ est convexe;*

(ii) *T est maximal monotone, et toutes ses puissances $T^k, k \geqslant 2$, sont monotones;*

(iii) *T est positivement homogène (ici au sens large, c.a.d. $T(ax) = aTx$ pour $x \in \mathrm{Dom}\,(T)$ et $a \geqslant 0$);*

(iv) $T(I + aT) = (I + aT)T$, $\quad a > 0$;

(v) $\forall x \in \mathrm{Dom}(T^2)$, $\quad (T^2x, x) = (Tx, Tx)$.

Ceci est vrai étant donnée la remarque 4.

7. THÉORÈME. *Une application $T : D(T) \longrightarrow H$, où H est un espace hilbertien réel, et $D(T) \subset H$, est un opérateur spectral conique si et seulement si*

(i) $D(T) = \mathrm{Dom}(T)$ *est convexe;*

(ii) *Il existe une fonction G s.c.i. telle que $T = \partial G$, et $G(x) = \frac{1}{2}(Tx, x)$ sur* $\mathrm{Dom}(T)$;

(iii) *Le semi groupe $\{T^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ est un semi groupe d'opérateurs monotones (resp. de restrictions de sous différentiels);*

(iv) *T est positivement homogène ($T(aX) = aTx$, pour $x \in \mathrm{Dom}(T)$, et $a \geqslant 0$);*

(v) $T(I + aT) = (I + aT)T$, $\quad a > 0$.

Démonstration. Si T est un opérateur spectral conique, $\mathrm{Dom}(T)$ est convexe ([6], Theorem 4.1, p.88), T est le sous différentiel d'une fonction convexe s.c.i. telle que cette fonction soit égale à $\frac{1}{2}(Tx, x)$ sur $\mathrm{Dom}(T)$ ([6], Theorem 4.2, p.91). Le reste provient du théorème 6.

Réciproquement, si T vérifie le théorème 7, alors il vérifie le théorème 6. Comme $T(0) = 0$, la fonction G est convexe propre, et T est maximal monotone. Enfin, la condition (v) est vraie étant donnée la remarque 5. ∎

Si T est partout défini, la condition $T = \partial G$ entraine immédiatement que $G = \frac{1}{2}(Tx, x)$ sur $\mathrm{Dom}(T)$, ([1], Théorème p.28 et 31), (en fait à une constante additive près, mais on choisit cette constante nulle).

De même, $\mathrm{Dom}(T)$ étant un cône convexe, si $T = \partial G$ sur $\mathrm{Dom}(T)$, et si G est positivement homogène de degré 2, $G = \frac{1}{2}(Tx, x)$ sur $\mathrm{Dom}(T) \setminus \{0\}$, et comme T est positivement homogène au sens large, $G = \frac{1}{2}(Tx, x)$ sur $\mathrm{Dom}(T)$. $\Big($Prendre $x \in \mathrm{Dom}(T) \setminus \{0\}$, $n \in \mathbf{N}$ assez grand, et écrire, pour $u \in Tx$, $G\left(\left(1 \pm \frac{1}{2n}\right) x\right) \geqslant G(x) \pm \frac{1}{2n}(u, x)\Big)$.

2. OPÉRATEURS SEMI AUTOADJOINTS

Nous allons maintenant éliminer les conditions sur les puissances de T. Pour cela, nous faisons intervenir une propriété vérifiée par les opérateurs spectraux coniques, celle d'être semi autoadjoint.

8. DEFINITION. Un opérateur T sur un espace préhilbertien réel H est semi autoadjoint s'il vérifie

$$\forall x, y \in \mathrm{Dom}(T^2), \quad (T^2x, y) + (T^2y, x) \leqslant 2(Tx, Ty).$$

9. REMARQUE. *Tout opérateur spectral conique est semi autoadjoint.*

Démonstration. Pour tous polynôme $P(t)$ et $Q(t)$ positifs sur $\mathbb{R}_+$, T vérifie la relation: ([4], Theorem 10.2, p.417) $\forall x, y \in \mathrm{Dom}(P^2(T)) \cap \mathrm{Dom}(Q^2(T))$,

$$\|P(T)Q(T)x - P(T)Q(T)y\|^2 \leqslant (P^2(T)x - P^2(T)y, Q^2(T)x - Q^2(T)y).$$

Pour $P = t$ et $Q = 1$, cette relation devient: $\forall x, y \in \mathrm{Dom}(T^2)$,

$$\|Tx - Ty\|^2 \leqslant (T^2x - T^2y, x - y).$$

Développons:

$$(Tx, Tx) - 2(Tx, Ty) + (Ty, Ty) \leqslant (T^2x, x) - (T^2y, x) - (T^2x, y) + (T^2y, y)$$

or,

$$(T^2x, x) = (Tx, Tx),$$

et de même pour y. On en déduit que T est semi autoadjoint.

10. PROPRIÉTÉ. *Soit T un opérateur semi autoadjoint. Alors T vérifie* $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $\forall x, y \in \mathrm{Dom}(T^{m+n})$,

$$(T^{m+n}x, y) + (T^{m+n}y, x) \leqslant (T^m x, T^n y) + (T^n x, T^m y).$$

Démonstration. Posons d'abord $m = 1$. La relation est alors vraie pour $n = 0, n = 1$. T étant semi autoadjoint, soit $x, y \in \mathrm{Dom}(T^{m+n}) = \mathrm{Dom}(T^{n+1})$.

$$(T^2u, v) + (T^2v, u) \leqslant 2(Tu, Tv), \quad \text{si} \quad u, v \in \mathrm{Dom}(T^2).$$

Soit donc $n \geqslant 2$, et substituons $T^{n-1}x$ à u, $(T^{n-1}x \in \mathrm{Dom}(T^2))$, y à v:

$$(T^{n+1}x, y) + (T^2y, T^{n-1}x) \leqslant 2(T^n x, Ty).$$

En substituant $T^{n-1}y$ à v et x à u:

$$(T^2x, T^{n-1}y) + (T^{n+1}y, x) \leqslant 2(Tx, T^n y).$$

Sommons membre à membre, $\forall\, x, y \in \operatorname{Dom}(T^{n+1}), n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}(T^{n+1}x, y) + (T^{n+1}y, x) &+ \big((T^2y, T^{n-1}x) + (T^2x, T^{n-1}y)\big)\\ &\leqslant (T^n x, Ty) + (Tx, T^n y) + \big((T^n x, Ty) + (T^n y, Tx)\big).\end{aligned}$$

n étant $\geqslant 2$, on a aussi, par récurrence, en supposant la relation du théorème vraie jusqu'à $(n-1)$: $\forall\, x, y \in \operatorname{Dom}(T^n)$,

$$(T^n x, Ty) + (T^n y, Tx) \leqslant (T^{n-1}x, T^2y) + (T^{n-1}y, T^2x).$$

Pour $n \geqslant 2$, la relation s'écrit:

$$\begin{aligned}\Big(T^{(n-2)+1}(Tx), Ty\Big) &+ \Big(T^{(n-2)+1}(Ty), Tx\Big)\\ &\leqslant \big(T^{n-2}(Tx), T(Ty)\big) + \big(T^{n-2}(Ty), T(Tx)\big)\end{aligned}$$

ce qui est la relation du théorème pour $n-2$, Tx, Ty, avec $Tx, Ty \in \operatorname{Dom}(T^{n-1})$. Donc $\forall\, x, y \in \operatorname{Dom}(T^{n+1}), n \geqslant 2$,

$$(T^{n+1}x, y) + (T^{n+1}y, x) \leqslant (T^n x, Ty) + (T^n y, Tx).$$

La relation est vraie pour $m = 1$. Elle est alors vraie pour tout couple (m, n):

Elle est triviale pour m ou $n = 0$. Si m et $n \neq 0$: (par récurrence sur n, $p = m + n$ fixé)

Si $m \geqslant n : \forall\, x, y \in \operatorname{Dom}(T^{m+n})$,

$$\begin{aligned}(T^{m+n}x, y) + (T^{m+n}y, x) &\leqslant (T^{m+n-1}x, Ty) + (T^{m+n-1}y, Tx)\\ &\leqslant (T^{m+n-2}x, T^2y) + (T^{m+n-2}y, T^2x)\\ &\quad \cdots\\ &\leqslant (T^m x, T^n y) + (T^m y, T^n x).\end{aligned}$$

Si $m \leqslant n : \forall\, x, y \in \operatorname{Dom}(T^{m+n})$,

$$\begin{aligned}(T^{m+n}x, y) + (T^{m+n}y, x) &\leqslant (T^{n+m}x, y) + (T^{n+m}y, x)\\ &\leqslant (T^n x, T^m y) + (T^n y, T^m x)\\ &= (T^m x, T^n y) + (T^m y, T^n x). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

11. Corollaire. *Si T est un opérateur semi autoadjoint, alors toute puissance de T est semi autoadjointe.*

Il suffit de poser $m = n$.

12. REMARQUE. *Soit T un opérateur semi autoadjoint sur le préhilbertien réel H.*

Pour $m, n \in \mathbf{N}$, si T vérifie $\forall\, x \in \mathrm{Dom}\,(T^{m+n})$,

$$(T^{m+n}x, x) = (T^m x, T^n x),$$

alors, $\forall\, x, y \in \mathrm{Dom}\,(T^{m+n})$,

$$(T^{m+n}x - T^{m+n}y, x - y) \geqslant (T^m x - T^m y, T^n x - T^n y).$$

Il suffit de développer, et d'appliquer 10.

13. COROLLAIRE. *Soit T un opérateur semi autoadjoint vérifiant:*

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \forall\, x \in \mathrm{Dom}\,(T^{n+1}), \quad (T^{n+1}x, x) = (T^n x, Tx).$$

Alors, si de plus T est monotone, toute puissance de T est monotone.

Démonstration. Il suffit de procéder par récurrence sur l'exposant de T^n, en appliquant 12. ∎

Ceci permet de donner la caractérisation suivante.

14. THÉORÈME. *Une application $T : D(T) \longrightarrow H$, où H est un espace hilbertien réel, et $D(T) \subset H$, est un opérateur spectral conique si et seulement si*

(i) $\mathrm{Dom}\,(T)$ *est convexe;*

(ii) *il existe une fonction G s.c.i. telle que $T = \partial G$, et $G(x) = \frac{1}{2}(Tx, x)$ sur* $\mathrm{Dom}\,(T)$*;*

(iii) *T est semi autoadjoint;*

(iv) *T est positivement homogène ($T(ax) = aTx$, pour $x \in \mathrm{Dom}\,(T)$, et $a \geqslant 0$);*

(v) *$T(I + aT) = (I + aT)T$, $a > 0$.*

Démonstration. D'après 7 et 9, tout opérateur spectral conique vérifie les conditions du théorème.

Réciproquement, il suffit de vérifier le théorème 7, et donc de montrer que les puissances de T sont monotones, ce qui est vrai, T étant monotone, d'après 5, 4 et 13. ∎

REFERENCES

1. A. ALBUGUES, Aspect algébrique des opérateurs de Zarantonello, présenté lors du Troisième Contact Franco-Belge en Algèbre, 23-27 Mai 1988, U.S.T.L., Montpellier 2.
2. H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones*, Mathematics Studies, No.5, North Holland 1973.
3. D. PASCALI, S. SBURLAN, *Nonlinear Mappings of Monotone Type*, Editura Academiei – Sijthoff & Noordhoff 1978.
4. E.H. ZARANTONELLO, Projections on convex sets in Hilbert spaces and spectral theory, in *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, E.H. Zarantonello Editor, Academic Press 1971, pp.237–424.
5. E.H. ZARANTONELLO, The meaning of the Cauchy-Schwartz-Buniakowsky inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* 58(1976), p.133–138.
6. E.H. ZARANTONELLO, Conical spectral theory, *Topics in Functional Analysis* 1980-81, Quaderno de la Scuola Normale Superiore di Pisa, pp. 37–116.

ALAIN ALBUGUES
Le Martinet - 30960
Les Mages - Gard
FRANCE

Reçu le 25 janvier 1994; revisé le 7 juin 1994.